现代数学基础

56 数学分析中的问题和反例

汪林

高等教育出版社

现代数学基础

56

数学分析中的问题和反例

■ 汪 林

SHUXUE FENX JI HE FANLI

高等教育出版社·北京

内容简介

本书汇集了“数学分析”方面的问题和反例500多个。全书共八章，内容有数列、函数微分、积分、级数、一致收敛、多元函数、重积分与参变量积分。每一章分为三部分：第一部分提纲挈领地给出了该章的基本概念和主要结果；第二部分是问题，包括解法；第三部分是反例。

本书所选的问题和反例比较典型，难度适中，构思新颖，解法精巧，富有启发性。书中不少问题和反例直接选自国内外有关学者所做的工作。本书对正确理解“数学分析”的基本概念，掌握“数学分析”的基本理论和技巧很有好处。

本书可供大学、大专数学系师生、数学工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析中的问题和反例 / 汪林编著 . -- 北京：高等教育出版社，2015. 11
（现代数学基础）
ISBN 978-7-04-043913-7

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①汪… Ⅲ. ①数学分析 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ① O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 237771 号

策划编辑 赵天夫　责任编辑 赵天夫　封面设计 赵 阳　版式设计 张 杰
责任校对 高 歌　责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 山东鸿君杰文化发展有限公司
开　　本 787mm × 1092mm 1/16
印　　张 24.5
字　　数 510 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2015 年 11 月第 1 版
印　　次 2015 年 11 月第 1 次印刷
定　　价 59.00 元

物 料 号 43913-00

前　　言

本书汇集了“数学分析”方面的问题和反例 500 多个. 全书共八章, 内容有数列、函数、微分、积分、级数、一致收敛、多元函数、重积分与参变量积分. 每一章分为三部分: 第一部分提纲挈领地给出了该章的基本概念和主要结果; 第二部分是问题, 包括解法; 第三部分是反例.

本书所选的问题和反例比较典型, 难度适中, 构思新颖, 解法精巧, 富有启发性. 书中不少问题和反例直接选自国内外有关学者所做的工作. 本书对正确理解“数学分析”的基本概念, 掌握“数学分析”的基本理论和技巧很有好处.

本书可供大学、大专数学系师生、数学工作者参考.

由于编者水平所限, 因此一定有很多不当或错误之处, 敬请读者批评指正.

汪　林

2015 年 1 月于昆明

目　录

第一章 数 列

基本概念和主要结果

为了本章及后面各章的需要, 我们把有关集合论的一些基础知识陈述如下:

设 A 是某些对象的任一集合 (简称集), 若 a 是 A 的元素 (简称元), 则记为 $a \in A$. 若 a 不是 A 的元, 则记为 $a \notin A$. 设 $p(x)$ 是某一与 x 有关的条件, 所有符合这个条件的事物 x 所组成之集, 用 $\{x : p(x)\}$ 来表示. 不含任何元的集称为**空集**, 用 $\emptyset$ 来表示. 若集 A 的一切元都是集 B 的元, 则称 A 是 B 的**子集**, 或称 A **包含于** B, 也叫作 B **包含** A, 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 若 $A \subset B$ 并且 $B \subset A$, 则称 A 与 B **相等**, 记作 $A = B$.

设 A, B 是两个集, 由集 A 同集 B 的一切元所组成之集称为 A 与 B 的**并** (或**并集**), 记作 $A \cup B$. 所有既属于 A 又属于 B 的元组成之集称为 A 与 B 之**交** (或**交集**), 记作 $A \cap B$. 即

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

若 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 与 B **不相交**.

自然, 并与交的定义可以推广到一般的情形:

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \text{ 有 } \alpha \in I \text{ 使 } x \in A_\alpha\},$$
$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \text{ 对一切 } \alpha \in I \text{ 有 } x \in A_\alpha\},$$

其中 α 是集的指标, 它在某个固定的指标集 I 中变化.

由集 A 中不属于 B 的那些元的全体所组成之集称为 A 与 B 之**差**, 记作 $A \setminus B$, 即

$$A \backslash B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

若 $S \supset B$, 则称差 $S \setminus B$ 为 B **关于**S **的补集**. 若包含集 S 已经清楚地指明或由上下文能够理解时, 就简称 $S \setminus B$ 为 B **的补集**.

