



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

江苏省精品教材

江苏省优秀课件一等奖

电磁场与电磁波

(第四版)

郭辉萍 刘学观 编著

DIANCHANGYU DIANCIBO



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

电磁场与电磁波

(第四版)

郭辉萍 刘学观 编著

江苏省精品教材

江苏省优秀课件一等奖

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书从矢量分析与场论入手,着重讨论了电磁基本理论和电磁工程基础两部分内容。电磁基本理论部分主要包括静电场和恒定电场、边值问题的解法、恒定电流的磁场、时变电磁场以及电磁波的基本概念、平面电磁波在不同媒质中的传播特性等,其中对边界条件、电磁能流、极化、色散与群速等基本概念做了详细分析;电磁工程基础部分主要包括电磁波的导引、辐射以及无线信道、电磁干扰与电磁兼容等基本知识,其中着重对传输线、波导、天线基础知识以及电磁兼容做了较深入的介绍。每章都附有习题,书后附有部分习题的参考答案。

本版修订既保持了上一版简洁的特点,又进一步加强了系统性,突出了应用性,并特别注意与无线通信、高速电路设计、电磁兼容认证等知识的关联,使教材更符合时代特色。书中对许多专业词汇给出了英文注解。

本书可作为高等学校电子信息类各专业本科教材,也可作为电子工程、通信工程、集成电路设计以及其他相关专业的技术人员的参考书。

本书配有多媒体课件及学习指导书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/郭辉萍,刘学观编著. —4版.

—西安:西安电子科技大学出版社,2015.7

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

ISBN 978-7-5606-3757-0

I. ①电… II. ①郭… ②刘… III. ①电磁场—高等学校—教材 ②电磁波—高等学校—教材 IV. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 153729 号

策 划 马乐惠

责任编辑 马乐惠

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西华沐印刷科技有限责任公司

版 次 2015年7月第4版 2015年7月第10次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 17

字 数 395千字

印 数 53 001~56 000册

定 价 35.00元(含光盘)

ISBN 978-7-5606-3757-0/O

XDUP 4049004-10

* * * 如有印装问题可调换 * * *

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

序

第三次全国教育工作会议以来,我国高等教育得到空前规模的发展。经过高校布局和结构的调整,各个学校的新专业均有所增加,招生规模也迅速扩大。为了适应社会对“大专业、宽口径”人才的需求,各学校对专业进行了调整和合并,拓宽专业面,相应的教学计划、大纲也都有了较大的变化。特别是进入 21 世纪以来,信息产业发展迅速,技术更新加快。面对这样的发展形势,原有的计算机、信息工程两个专业的传统教材已很难适应高等教育的需要,作为教学改革的重要组成部分,教材的更新和建设迫在眉睫。为此,西安电子科技大学出版社聘请南京邮电大学、西安邮电大学、重庆邮电大学、吉林大学、杭州电子科技大学、桂林电子科技大学、北京信息科技大学、深圳大学、解放军电子工程学院等 10 余所国内电子信息类专业知名院校长期在教学科研第一线工作的专家教授,组成了高等学校计算机、信息工程类专业系列教材编审专家委员会,并且面向全国进行系列教材编写招标。该委员会依据教育部有关文件及规定,对这两大专业的教学计划和课程大纲、目前本科教育的发展变化、相应系列教材应具有的特色和定位以及如何适应各类院校的教学需求等进行了反复研究、充分讨论,并对投标教材进行了认真评审,筛选并确定了高等学校计算机、信息工程类专业系列教材的作者及审稿人。

审定并组织出版这套教材的基本指导思想是力求精品、力求创新、好中选优、以质取胜。教材内容要反映 21 世纪信息科学技术的发展,体现专业课内容更新快的要求;编写上要具有一定的弹性和可调性,以适合多数学校使用;体系上要有所创新,突出工程技术型人才培养的特点,面向国民经济对工程技术人才的需求,强调培养学生较系统地掌握本学科专业必需的基础知识和基本理论,有较强的本专业的基本技能、方法和相关知识,培养学生从事实际工程的研发能力。在作者的遴选上,强调作者应在教学、科研第一线长期工作,有较高的学术水平和丰富的教材编写经验;教材在体系和篇幅上符合各学校的教学计划要求。

