高等学校教材

过程流体力学题解

宋鹏云　焦　凤　朱孝钦　等编

化学工业出版社

高等学校教材

过程流体力学题解

宋鹏云　焦　凤　朱孝钦　等编

化学工业出版社
·北京·

本书是与《过程流体力学》配套的教学参考书。对《过程流体力学》一书的所有习题进行解答。全书共有9章，包括绪论、流体运动学、理想流体力学、黏性流体力学、射流与撞击流、多相流、流体通过多孔介质的流动、非牛顿流体的流变性与流动、计算流体力学。

本书可供学习流体力学的研究生和高年级本科生参考。也可供相关专业技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

过程流体力学题解/宋鹏云等编．—北京：化学工业出版社，2016.2
高等学校教材
ISBN 978-7-122-25777-2

Ⅰ.①过…　Ⅱ.①宋…　Ⅲ.①流体力学-高等学校-题解　Ⅳ.①O35-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第285756号

责任编辑：程树珍　　　装帧设计：关　飞
责任校对：边　涛

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　装：大厂聚鑫印刷有限责任公司
787mm×1092mm　1/16　印张6¾　字数161千字　2016年3月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：25.00元

前言

本书是与《过程流体力学》配套的教学参考书。对《过程流体力学》一书的所有习题进行解答。全书共有9章，包括绪论、流体运动学、理想流体力学、黏性流体力学、射流与撞击流、多相流、流体通过多孔介质的流动、非牛顿流体的流变性与流动、计算流体力学。

本书是昆明理工大学研究生教育百门核心课程——“过程流体力学”建设的一个重要内容，得到了昆明理工大学的大力支持。

本书由宋鹏云主持编著，并编写第1章、第2章；朱孝钦编写了第3章；焦凤编写了第4章；许恒杰编写了第5章、第6章；常静华编写了第7章；别玉编写了第8章；毛文元、许恒杰编写了第9章。全书由宋鹏云统稿、调配和补充。

本书参考了众多流体力学题解书籍和网络上的习题及题解，在此对相关作者表示感谢！

书中有一些习题和题解由编者完成，可能存在不妥，敬请读者批评指正。

本书的出版得到了化学工业出版社的全力支持和帮助，出版之际，谨对他们致以深切的谢意。

编者

2015年7月

目录

第1章 绪 论

1-1 炉气组成为 $\varphi_{CO_2}=15.2\%$，$\varphi_{SO_2}=0.3\%$，$\varphi_{O_2}=4.6\%$，$\varphi_{H_2O}=5\%$，$\varphi_{N_2}=74.9\%$（均为体积分数），如果可加性成立。试求混合气体在标准状态下的密度。

解 混合气体的体积分数即等于其摩尔分数。混合气体的相对分子量，或摩尔质量为

$$M_m=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k M_k=15.2\%\times 44+0.3\%\times 64+4.6\%\times 32+5\%\times 18+74.9\%\times 28$$
$$=30.22(\mathrm{kg/kmol})$$

根据理想气体状态方程，混合气体在标准状态（$p=1.013\times 10^5\mathrm{Pa}$，$T=273\mathrm{K}$）下的密度

$$\rho_m=\frac{p}{M_mR_uT}=\frac{1.013\times 10^5}{30.22\times 8.314\times 273}=1.48(\mathrm{kg/m^3})$$

1-2 上下两平行圆盘，直径均为 d，间隙为 δ，其间隙间充满黏度为 μ 的液体。如下盘固定不动，上盘以角速度 ω 匀速旋转，试求所需力矩及热量产生速率。

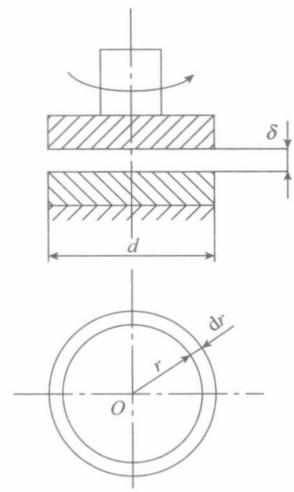

图 1-1 习题 1-2 图

解 在圆盘半径为 r 处取半径增量为 $\mathrm{d}r$ 的微小圆环，如图 1-1 所示。

微圆环上的切应力

$$\tau(r)=\mu\frac{\omega r}{\delta}$$

其产生的阻力矩

$$\mathrm{d}M=\tau(r)\times 2\pi r\times \mathrm{d}r\times r=\frac{2\pi\mu\omega}{\delta}r^3\mathrm{d}r$$