设 A 与 B 都是非空集, 一切可能的有序偶 (a,b)(其中 $a\in A, b\in B$) 所组成之集称为 A 与 B 的**直积**, 记为 $A\times B$. 类似于两个集的直积, 可以定义任意多个集的直积.

设 A,B 是两个非空集. 若依一定的法则 f, 对每个 $x\in A$, 在 B 中有一个确定的元 y 与之对应, 则称 f 是定义在 A 上而在 B 中取值的**映射** (通常称数集到数集的映射为**函数**), 记成 $f:A\to B$, 并将 x 与 y 的关系写成 $y=f(x)$. 我们称 A 为 f 的**定义域**, 称 $f(A)=\{f(x):x\in A\}$ 为 f 的**值域**.

设给定映射 $f:A\to B$ 而 $B=f(A)$, 则称 f 是由 A 到 B 上的**满射**. 如果对每个 $y\in B$, 仅有唯一的 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$, 则说 f 有**逆映射**f^{-1} (若 A,B 为数集, 则通常称 f^{-1} 为 f 的**反函数**). 当映射 $f:A\to B$ 有逆映射时, 就称 f 是**一一映射**, 并称 A 与 B 成**一一对应**. 当集 A 与 B 成一一对应时, 称它们互相**对等**. 我们把互相对等的集归于同一类, 不对等的集不属于同一类, 对这样的每类集予以一个记号, 称这个记号为这一类集中每个集的**势**或**基数**. 集 A 的势记为 $\overline{\overline{A}}$. 于是, 相互对等的集 A,B, 就具有相同的势, 即 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

若集 A 与 B 不对等, 但集 B 对等于集 A 的某个子集, 则称 A 的势**大于**B 的势, 或 B 的势**小于**A 的势, 记为 $\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$, 或 $\overline{\overline{B}}<\overline{\overline{A}}$.

我们用 N 代表正整数的全体, 若集 A 对等于 N, 则称 A 为**可数集**或**可列集**. 此时, 记 $\overline{\overline{A}}=\aleph$, 读作 "阿列夫零". 可以证明, 任何区间中的一切有理数所成之集是可数集; 任何区间中的一切代数数所成之集也是可数的.

若集 A 的势大于可数集的势, 则称它为**不可数集**或**不可列集**. 例如, 区间 $[0,1]$ 为不可数集. 对等于区间 $[0,1]$ 的任何集称为具有**连续统的势**的集. 若集 A 具有连续统的势, 则记为 $\overline{\overline{A}}=\aleph$, 读作 "阿列夫".

本书主要涉及 n 维欧氏空间 R^n 的子集, 前六章主要涉及 R^1 的子集.

任取 $a\in R^1$, 称含有 a 的任一开区间为 a 的一个**开邻域** (简称**邻域**). 设 $E\subset R^1, a\in E$, 若存在 a 的某个邻域 (α,β), 使得 $(\alpha,\beta)\subset E$, 则称 a 为 E 的**内点**.E 的一切内点所成之集叫作 E 的**内域**, 记为 E°. 若 $E=E^\circ$, 则称 E 为 R^1 中的开集.

设 $E\subset R^1, a\in R^1$. 若 a 的任一邻域均含有 E 的无穷多个点, 则称 a 为 E 的**聚点**. E 的一切聚点所成之集称为 E 的**导集**, 记成 E'. 称 $E\cup E'$ 为 E 的**闭包**, 记为 $\overline{E}$.E 的导集 E' 的一切聚点所成之集称为 E 的**二阶导集**, 并记为 E''. 高阶导集可以类似地定义. 称 $E\backslash E'$ 中的点为 E 的**孤立点**. 若 $E'\subset E$, 则称 E 为**闭集**. 若 $E=E'$, 则称 E 为**完备集**.

集 E 叫作有**上界** (**下界**) 的, 是指存在常数 $M(m)$, 使对一切 $x\in E$ 有 $x\leqslant M(x\geqslant m)$. E 的最小上界 (最大下界) 称为 E 的**上确界** (**下确界**), 记作

$$\sup E(\inf E).$$

既有上界又有下界的集称为**有界集**.

Weierstrass **聚点原理** 有界无穷集必有聚点.

若集 E 的闭包包含集 A, 则称 E 在 A 中**稠密**. 特别, 若集 E 在空间 R^1 中稠密, 则称它在 R^1 中**处处稠密**. 若集 E 的闭包不包含任何非空开集, 则称它在 R^1 中**无处稠密**或为**疏集**.

