北方阳光系列丛书

概率论与数理统计学习指导

主　编　邵泽军

副主编　吕晓娜　牛玉玲　郭慧敏

科　学　出　版　社

北方阳光系列丛书

概率论与数理统计学习指导

主　编　邵泽军
副主编　吕晓娜　牛玉玲　郭慧敏

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是高等院校本科生数学公共基础课程“概率论与数理统计”的学习参考书，全书根据教材章节顺序共分九章，每章按五部分撰写，分别为内容精要（知识归纳）、典型例题、习题详解、自测题及自测题答案等内容.内容精要是对内容和方法进行归纳总结，方便学生自学，对概率论与数理统计的知识体系有一个详细认识，并为下一步的专业学习奠定良好基础；典型例题是把基本理论、基本方法、解题技巧等方面的教学要求融于例题之中，从而达到举一反三、触类旁通的效果；习题详解给出了较详细的分析与解答，有助于学生在课后自主学习；自测题大多选自于各章相关的历年考试典型试题，并给出了相应的参考答案，供学生复习和自测使用.

本书适合理工、经济管理类专业及其他相关专业的学生学习概率论与数理统计课程使用，也可供报考研究生的学生参考.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指导/邵泽军主编.—北京：科学出版社，2016.2

北方阳光系列丛书

ISBN 978-7-03-047113-0

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①邵…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 012107 号

责任编辑：王　静 / 责任校对：何艳萍

责任印制：霍　兵 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2016 年 2 月第　一　版　开本：720×1000 1/16

2016 年 2 月第一次印刷　印张：12　3/4

字数：257 000

定价：28.80 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《概率论与数理统计学习指导》编写组

主　编　邵泽军

副主编　吕晓娜　牛玉玲　郭慧敏

编　者　（以姓氏笔画为序）

牛玉玲　吕晓娜　刘艳霞　何　云

张亚飞　陈凡红　邵泽军　郭慧敏

前　言

本书是科学出版社《概率论与数理统计》(杨洪礼、胡运红主编)的配套学习指导. 我们对书中的习题给出了详细的解答,在各章内容上也与教材同步,可供学习概率论与数理统计课程的读者参考.

概率论与数理统计是高等学校理工、经管、医学、农林类等各专业的一门重要的公共基础课程,也是硕士研究生入学考试数学科目的重要组成部分. 为了帮助学生正确理解概率论与数理统计的基本概念,掌握解题基本方法与技巧,提高学生的解题能力,我们在总结多年教学经验的基础上编写了这本学习指导书,目的是通过本书指导学生结合课堂学习系统地复习概率论与数理统计的内容,巩固、掌握所学知识,培养学生分析问题和解决问题的能力,为以后的硕士研究生入学考试打下良好的基础.

全书共分 9 章,每章均由内容精要、典型例题、习题详解、自测题及自测题答案 5 部分组成,具体是:

1. 内容精要　包括主要定义、主要结论以及知识点总结,可以使学生建立良好的知识结构体系.

2. 典型例题　将所涉及内容,尤其重点内容通过经典例题演示给学生,使学生可以熟练掌握解题思路及运算技巧.

3. 习题详解　对教材中出现的所有习题给出了详细的解答,有些题还给出了多种解法,从而将学生的思路进一步拓展,能很好地起到课后辅导的作用.

4. 自测题及自测题答案　在每章内容学完后,学生通过做自测题,可以巩固所学知识,找出不足,从而进一步提高知识的掌握程度.

由于作者水平有限,书中难免出现疏漏,恳请各位同仁及读者不吝赐教.

编　者

2015 年 11 月

目　录

第 1 章　概率与古典概型

一、内容精要

(一) 相关概念

1. 排列组合公式

从 n 个人中挑出 m 个人进行组合的可能数为 C_n^m，且 $C_n^m=\frac{n!}{m!\ (n-m)!}$.

从 n 个人中挑出 m 个人进行排列的可能数为 A_n^m，且

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)=C_n^m\cdot A_m^m.$$

2. 加法和乘法原理

加法原理(每种情况均能完成此事)：某件事可由 n 种情况来完成，每种情况又包含 m_k 种方法，则完成这件事共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种方法.