稳定运转时，其驱动力矩等于其总阻力矩，即

$$M=\int_0^M\mathrm{d}M=\int_0^{d/2}\frac{2\pi\mu\omega}{\delta}r^3\mathrm{d}r=\frac{2\pi\mu\omega}{\delta}\int_0^{d/2}r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi\mu\omega d^4}{32\delta}$$

假设摩擦阻力全部转换成热量，其热量产生速率为

$$N=M\omega=\frac{\pi\mu\omega^2d^4}{32\delta}$$

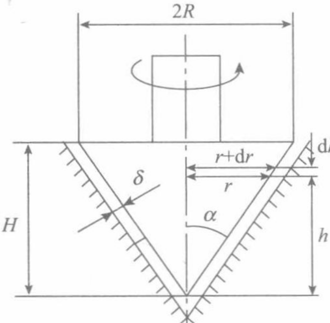

图 1-2 习题 1-3 图

1-3 如图 1-2 所示，一圆锥体绕竖直中心轴作等速运动，锥体与固定外锥套之间的间隙为 δ，其间充满黏度为 μ 的液体。已知锥体高度为 H，顶面半径为 R，半锥角为 α。试求所需要

的驱动力矩。

解 如图 1-2 所示，在离圆锥顶 h 处取高度为 $\mathrm{d}h$ 的微段，其半径为 r，$r=\dfrac{R}{H}h$，此微元段的旋转线速度

$$u(h)=\omega r=\frac{R}{H}\omega h$$

其切应力为
$$\tau(h)=\mu\frac{u(h)}{\delta}=\mu\frac{R\omega h}{H\delta}$$

其产生的阻力矩

$$\mathrm{d}M(h)=\tau(h)2\pi r\frac{\mathrm{d}h}{\cos\alpha}r=\mu\frac{2\pi R\omega}{H\delta\cos\alpha}r^2h\,\mathrm{d}h$$

$r=\dfrac{R}{H}h=h\tan\alpha$ 代入上式得

$$\mathrm{d}M(h)=\frac{2\pi\mu\omega}{\delta\cos\alpha}\tan^3\alpha h^3\,\mathrm{d}h$$

所需要的驱动力矩等于其总阻力矩

$$M=\int_0^M\mathrm{d}M(h)=\int_0^H\frac{2\pi\mu\omega}{\delta\cos\alpha}\tan^3\alpha h^3\,\mathrm{d}h=\frac{2\pi\mu\omega\tan^3\alpha}{\delta\cos\alpha}\frac{H^4}{4}=\frac{\pi\mu\omega\tan^3\alpha}{2\delta\cos\alpha}H^4$$

1-4 如图 1-3 所示，黏性流体沿 x 轴方向作层状流动，在 y 轴方向有速度梯度。在 $t=0$ 时，取距离为 $\mathrm{d}y$ 的两个流体质点 a，b。a 质点 y 方向的坐标为 y，对应的流体速度 $u(y)$；b 质点 y 方向的坐标为 $y+\mathrm{d}y$，对应的速度 $u(y)+\mathrm{d}u(y)$。经过时间 $\mathrm{d}t$ 后，a 点移动到 a' 点。b 点移动到 b' 点，$a'b'$ 相对于 ab 偏转的角度为 γ，流体的剪切变形速率定义为 $\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t$，即单位时间内因剪切变形产生的角度变化。试推导证明，流体的剪切变形速率就等于流体的速度梯度，即

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$$

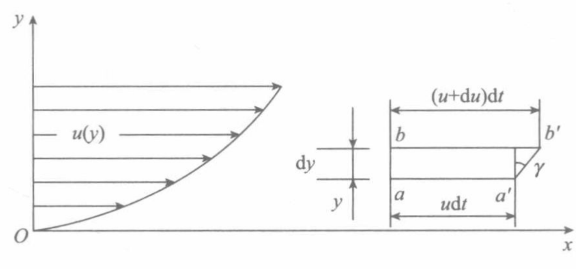

图 1-3 习题 1-4 图

解 如图 1-3 所示，线段 $\overline{aa'}=u\,\mathrm{d}t$，$\overline{bb'}=(u+\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}t=u\,\mathrm{d}t+\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t$

由于角度 γ 较小，有

$$\gamma\approx\tan\gamma=\frac{\overline{bb'}-\overline{aa'}}{\overline{ab}}=\frac{u\,\mathrm{d}t+\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t-u\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$$

在 $\mathrm{d}t$ 时间内转过的角度为 γ，所以剪切变形速率

$$\dot{\gamma}=\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\approx\frac{\gamma}{\Delta t}=\frac{\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$$