一个集叫作**第一纲集**, 是指它可表成可数个疏集的并集; 不是第一纲的集, 就称它为**第二纲集**.

直线上的任何非空开集 G 可表成 (并且是唯一的方法) 有限个或可数个两两不相交的开区间的并. 这些开区间称为 G 的**构成区间**. 直线上的任何非空闭集 F 是由整个数轴去掉有限个或可数个两两不相交的开区间而得到, 这些开区间称为 F 的**邻接区间**.

可表成可数个开集之交的任意集称为 G_δ **集**; 可表成可数个闭集之并的任意集称为 F_σ **集**.

所谓集 E 的一个**开覆盖**, 是指这样的一组开集 $\{G\alpha\}$, 这组开集的并集包含 E. 这时, 又称 $\{G\alpha\}$ 覆盖 E.

集 E 叫作**紧**的, 是指 E 的每个开覆盖含有它的有限子覆盖.

Heiene-Borel **有限覆盖定理** 有界闭集的任何开覆盖必有有限子覆盖.

所谓实数集 D 的一个 Dedekind **分割**, 就是将 D 中的元素分成两个子集 X 和 Y, 且满足下列条件:

(i) X 与 Y 都不空;

(ii) $X \cap Y = \emptyset$;

(iii) 每一个属于 X 的元小于 Y 中的所有的元. 称 X 为 D 的**前段**, Y 为 D 的**后段**, 且将 D 的分割记为 (X, Y).

Dedekind **分割原理** 全体实数 R^1 的任何一个分割 (X, Y), 只能要么 X 有最大数, Y 无最小数; 要么 X 无最大数, Y 有最小数. 即对 R^1 的任何一个分割 (X, Y), 必存在唯一的实数 $\alpha \in R^1$, 使对任意的 $x \in X, y \in Y$ 有

$$x \leqslant \alpha < y \quad 或 \quad x < \alpha \leqslant y.$$

R^1 的子集 E 称为**零测度集**, 如果 E 能够包含于有限个或可数个开区间之内, 而这些开区间的总长度可以任意小. 由这个定义立即推知, 零测度集的任何子集也是一个零测度集. 有限个或可数个零测度集的并也是一个零测度集; 特别, R^1 中任何有限集或可数集都是零测度集.

设有一个关于集 E 上的点 x 的命题 $p(x)$. 如果有 E 的零测度子集 A, 使 $p(x)$ 在 $E \backslash A$ 上恒成立, 则称 $p(x)$ 在 E 上**几乎处处成立**.

有关集和测度的进一步材料, 读者可参看 [4],[12] 或 [18].

我们再简要地介绍有关数列的一些基本概念和性质如下:

所谓**实数列** (简称**数列**), 是指定义在正整数集 N 上的函数 f. 若对 $n \in N$, 有 $f(n) = x_n$, 习惯上以符号 $\{x_n\}$ 表示数列 f, 有时也表示为 $x_1, x_2, \cdots$. f 的值 x_n 叫作

数列的**项**.

数列 $\{x_n\}$ 称以 x 为**极限**, 是指对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $n_0\in N$, 使当 $n>n_0$ 时

$$|x_n-x|<\varepsilon.$$

这时称 $\{x_n\}$ **收敛于** x, 记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x \quad 或 \quad x_n\to x \quad (n\to\infty).$$

若 $\{x_n\}$ 不是收敛的, 则说它是**发散**的.

数列的极限运算满足算术运算法则.

极限的比较法则 设 $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=c$, 又

$$x_n\leqslant z_n\leqslant y_n \quad (n=1,2,\cdots),$$

则

$$\lim_{n\to\infty}z_n=c.$$

数列 $\{x_n\}$ 称为 Cauchy **数列**, 是指对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $n_0\in N$, 使 $m,n>n_0$ 时

$$|x_m-x_n|<\varepsilon.$$

Cauchy **收敛准则** 数列 $\{x_n\}$ 收敛当且仅当它是 Cauchy 数列.

x 称为数列 $\{x_n\}$ 的**极限点**, 是指存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 使

$$x=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}.$$

值域有界的数列叫作**有界数列**.

Bolzano-Weierstrass **定理** 有界数列必有收敛子列.