乘法原理(单个步骤不能独立完成这件事)：某件事可由 n 个步骤来完成，每个步骤又包含 m_k 种方法，则完成这件事共有 $m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$ 种方法.

3. 确定性现象

在一定条件下必然发生的一类现象.

4. 统计规律性

在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性.

5. 随机现象

在个别试验中其结果呈现出不确定性，在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象.

6. 随机试验

可以在相同条件下重复地进行，每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果，进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现. 通常用 E 表示.

7. 样本空间

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 S.

8. 样本点

样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点，通常用 e 表示.

9. 随机事件

试验 E 的样本空间 S 除 S 及 $\varnothing$ 外的子集为 E 的随机事件，即一次试验中可能发生也可能不发生的事件，简称事件，通常用大写英文字母 A,B,C 等表示. 特别地，由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**.

10. 必然事件

在一次试验中必然出现的事件，记为 S.

11. 不可能事件

在一次试验中不可能出现的事件，记为 $\varnothing$.

(二) 事件间的关系和运算

1. 包含关系

$A\subset B$（事件 B 包含事件 A）表示事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

2. 和事件

$A\cup B$（和事件）表示事件 A 与 B 至少有一个发生.

3. 积事件

$A\cap B=AB$（积事件）表示事件 A 与 B 同时发生.

4. 差事件

$A-B$（差事件）表示事件 A 发生而 B 不发生.

5. 互斥事件

$AB=\varnothing$（A 与 B 互不相容或互斥）表示事件 A 与 B 不能同时发生.

6. 对立事件

$AB=\varnothing$且$A\cup B=S$(A与B互为对立事件)表示一次试验中A与B必有一个且仅有一个发生.

7. 运算律

(1) $A\cup B=B\cup A, AB=BA$;
(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (AB)C=A(BC)$;
(3) $(A\cup B)C=(AC)\cup(BC), (AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$;
(4) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}; \overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$;
(5) $A\cup A=A, A\cup S=S, A\cup\varnothing=\varnothing$;
(6) $A\cap S=A, A\cap\varnothing=\varnothing$.

(三) 频率和概率

1. 频率

在相同的条件下,进行了n次试验,在这n次试验中,事件A发生了m次,称比值$f_n(A)=\dfrac{m}{n}$为事件A在这n次试验中发生的频率.

注 (1) 频率具有随机波动性,即对于同一个随机事件,在相同的试验次数下,得到的频率也不一定会相同.

(2) 频率还具有稳定性,它总是在某一个具体数值附近波动,而随着试验次数的不断增加,频率的波动会越来越小,逐渐稳定于这个数值.

2. 概率的公理化定义

设S是给定的试验E的样本空间,对任意一个事件$A\subseteq S$,规定一个实数$P(A)$,若$P(A)$满足

(1) 非负性

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1;$$

(2) 规范性

$$P(S)=1;$$

(3) 可列可加性 设$A_1,A_2,\cdots$是两两互不相容的事件,即对于$i\neq j, A_iA_j=\varnothing, i,j=1,2,\cdots$,则有$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$,或$P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(A_k)$,则称$P(A)$为事件$A$的概率.

3. 概率的性质

(1) 不可能事件$\varnothing$的概率为 0,即 $P(\varnothing)=0$.

(2) 概率具有有限可加性,即对于 $i\neq j, A_iA_j=\varnothing, i,j=1,2,\cdots,n$,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n),$$

即 $P\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}P(A_k)$.

(3) 设 A,B 是两个事件,若 $A\subset B$,则有 $P(B-A)=P(B)-P(A), P(B)\geqslant P(A)$.

(4) 对于任一事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(5) 对于任一事件 A,有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(6) 对于任意两个事件 A,B,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

推广到多个事件的情况,设 A_1,A_2,A_3 为任意三个事件,则有

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)=&P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)\\&-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).\end{aligned}$$

一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为任意 n 个事件,则有

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots\\&+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned}$$

4. 古典概型

定义 1-1　如果一个随机试验 E 满足:

(1) 有限性　试验的样本空间 S 是有限集,即 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$;

(2) 等可能性　试验中每个样本点发生的可能性相同,即

$$P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)=\frac{1}{n}.$$

这种随机试验就称为等可能概型,或古典概型.