1-5 空气中20℃水滴直径为100μm时，其内部压力比外部压力大多少？

解 20℃水与空气接触时，其表面张力系数$\sigma=0.0731$ N/m。水滴为球形，$R_1=R_2=R=50\ \mu$m，忽略重力的影响，液滴内部压力比外部压力大

$$\Delta p=\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{2\sigma}{R}=\frac{2\times0.0731}{50\times10^{-6}}=2.924\times10^3(\mathrm{Pa})=2.924(\mathrm{kPa})$$

1-6 空气中飘浮的直径为d的肥皂泡，已知肥皂液膜的表面张力系数为σ，试求肥皂泡内腔的压力。

解 假设空气中飘浮的肥皂泡为球形，其为一球形液膜，厚度可忽略不计，液膜内外直径均为$R=d/2$。如图1-4所示，考察液膜内侧点A，外侧点C和中间点B。根据表面张力的拉普拉斯公式，表面张力在A点和B点形成的压差

$$_A-_B=\sigma\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\right)=\frac{2\sigma}{R}$$

同理，B点和C点形成的压差

$$_B-_C=\sigma\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\right)=\frac{2\sigma}{R}$$

上两式相加，可以消去$_B$，得到肥皂泡内外两侧的压差

$$_A-_C=\frac{2\sigma}{R}+\frac{2\sigma}{R}=\frac{4\sigma}{R}=\frac{8\sigma}{d}$$

即肥皂泡内腔的压力 $\quad _A=\frac{8\sigma}{d}+_C$

如果按表压计算，$_C=0$，$_A=\frac{8\sigma}{d}$。

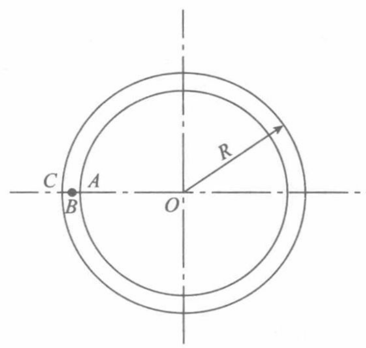

图1-4 习题1-6图

1-7 如图1-5所示，一很长平壁浸入体积很大的水中。由于存在表面张力，在靠近壁面地方水的表面成为了弯曲面。假设弯曲面曲率半径为r可以表示为$1/r=\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$，液体与固体壁表面的接触角$\theta$和表面张力系数$\sigma$已知。试确定平壁附近水面的形状和液体爬升的高度$h$。

解 由于表面张力的作用，凹液面任一位置气液两侧的压力差为$\Delta p=_0-p=\sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$，而对于长平壁形成的液面，有$R_1=\infty$，得

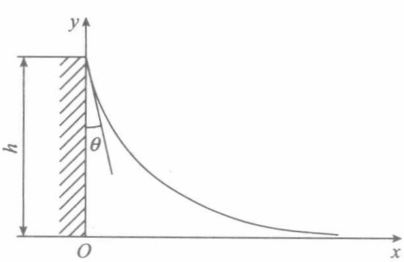

图1-5 习题1-7图

$$\frac{1}{R_2}=\frac{1}{r}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=y''$$

对于任一x处

$$p+\rho g y=_0$$

$$_0-p=\rho g y$$

所以

$$\rho g y=\sigma y''$$

即
$$y''-\frac{\rho g}{\sigma}y=0$$

$$y=C_1\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}}x}+C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}}x}$$

当 $x\to\infty$，$y\to 0 \Longrightarrow C_1=0$

$$y=C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}}x}$$

而

$$y'\mid_{x=0}=-\cot\theta \Longrightarrow C_2=\frac{\cot\theta}{\sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}}}$$

所以水面形状为
$$y=\frac{\cot\theta}{\sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}}}\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}}x}$$

当 $x=0$ 时，得液面爬升高度 $h=y\mid_{x=0}=\dfrac{\cot\theta}{\sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}}}=\sqrt{\dfrac{\sigma}{\rho g}}\cot\theta$

1-8 试计算棱长为1mm的立方体空气在标准状态下所含有的空气分子数。

解 根据阿伏伽德罗定律，1mol标准状态下的气体分子个数为 6.022×10^{23}，体积为 $22.4\mathrm{L}=22.4\times10^{-3}\mathrm{m}^3$。所以，棱长为1mm的立方体空气在标准状态下的分子数

$$n_{\mathrm{air}}=\frac{1\times10^{-9}}{22.4\times10^{-3}}\times6.022\times10^{23}=2.688\times10^{16}$$