数列 $\{x_n\}$ 叫作**单调增加** (**或递增**) 的, 若对 $n=1,2,\cdots$, 有 $x_n\leqslant x_{n+1}$; 叫作**单调减少** (**或递减**) 的, 若对 $n=1,2,\cdots$, 有 $x_n\geqslant x_{n+1}$. 单调增加数列和单调减少数列统称为**单调数列**.

单调有界原理 递增 (递减) 有上界 (下界) 的数列必定收敛.

Cantor **区间套定理** 设 $[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$ 是一列闭区间. 又设

(i) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,

则存在唯一数 $x_0\in[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$.

设 $\{x_n\}$ 是一数列, $a_n=\sup_{k\geqslant n}\{x_k\}(b_n=\inf_{k\geqslant n}\{x_k\})$, 于是 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots(b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots, a_n\geqslant b_n)$. 称 $\lim_{n\to\infty}a_n(\lim_{n\to\infty}b_n)$ 为数列 $\{x_n\}$ 的**上** (**下**) **极限**, 记为 $\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n(\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n)$.

显然, $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在当且仅当 $\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n$ 与 $\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n$ 存在且相等; 此时

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n.$$

问　题

1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正数. 证明

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}. \tag{1}$$

这是著名的 n 个正数的算术平均值不小于几何平均值. 这个不等式有着广泛的应用, 我们给出三种证明, 它们分别属于 Diananda[38], Kong-Ming Chong[55] 和 Akerberg[21].

证法 1 令

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$
$$G_n = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}},$$

其中 a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 全为正数.

对 $n = 2$, $A_2 \geqslant G_2$ 显然成立.

设 $n = m$ 成立, 则 $A_m \geqslant G_m$. 于是,

$$\begin{aligned} A &= \frac{a_{m+1} + (m-1)A_{m+1}}{m} \geqslant (a_{m+1} A_{m+1}^{m-1})^{\frac{1}{m}} \\ &= G. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} A_{m+1} &= \frac{A_m + A}{2} \geqslant (A_m A)^{\frac{1}{2}} \geqslant (G_m G)^{\frac{1}{2}} \\ &= (G_{m+1}^{m+1} \quad A_{m+1}^{m-1})^{\frac{m}{2}}, \end{aligned}$$

从而 $A_{m+1} \geqslant G_{m+1}$, 故 (1) 成立.

证法 2 显然, (1) 中等号成立, 当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. 令

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

不妨设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 且 $a_1 < a_n$, 则显然有

$$a_1 < A_n < a_n.$$

因而

$$A_n(a_1 + a_n - A_n) - a_1 a_n = (a_1 - A_n)(A_n - a_n) > 0. \tag{2}$$

$n = 2$ 时不等式 (1) 显然成立.

设 $n - 1$ 时 (1) 成立.

由于 $a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}$ 和 $a_1 + a_n - A_n$ 的算术平均值是 A_n, 即

$$\frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_1 + a_n - A_n}{n-1} = A_n,$$

故由归纳法假设得

$$A_n^{n-1} \geqslant a_2 a_3 \cdots a_{n-1} \quad (a_1 + a_n - A_n).$$

由 (2) 得

$$\begin{aligned} A_n^n &\geqslant A_n(a_1 + a_n - A_n) a_2 a_3 \cdots a_{n-1} \\ &\geqslant a_1 a_n a_2 a_3 \cdots a_{n-1}, \end{aligned}$$

即

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

证法 3 设 α 为一正数, n 是大于 1 的正整数. 容易验证

$$(\alpha - 1)[n - (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1})] \leqslant 0,$$

或

$$\alpha(n - \alpha^{n-1}) \leqslant n - 1, \tag{3}$$

且不等式除 $\alpha = 1$ 外是严格的. 令

$$\alpha = \left(\frac{a_1}{\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}} \right)^{\frac{1}{n-1}},$$

则由 (3) 得到

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^n \geqslant a_1 \left(\frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n-1} \right)^{n-1}.$$

逐次应用这一公式, 得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^n &\geqslant a_1 \left(\frac{a_2 + \cdots + a_n}{n-1} \right)^{n-1} \\ &\geqslant a_1 a_2 \left(\frac{a_3 + \cdots + a_n}{n-2} \right)^{n-2} \\ &\geqslant \cdots \\ &\geqslant a_1 a_2 \cdots a_n, \end{aligned}$$

即

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

2. 证明 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

证 注意, 对 $x \in R^1$ 皆有

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k x + b_k)^2 \geqslant 0.$$

令 $A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$, 于是

$$Ax^2 + 2Bx + C \geqslant 0.$$

不妨设 $A > 0$, 令 $x = -\frac{B}{A}$, 则有

$$B^2 - AC \leqslant 0,$$

此即 Cauchy-Schwarz 不等式.