计算公式　$P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{\text{事件 }A\text{ 包含的样本点的个数}}{\text{样本空间 }S\text{ 包含的样本点的总数}}$.

5. 几何概型

定义 1-2　如果一个随机试验 E 满足:

(1) 试验的样本空间 S 是直线上某个区间,或者是平面、空间上的某个区域,从而 S 含有无限多个样本点;

(2) 每个样本点发生具有等可能性.

这种随机试验就称为几何概型试验.

计算公式　$P(A)=\dfrac{m(D)}{m(S)}$,其中$m(S)$及$m(D)$在S是区间时,表示相应的长度,在S是平面或空间区域时,表示相应的面积或体积.

(四) 条件概率

1. 条件概率定义

定义 1-3　设A与B为两个事件,且$P(B)>0$,则称$\dfrac{P(AB)}{P(B)}$为事件B发生的条件下事件A发生的条件概率,记为$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

2. 乘法公式

对于任意两个事件A与B,若$P(B)>0$,则$P(AB)=P(B)P(A|B)$;若$P(A)>0$,则$P(AB)=P(A)P(B|A)$.

3. 全概率公式

定义 1-4　设S为试验E的样本空间,$B_1,B_2,\cdots,B_n$为S的一组事件,若

(1) $B_iB_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$;

(2) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=S$,

则称$B_1,B_2,\cdots,B_n$为样本空间S的一个划分.

定理 1-1　设A为样本空间S的事件,$B_1,B_2,\cdots,B_n$为S的一个划分,且$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+\cdots+P(B_n)P(A\mid B_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)\end{aligned}$$

称为全概率公式.

4. 贝叶斯公式

定理 1-2　设A为样本空间S的事件,$B_1,B_2,\cdots,B_n$为S的一个划分,且$P(A)>0,P(B_i)>0,i=1,2,\cdots,n$,则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

(五) 事件的独立性

定义 1-5　设 A,B 为两个事件,若满足 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A 与事件 B 是相互独立的.

定义 1-6　对于三个事件 A,B,C,若满足下面 4 个等式:

$$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B),\\ P(AC)=P(A)P(C),\\ P(BC)=P(B)P(C),\\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C),\end{cases}$$

则称事件 A,B,C 相互独立.若满足前三个等式,则称 A,B,C 两两独立.

(六) 伯努利试验

定义 1-7　做了 n 次试验,且满足

(1) 每次试验只有两种可能结果,A 发生或 A 不发生;

(2) n 次试验是重复进行的,即 A 发生的概率每次均一样;

(3) 每次试验是独立的,即每次试验 A 发生与否与其他次试验 A 发生与否是互不影响的,

则称这种试验为**伯努利概型**,或称为 ***n* 重伯努利试验**.

定理 1-3　在 n 重贝努利试验中,若事件 A 在一次试验中发生的概率为 p,则在这 n 次试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

二、典型例题

例 1　设 A,B,C 为 3 个事件,试用 A,B,C 的运算与关系式表示下列事件:

(1) A 发生,B,C 都不发生;

(2) 所有三个事件都发生;

(3) 不多于两个事件发生;

(4) 三个事件中至少有两个发生.

解　(1) $A\overline{B}\overline{C}$;　(2) ABC;　(3) $\overline{ABC}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$;　(4) $AB\cup AC\cup BC$.

例 2　设 A,B 是两个事件,且 A,B 相互独立,则以下选项正确的是(　　).

(A) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$;　　(B) $P(AB)=0$;

(C) $P(A-B)=P(A)P(\overline{B})$;　　(D) $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

解　答案为(C),因为 A,B 相互独立,则 $A,\overline{B}$ 也相互独立,从而

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B}).$$

(A) 项不对,因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,只有 $P(AB)=0$,才成立.

(B) 项不对,因为 A,B 独立,不能得到 $AB\neq\varnothing$,所以不能得到 $P(AB)=0$.