1-9 如图1-6所示为钢板表面涂塑过程，钢板宽度为1m，以0.5m/s的速度移动。板与模口的间隙为1mm。在加工温度下，塑料糊的流动特性服从幂律表达式 $\tau=2500\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)^{0.4}$。试求模口中塑料糊的剪切率、拉动该板所需的力和功率。

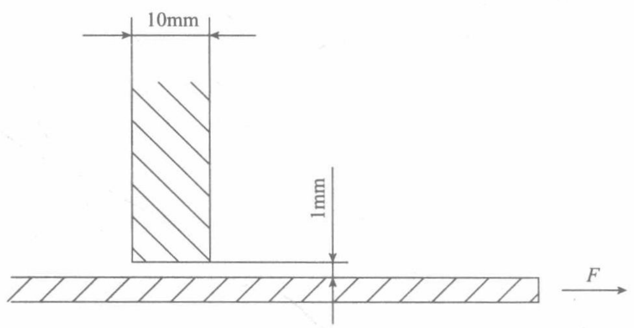

图1-6 习题1-9图

解 模口中塑料糊的剪切率

$$\dot{\gamma}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{u}{\delta}=\frac{0.5}{0.001}=500(\mathrm{s}^{-1})$$

拉动钢板所需的力

$$F=\tau\times A=2500\times\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)^{0.4}\times1\times0.01=2500\times500^{0.4}\times1\times0.01=300.28(\mathrm{N})$$

拉动钢板所需功率

$$P=FV=300.28\times0.5=150.14(\mathrm{W})$$

1-10 如图 1-7 所示，敞口容器中盛有密度为 $\rho=1200\mathrm{kg/m^3}$ 的芥末酱，依靠容器底部直径 $d=10\mathrm{mm}$、长 $L=1\mathrm{m}$ 的直管进行装瓶。当容器中液面不断下降至 $H=0.35\mathrm{m}$ 时，芥末酱在管内不再流动。芥末酱可看作是理想塑性流体。试求该芥末酱的屈服应力 τ_0。

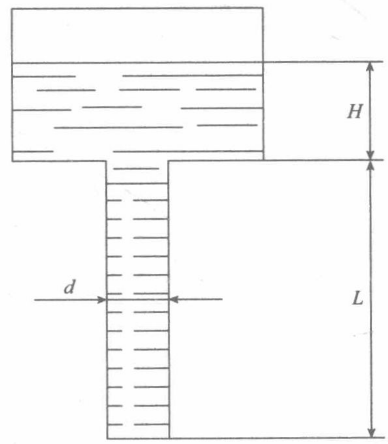

图 1-7 习题 1-10 图

解 如图 1-7 所示，当管壁处的切应力 τ_w 等于流体的屈服应力 τ_0 时，管内流体不再流动。对管径为 d，管长为 L 的管内流体作力平衡可得

$$\Delta p\ \frac{\pi d^2}{4}+\rho g\ \frac{\pi d^2}{4}L=\tau_0\pi dL$$

而直管上下两端的压力差 $\Delta p=\rho gH$

所以芥末酱的屈服应力

$$\tau_0=\frac{\rho gd}{4}\left(1+\frac{H}{L}\right)=\frac{1200\times9.81\times10\times10^{-3}}{4}\left(1+\frac{0.35}{1}\right)$$
$$=39.73(\mathrm{Pa})$$

第2章 流体运动学

2-1 已知一流体质点的位置矢量为 $\boldsymbol{s}=(2+0.01\sqrt{t^5})\boldsymbol{i}+(2+0.01\sqrt{t^5})\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，问此质点运动到横坐标 $x=8$ 时的速度和加速度分别是多少？

解 位置矢量 $\boldsymbol{s}$ 的坐标函数为

$$x=2+0.01\sqrt{t^5},\ y=2+0.01\sqrt{t^5},\quad z=2$$

速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=0.025t^{\frac{3}{2}}\boldsymbol{i}+0.025t^{\frac{3}{2}}\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}$$

加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=0.0375t^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{i}+0.0375t^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}$$

当 $x=8$ 时，运动时间

$$t_1=\left(\frac{x-2}{0.01}\right)^{\frac{2}{5}}\bigg|_{x=8}=12.92$$

速度

$$\boldsymbol{v}\mid_{t=12.92}=0.025\times12.92^{\frac{3}{2}}\boldsymbol{i}+0.025\times12.92^{\frac{3}{2}}\boldsymbol{j}=1.16\boldsymbol{i}+1.16\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}\mid_{t=12.92}=0.0375\times12.92^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{i}+0.0375\times12.92^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{j}=0.135\boldsymbol{i}+0.135\boldsymbol{j}$$