3. 证明 Minkowski 不等式:

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证 注意

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

据 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

得到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^2 &\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2,\end{aligned}$$

此即 Minkowski 不等式.

4. 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1.$$

证 因为

$$\begin{aligned}\frac{1+1+\cdots+1}{n}&\leqslant\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}\\&\leqslant\frac{\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n},\end{aligned}$$

所以

$$1\leqslant\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}\leqslant\sqrt[n]{n}.$$

容易证明, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. 因此, 由比较法则即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1.$$

5. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为 m 个正数. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

证 令 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$, 则有不等式

$$A<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant A\cdot\sqrt[n]{m}.$$

因 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

6. 设 $a_n>0$, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

证 因 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$, 故存在正整数 n_0, 当 $n>n_0$ 时, $\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$, 因而 $a_n>a_{n+1}$; 又, $a_n>0$, 故数列 $\{a_n\}$ 单调递减且有下界, 因而收敛, 令

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

由于 $a_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot a_{n+1}$, 所以当 $n\to\infty$ 时两边取极限, 即得 $a=0$.

7. 设 $x_0=1,x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}\ (n=0,1,2,\cdots)$.
证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求出其极限.

证 显然, 对任意正整数 n, $\frac{1}{2}\leqslant x_n\leqslant 1$. 其次, 对任意正整数 n,k, 有

$$\begin{aligned}x_{n+1+k}-x_{n+1}&=\frac{1}{1+x_{n+k}}-\frac{1}{1+x_n}\\&=\frac{x_n-x_{n+k}}{(1+x_{n+k})(1+x_n)},\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}|x_{n+1+k}-x_{n+1}|&=\frac{|x_{n+k}-x_n|}{(1+x_{n+k})(1+x_n)}\\&\leqslant\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2}|x_{n+k}-x_n|=\frac{4}{9}|x_{n+k}-x_n|\\&\leqslant\left(\frac{4}{9}\right)^2|x_{n-1+k}-x_{n-1}|\leqslant\cdots\\&\leqslant\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}|x_k-x_0|\leqslant 2\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

因此, $\{x_n\}$ 为一 Cauchy 数列, 故收敛. 令

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,$$

并在 $x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}$ 的两端取极限, 即得 $a=\frac{\sqrt{5}-2}{2}$.

8. 给定两正数 a_1 与 $b_1(a_1>b_1)$, 做出其等差中项 $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$ 与等比中项 $b_2=\sqrt{a_1b_1}$, 一般地, 令

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\quad 与\quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}.$$

证明 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim_{n\to\infty}b_n$ 皆存在且相等.

证　由题设推知

$$\begin{aligned}&a_1>\frac{a_1+b_1}{2}=a_2>b_2=\sqrt{a_1b_1}>b_1,\\&a_1>a_2>\frac{a_2+b_2}{2}=a_3>b_3=\sqrt{a_2b_2}>b_2>b_1,\end{aligned}$$

用数学归纳法可证

$$\begin{aligned}a_1>a_2>\cdots>a_n>\frac{a_n+b_n}{2}&=a_{n+1}\\>b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}&>\cdots>b_2>b_1.\end{aligned}$$

即数列 $\{a_n\}$ 单调减少且有下界 $b_1,\{b_n\}$ 单调增加且有上界 a_1, 故它们都有极限. 令

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,\quad\lim_{n\to\infty}b_n=b,$$

并在等式 $2a_{n+1}=a_n+b_n$ 的两端取极限, 得 $a=b$.

9. 设 $a>0,b>0,a_1=\frac{a+\frac{b}{a}}{2}$, 一般地, $a_{n+1}=\frac{a_n+\frac{b}{a_n}}{2}$. 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛并求出其极限.