(D) 项不对,因为只有在满足条件 $A\supset B$ 时,才有结论 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

例 3 设事件 A,B 仅发生一个的概率为 0.3,且 $P(A)+P(B)=0.5$,则 A,B 至少有一个不发生的概率为__________.

解 由 $P(A\overline{B}+\overline{A}B)=0.3$ 得

$0.3=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)=0.5-2P(AB)$,

所以

$$P(AB)=0.1,$$

从而

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.9.$$

例 4 设 $P(A)=0.5,P(B)=0.6,P(B|\overline{A})=0.8$,则 A,B 至少发生一个的概率为__________.

解 $0.8=P(B|\overline{A})=\dfrac{P(B\overline{A})}{1-P(A)}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{0.5}$ 得 $P(AB)=0.2$,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=1.1-0.2=0.9.$$

例 5 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只,问这 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少?

解 (法一)设事件 A 表示 4 只鞋中至少有两只配成一双,首先从 5 双鞋中取出一双,并将此两只鞋全部取出,然后从剩下的 4 双中取出 2 双,再从每双中各取一只,于是共有 $C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1$,显然,这样取得的鞋子只有一双成对,而 4 只鞋配成两双的取法有 C_5^2 种,故取得的 4 只鞋至少有一双的取法为 $C_5^1C_4^2\,(C_2^1)^2+C_5^2$,于是

$$P(A)=\frac{C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

(法二)设事件 A 表示 4 只鞋中至少有两只配成一双,则事件 $\overline{A}$ 表示 4 只鞋都不配对.从 10 只中任取 4 只,取法有 C_{10}^4 种,每种取法等可能.要 4 只都不配对,可在 5 双中任取 4 双,再在 4 双中的每一双里任取一只,取法有 $C_5^4\times2^4$ 种,则

$$P(\overline{A})=\frac{C_5^4\cdot2^4}{C_{10}^4}=\frac{8}{21},$$

于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}.$$

例 6 从一批由 45 件正品、5 件次品组成的产品中任取 3 件产品,求其中恰有 1 件次品的概率.

解　设事件 A 表示取出的 3 件产品恰有 1 件次品. 由题意，样本空间包含的事件数为 $n=C_{50}^{3}$，事件 A 包含的样本数为 $m=C_{45}^{2}C_{5}^{1}$. 于是

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{45}^{2}C_{5}^{1}}{C_{50}^{3}}=\frac{45\times44\times5\times3!}{50\times49\times48\times2!}=\frac{99}{392}.$$

例 7　随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a 为常数）内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，求原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率.

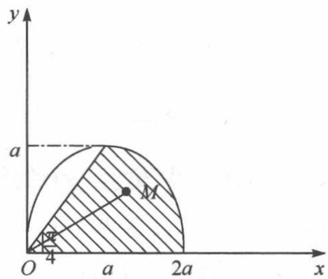

图 1-1

解　这是一个几何概型问题. 以 x 和 y 表示随机地向半圆内掷一点的坐标，θ 表示原点和该点的连线与 x 轴的夹角，在平面上建立 xOy 直角坐标系，如图 1-1 所示. 随机地向半圆内掷一点的所有结果构成样本空间

$$S=\{(x,y)\mid 0<x<2a,0<y<\sqrt{2ax-x^2}\},$$

事件 A 表示“原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$”

$$A=\left\{(x,y)\mid 0<x<2a,0<y<\sqrt{2ax-x^2},0<\theta<\frac{\pi}{4}\right\},$$

因此

$$P(A)=\frac{S_A}{S}=\frac{A\text{ 包含的面积}}{S\text{ 包含的面积}}=\frac{\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\pi a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}.$$

例 8　设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知所取两件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率是多少？

解　题中要求的“已知所取两件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率”应理解为求“已知所取两件产品中至少有一件是不合格品，则两件均为不合格品的概率”. 设 A=“所取两件产品中至少有一件是不合格品”，B=“两件均为不合格品”；则由题意，

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{3},\quad P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15},$$

从而 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)}{P(A)}=\dfrac{2}{15}\div\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{5}.$