2-2 已知一速度场 $\boldsymbol{v}=(6+2xy+t^2)\boldsymbol{i}-(xy^2+10t)\boldsymbol{j}+25\boldsymbol{k}$。试求流体质点在位置（3，0，2）处的加速度。

解 加速度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=u\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}+v\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}+w\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\\&=(6+2xy+t^2)(2y\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j})+[-(xy^2+10t)(2x\boldsymbol{i}-2xy\boldsymbol{j})]+25\times0+(2t\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{j})\\&=(12y+4xy^2+2yt^2-2x^2y^2-20xt+2t)\boldsymbol{i}+\\&\quad(-6y^2-2xy^3-y^2t^2+2x^2y^3+20xyt-10)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

对点（3，0，2），其加速度为

$$\boldsymbol{a}(3,0,2)=(-20\times3t+2t)\boldsymbol{i}+(-10)\boldsymbol{j}=-58t\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{j}$$

2-3 已知速度场 $\boldsymbol{v}=(x+1)t^2\boldsymbol{i}-(y+1)t^2\boldsymbol{j}$。试确定在 $t=1$ 时，通过点（0，0）的迹线方程和流线方程。

解 迹线方程为

$$\frac{dx}{dt}=u=(x+1)t^2,\quad \frac{dy}{dt}=v=-(y+1)t^2$$

即

$$\frac{dx}{x+1}=t^2dt$$

$$\frac{dy}{y+1}=-t^2dt$$

将以上两式积分得

$$\ln(x+1)=\frac{1}{3}t^3+C_1$$

$$\ln(y+1)=-\frac{1}{3}t^3+C_2$$

上两式相加消去 t 得

$$\ln[(x+1)(y+1)]=\ln C$$

即

$$(x+1)(y+1)=C$$

将 $x=0$，$y=0$ 代入，得 $C=1$。

因此，通过点（0，0）的迹线方程为 $(x+1)(y+1)=1$。

流线的微分方程为

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}$$

即

$$\frac{dx}{(x+1)t^2}=\frac{dy}{-(y+1)t^2}$$

消去 t，两边积分，得

$$\ln(x+1)=-\ln(y+1)+\ln C$$

即

$$(x+1)(y+1)=C$$

以 $x=0$，$y=0$ 代入，得积分常数 $C=1$。

故在 $t=1$ 时，通过点（0，0）的流线方程为 $(x+1)(y+1)=1$。

2-4 已知某稳定流场 $\boldsymbol{v}=(x^2-y^2)\boldsymbol{i}-2xy\boldsymbol{j}$。试求出其流线。

解 流线方程为

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}$$

即

$$\frac{dx}{x^2-y^2}=\frac{dy}{-2xy}$$

或者

$$2xy\,dx+(x^2-y^2)dy=0$$

这是某函数 f 的全微分，即

$$df(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=2xy\,dx+(x^2-y^2)dy$$

或者

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2-y^2$$

积分得

$$f(x,y)=x^2y-\frac{1}{3}y^3+C$$

2-5 设在一个很长的通风管道中，温度 T 的变化规律为 $T=T_0-a\mathrm{e}^{-\frac{x}{L}}\sin\left(\dfrac{2\pi t}{\tau}\right)$。式中，$T_0$，$a$，$L$，$\tau$ 等均为常数；x 是从管道入口处量起的距离；流体质点以常速度 U 进入管道。试求流体质点通过管道过程中温度的变化率。

解 求流体质点温度变化率即求温度的随体导数。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t}&=\frac{\partial T}{\partial t}+U\frac{\partial T}{\partial x}\\
&=-a\mathrm{e}^{-\frac{x}{L}}\frac{2\pi}{\tau}\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)+U\left[-a\mathrm{e}^{-\frac{x}{L}}\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right]\left(-\frac{1}{L}\right)\\
&=a\mathrm{e}^{-\frac{x}{L}}\left[\frac{U}{L}\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)-\frac{2\pi}{\tau}\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)\right]
\end{aligned}
$$

2-6 已知某速度场 $\boldsymbol{v}=C\sqrt{y^2+z^2}\,\boldsymbol{i}$，$C$ 是常数，试求涡量 $\boldsymbol{\Omega}$ 和涡线方程。

解 涡量

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V}&=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\times(u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\\
&=\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\\
&=\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{j}-\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{k}\\
&=\frac{Cz}{\sqrt{y^2+z^2}}\boldsymbol{j}-\frac{Cy}{\sqrt{y^2+z^2}}\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