证 由题设知 $a_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$. 又,

$$a_{n+1} = \frac{\left(\sqrt{a_n} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a_n}}\right)^2}{2} + \sqrt{b} \geqslant \sqrt{b} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

于是,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{\frac{b}{a_n} - a_n}{2} \leqslant 0.$$

因此, $\{a_n\}$ 是单调减少的有界数列, 故必收敛. 设

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \geqslant \sqrt{b} > 0,$$

并在等式 $a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{b}{a_n}}{2}$ 的两端取极限, 即得 $l = \sqrt{b}$, 故

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{b}.$$

10. 给定实数 a_0, a_1, 并令

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2} \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

证明 $\{a_n\}$ 收敛, 并求出其极限.

证 因

$$a_2 = \frac{a_0 + a_1}{2}, \quad a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad a_4 = \frac{a_2 + a_3}{2}, \quad \cdots,$$

故

$$a_2 - a_1 = \frac{a_0 - a_1}{2}, \quad a_3 - a_2 = \frac{a_1 - a_2}{2},$$
$$a_4 - a_3 = \frac{a_2 - a_3}{2}, \quad \cdots.$$

由此得到

$$a_2 - a_1 = -\frac{a_1 - a_0}{2}, \quad a_3 - a_2 = \frac{a_1 - a_2}{2} = \frac{a_1 - a_0}{2^2},$$
$$a_4 - a_3 = -\frac{a_1 - a_0}{2^3}, \quad \cdots, \quad a_n - a_{n-1} = (-1)^{n-1}\frac{a_1 - a_0}{2^{n-1}}.$$

从而

$$\begin{aligned} a_n - a_1 &= -\frac{a_1 - a_0}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \cdots + (-1)^{n-2}\frac{1}{2^{n-2}}\right) \\ &= \frac{a_1 - a_0}{3}\left\{(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right\}, \end{aligned}$$

于是

$$a_n = \frac{2a_1 + a_0}{3} + (-1)^{n-1}\frac{a_1 - a_0}{3 \cdot 2^{n-1}}.$$

因此, $\{a_n\}$ 收敛且

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a_0 + 2a_1}{3}.$$

11. 设 $a_1>0, a_{n+1}=\frac{3(1+a_n)}{3+a_n}$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\{a_n\}$ 收敛, 并求出其极限.

证　若 $a_1=\sqrt{3}$, 则 $a_n=\sqrt{3}$ $(n=1,2,\cdots)$, 故

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{3}.$$

现在考虑辅助函数

$$f(x)=\frac{3(1+x)}{3+x}.$$

显然有 $a_{n+1}=f(a_n)(n=1,2,\cdots)$. f 在 $x>0$ 处可微, 且

$$f'(x)=\frac{6}{(3+x)^2}>0,$$

故 f 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增 (关于利用导数来判断函数的单调性, 请读者参看第三章).

若 $a_1<\sqrt{3}$, 则

$$a_2=f(a_1)<f(\sqrt{3})=\frac{3(1+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

由数学归纳法立即可得 $a_n<\sqrt{3}$ $(n=1,2,\cdots)$. 再由

$$a_{n+1}-a_n=\frac{3(1+a_n)-(3+a_n)a_n}{3+a_n}=\frac{3-a_n^2}{3+a_n}$$

就可以断定 $\{a_n\}$ 是递增的有界数列.

若 $a_1>\sqrt{3}$, 则

$$a_2=f(a_1)>f(\sqrt{3})=\sqrt{3}.$$

用类似于上面的做法得到 $\{a_n\}$ 是递减的有界数列.

综上所述, $\{a_n\}$ 收敛, 令

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a,$$

并在 $a_{n+1}=\frac{3(1+a_n)}{3+a_n}$ 两端取极限, 即得 $a=\sqrt{3}$.

12. 设 $x_1>0, x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a}, a>0$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求出其极限.

证　由题设可知 $x_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$.

当 $x>y>0$ 时,

$$\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}-\frac{y(y^2+3a)}{3y^2+a}=\frac{(x-y)[3(xy-a)^2+a(x-y)^2]}{(3x^2+a)(3y^2+a)}>0,$$

故函数 $f(x)=\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是递增的. 于是, 若 $0<x_1<\sqrt{a}$, 则

$$0<x_2<\frac{\sqrt{a}(a+3a)}{3a+a}=\sqrt{a},\quad \cdots,\quad 0<x_{n+1}<\sqrt{a}.$$