涡线方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\Omega_x}=\frac{\mathrm{d}y}{\Omega_y}=\frac{\mathrm{d}z}{\Omega_z}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{0}=\frac{\mathrm{d}y}{\dfrac{Cz}{\sqrt{y^2+z^2}}}=\frac{\mathrm{d}z}{-\dfrac{Cy}{\sqrt{y^2+z^2}}}\Longrightarrow \mathrm{d}x=0$$

$$y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z=0\Longrightarrow x=C_1$$

$$y^2+z^2=C_2$$

2-7 某流场由拉格朗日方法描述：$\boldsymbol{s}(\xi,t)=\xi_1\mathrm{e}^{-\left(\frac{2t}{k}\right)}\boldsymbol{i}+\xi_2\mathrm{e}^{\frac{t}{k}}\boldsymbol{j}+\xi_3\mathrm{e}^{\frac{t}{k}}\boldsymbol{k}$，其中 k 为常数。试判断该流场：（1）是否是稳定流动；（2）是否是不可压缩流动；（3）是否是有旋流动。

解 （1）根据迹线方程有

$$x=\xi_1\mathrm{e}^{-\left(\frac{2t}{k}\right)},\quad y=\xi_2\mathrm{e}^{\frac{t}{k}},\quad z=\xi_3\mathrm{e}^{\frac{t}{k}}\Longrightarrow$$

$$\xi_1=x\mathrm{e}^{\frac{2t}{k}},\quad \xi_2=y\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{k}\right)},\quad \xi_3=z\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{k}\right)}$$

该流场的速度场为

$$u=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\xi_1\mathrm{e}^{-\left(\frac{2t}{k}\right)}\times\left(\frac{-2}{k}\right)=x\mathrm{e}^{\frac{2t}{k}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{2}{k}\right)}\left(\frac{-2}{k}\right)=-\frac{2x}{k}$$

$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\xi_2 \mathrm{e}^{\frac{t}{k}}\frac{1}{k}=y\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{k}\right)}\mathrm{e}^{\frac{t}{k}}\frac{1}{k}=\frac{y}{k}$$

$$w=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\xi_3 \mathrm{e}^{\frac{t}{k}}\frac{1}{k}=z\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{k}\right)}\mathrm{e}^{\frac{t}{k}}\frac{1}{k}=\frac{z}{k}$$

$$\boldsymbol{v}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}=-\left(\frac{2x}{k}\right)\boldsymbol{i}+\frac{y}{k}\boldsymbol{j}+\frac{z}{k}\boldsymbol{k}$$

由于该速度场 $\boldsymbol{v}$ 只是空间位置 x，y，z 和常数 k 的函数，与时间 t 无关，该流场为稳态流场。

（2）将该速度场中的 u，v，w 代入体积变形速率方程

$$\dot{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial\left(-\frac{2x}{k}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{y}{k}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{z}{k}\right)}{\partial z}=-\frac{2}{k}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}=0$$

所以，流场是不可压缩流场。

（3）将该速度场中的 u，v，w 代入涡量方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}&=\nabla\times\boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\times(u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\\&=\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\\&=(0-0)\boldsymbol{i}+(0-0)\boldsymbol{j}+(0-0)\boldsymbol{k}\\&=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

所以，该流场满足无旋流动条件，该流场是无旋流场。

2-8 设有黏性流体经过一平板的表面，靠近平板表面流体的速度场为 $\boldsymbol{v}=U\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\boldsymbol{i}$，式中，$U$、$a$ 为常数。试求平板表面流体的线变形速率和角变形速率。

解 根据流体的速度矢量可知，流体沿 x、y、z 轴的速度分量分别为：$u=U\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)$，$v=0$，$w=0$。因此，线变形速率分别为

$$\dot{\varepsilon}_{xx}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0}=0,\dot{\varepsilon}_{yy}=\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\dot{\varepsilon}_{zz}=\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{y=0}=0$$

角变形速率分别为

$$\dot{\gamma}_{xy}=\left.\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|_{y=0}=\left.\frac{1}{2}\left[0+U\cos\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\frac{\pi}{2a}\right]\right|_{y=0}=\frac{\pi U}{4a}$$

$$\dot{\gamma}_{yz}=\left.\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right|_{y=0}=0$$

$$\dot{\gamma}_{zx}=\left.\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right|_{y=0}=0$$

2-9 圆形管道中牛顿流体层流运动的速度分布为 $u_z=2u_m\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$，式中，$u_m$ 为管

内的平均流速；R 为管子内半径。

（1）判断此流动是否为不可压缩流动；（2）判断此流动是否为有旋流动；（3）求此流动的流线、迹线和涡线方程。

解　在柱坐标下考虑。流场在柱坐标的三个坐标方向的速度分量分别为

$$u_r=0, u_\theta=0, u_z=2u_m\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

（1）将该流场的速度分量代入柱坐标下的连续性方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0+0+0=0$$

流场满足连续性方程，为不可压缩流动。

（2）该流场在柱坐标下的涡量

$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ u_r & ru_\theta & u_z\end{pmatrix}=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & u_z\end{pmatrix}=0\boldsymbol{e}_r+\left(-\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta+0\boldsymbol{e}_z=\frac{4u_m r}{R^2}\boldsymbol{e}_\theta$$

由于涡量 $\boldsymbol{\Omega}$ 不为零，该流场是有旋的。该流动为有旋流动。

（3）①柱坐标下流线方程为

$$\frac{dr}{u_r}=\frac{r\,d\theta}{u_\theta}=\frac{dz}{u_z}\Longrightarrow\frac{dr}{0}=\frac{r\,d\theta}{0}=\frac{dz}{2u_m\left(1-\dfrac{r^2}{R^2}\right)}$$

独立方程有两个，即

$$dr=0,\quad d\theta=0\Longrightarrow r=C_1,\quad \theta=C_2$$

表明流线上的 r、θ 为常数，即每条流线上的点都具有相同的 r、θ，流线为平行于 z 轴的直线。

② 柱坐标下迹线方程为

$$\frac{dr}{u_r}=\frac{r\,d\theta}{u_\theta}=\frac{dz}{u_z}=dt\Longrightarrow\frac{dr}{0}=\frac{r\,d\theta}{0}=\frac{dz}{2u_m\left(1-\dfrac{r^2}{R^2}\right)}=dt\Longrightarrow$$

$$dr=0,\quad d\theta=0,\quad dz=2u_m\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)dt\Longrightarrow$$

$$r=C_1,\quad \theta=C_2,\quad z=2u_m\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)t+C_3$$

迹线方程为 $r=$常数、$\theta=$常数，z 随时间变化，为沿 z 方向的平行直线。表明流体质点在随时间 t 沿 z 方向运动过程保持 r、θ 不变，作平行于 z 轴方向的直线运动。

③ 柱坐标下涡线方程为

$$\frac{dr}{\Omega_r}=\frac{r\,d\theta}{\Omega_\theta}=\frac{dz}{\Omega_z}\Longrightarrow\frac{dr}{0}=\frac{r\,d\theta}{\Omega_\theta}=\frac{dz}{0}$$

两个独立方程，即

$$dr=0,\quad dz=0\Longrightarrow r=C_1,\quad z=C_2$$

涡线方程 $r=$常数，$z=$常数，即每条涡线都在管道截面上（$z=C_2$），且是半径一定（$r=C_1$）的圆周线。

第3章 理想流体力学

3-1 截面为 300mm×400mm 的矩形孔道，风量为 $2700m^3/h$，求其平均流速。如风道出口处截面收缩为 150mm×400mm，求该处截面平均流速。

解 由题可知 $A_1=0.30m\times0.40m=0.12m^2$，$q_V=2700m^3/h$，$A_2=0.15m\times0.40m=0.06m^2$，则根据风量的定义 $q_V=\bar{V}_1A_1$，可得截面为 300mm×400mm 矩形孔道内风的平均流速为

$$\bar{V}_1=\frac{q_V}{A_1}=\frac{\dfrac{2700}{60\times60}}{0.12}=6.25(m/s)$$

利用流体的连续性方程

$$\bar{V}_1A_1=\bar{V}_2A_2$$

计算可得截面为 150mm×400mm 矩形孔道内风的平均流速为

$$\bar{V}_2=\bar{V}_1\frac{A_1}{A_2}=6.25\times\frac{0.12}{0.06}=12.50(m/s)$$

3-2 以 $0.5m^3/s$ 的流量向某一皮球冲注水，试计算当皮球半径 $R=0.5m$ 时半径增长速率 dR/dt。

解法一 如图 3-1 所示。选取紧邻 $R=0.5m$ 的球形固定体积空间为控制体（图中虚线）。加注水以速度 V_1 从微小面积 A_1 进入控制体。皮球的膨胀速率 dR/dt 等于液体穿越球形控制体表面的速度 V_2。各点的速度 V_2 均垂直于球形表面。对于固定的球形控制体，液体的流动是定常的，进入控制体的液体质量等于出控制体的液体质量，即

$$\iint_{CS}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,dA=-\rho V_1A_1+\rho V_2A_2=0$$

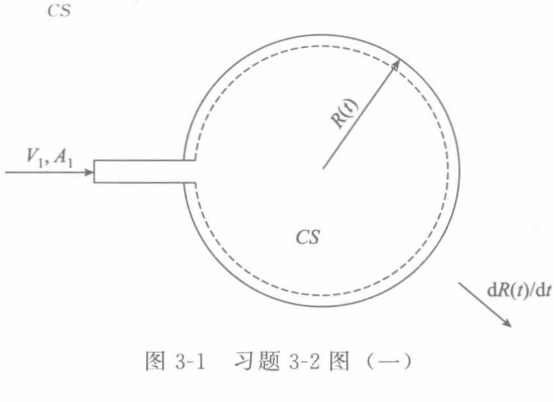

图 3-1 习题 3-2 图（一）

即 $$V_2=\frac{V_1A_1}{A_2}=\frac{q_V}{4\pi R^2}=\frac{0.5}{4\times\pi\times0.5^2}=0.16(\mathrm{m/s})$$

所以皮球的半径方向的增长速率

$$\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}=V_2=0.16\mathrm{m/s}$$

解法二 如图 3-2 所示。选取膨胀的皮球为控制体，此时控制面是随时间变化的，属于控制面运动的控制体。对于此控制体，球形控制面上没有流体流出，只有注入管道有流体流入，流入的速度为 V_1，截面为 A_1，流量 $q_V=V_1A_1$。根据连续性方程

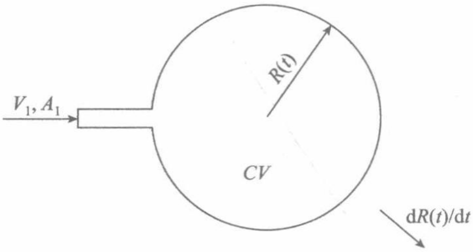

图 3-2 习题 3-2 图（二）

$$\frac{\partial\iiint\limits_{CV}\rho\mathrm{d}V}{\partial t}+\iint\limits_{CS}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A=0$$

由于流体为水，属于不可压缩流体，密度 ρ 等于常数，上式可写成

$$\frac{\partial\iiint\limits_{CV}\mathrm{d}V}{\partial t}+\iint\limits_{CS}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A=0$$

由于控制体的变化仅是时间的函数，且球形控制面上无液体流出，即液体速度与球形控制面的膨胀速度相同，此控制面上 $V_2=0$，上式可写成

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}+(-V_1A_1)=0$$

将 V 的表达式带入上式得 $$\frac{\mathrm{d}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}{\mathrm{d}t}+(-V_1A_1)=0$$

进一步简化有 $$\frac{4\pi}{3}\frac{\mathrm{d}(R^3)}{\mathrm{d}t}-V_1A_1=0$$

所以皮球的半径方向的增长速率

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\frac{V_1A_1}{4\pi R^2}=\frac{q_V}{4\pi R^2}=\frac{0.5}{4\pi\times0.5^2}=0.16(\mathrm{m/s})$$

3-3 如图 3-3 所示，某一盛装液体的圆柱形敞口容器，其内直径 $D_i=2000\mathrm{mm}$。有一进口管和出口管。进口管内直径 $d_1=50\mathrm{mm}$，出口管内直径 $d_2=80\mathrm{mm}$。某一段时间，同时进液和出液，进液流速 0.6m/s，出液流速 0.5m/s。试确定容器中的液面上升速度。

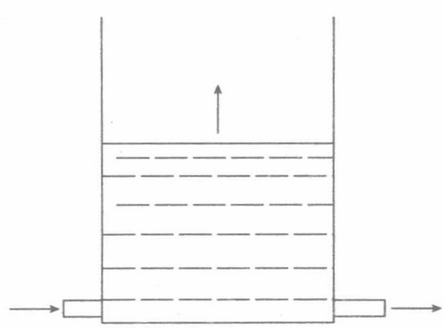

图 3-3 习题 3-3 图

解法一 取控制体的一个控制面刚好在液面的上方，但不与液面接触，如图 3-4 中虚线所示。此控制体的空间位置是固定的，但控制体内液体的质量是变化的。由于位于液面上方的控制面不与液体接触，液体通过此控制面的速度 $V_3=0$，液体穿越此控制面的质量流量为零。忽略控制体内液面上方的空气质量，控制体内的流体质量等于液体质量，并等于液体的体积与密度的