相信这套精心策划、精心编审、精心出版的系列教材会成为精品教材,得到各院校的认可,对于新世纪高等学校教学改革和教材建设起到积极的推动作用。

系列教材编委会

高等学校计算机、信息工程类专业

规划教材编审专家委员会

主任：杨震（南京邮电大学校长、教授）

副主任：张德民（重庆邮电大学通信与信息工程学院院长、教授）

韩俊刚（西安邮电大学计算机学院教授）

计算机组

组长：韩俊刚（兼）

成员：（按姓氏笔画排列）

王小民（深圳大学信息工程学院教授）

王小华（杭州电子科技大学计算机学院教授）

孙力娟（南京邮电大学计算机学院院长、教授）

李秉智（重庆邮电大学计算机学院教授）

孟庆昌（北京信息科技大学教授）

周娅（桂林电子科技大学计算机学院教授）

张长海（吉林大学计算机科学与技术学院教授）

信息工程组

组长：张德民（兼）

成员：（按姓氏笔画排列）

王晖（深圳大学信息工程学院教授）

胡建萍（杭州电子科技大学信息工程学院院长、教授）

徐祎（解放军电子工程学院电子技术教研室主任、副教授）

唐宁（桂林电子科技大学通信与信息工程学院副教授）

章坚武（杭州电子科技大学通信学院副院长、教授）

康健（吉林大学通信工程学院副院长、教授）

蒋国平（南京邮电大学副校长、教授）

总策划：梁家新

策划：马乐惠 云立实 马武装 马晓娟

电子教案：马武装

前 言

“路”与“场”是电子信息类专业学生必须掌握的两个重要知识点，而电磁场与电磁波是建立“场”观念的重要基础课程。本书是按照教育部高等学校电子信息与电气学科教学指导委员会制订的“电磁场与电磁波”课程教学基本要求而编写的、适合本科层次各相关专业的教学用书。

本书第一版于2003年出版，2006年底入选教育部高等教育“十一五”国家级规划教材，并于2007年出版了第二版。2008年，教育部推出了使用信息技术工具改造课程项目，本课程教学组据此提出了详细的改造计划，得到了有关专家和同行的认可，最终成为全国首批18门使用信息技术改造课程项目之一。该项目得到了包括北京邮电大学、南京航空航天大学等15所高校专业教师的大力支持与配合。本书编写组成员将信息技术工具与课程内容深度结合，进一步完善了课程教学体系，并将教学改革的最新成果融入到教材、课件、网站中，于2011年完成了教材(第三版)、教学指导书和多媒体课件的全部出版工作，2011年分别获得了江苏省精品教材和江苏省优秀课件一等奖；“教材、课件、学习指导”全套教材于2014年成功入选教育部高等教育“十二五”国家级规划教材。本次修订在前面三版的基础上进行细加工，使条理更加清晰、内容更加连贯。

全书共分10章。第1章矢量分析与场论，介绍了标量场的梯度，矢量场的散度与旋度，为后续内容打下数学基础；第2~6章为电磁基本理论，主要讨论了静电场、恒定磁场、边值问题的解法、时变电磁场的基本规律以及平面电磁波在不同媒质中的传播特性；第7~10章为电磁工程基础部分，第7章主要叙述了传输线的基本特性、传输线的等效、史密斯圆图、同轴线、微带传输线及传输线的匹配与滤波等，第8章讨论了波导传输系统及谐振器的工作原理，第9章讨论了电磁波的辐射与接收，主要叙述电磁波辐射的基本原理以及天线和天线阵的基本知识，第10章介绍了无线信道、电磁干扰与电磁兼容的基本知识，为电磁工程应用打下基础。上述内容既有联系又有相对独立性，使用时可根据不同的教学要求进行灵活取舍。

本书第1~6章及第9章由郭辉萍执笔，绪论、第7、8、10章由刘学观执笔，全书由郭辉萍统稿。

本书配备了相应的多媒体课件，并且对诸如电磁波动、行波、驻波、极化、天线的方向图等一些抽象的电磁概念给出了动画演示。课件采用Authorware和PowerPoint对各动画、数学公式、原理图、文字等进行合理的编排，为学生提供了一个图文并茂、生动有趣的学习环境。

另外，本书还配备有指导书，将每章的重点、难点、典型例题和习题呈现给读者，以方便课后学习。

以“教材、课件、学习指导”三位一体构成的教育部“‘十二五’普通高等教育本科国家级规划教材”(成套)，有以下特色与创新：

(1) 使用信息技术工具改造教材、课件。

本教材的建设得到了教育部专项教改项目的支持,项目利用 Mathematica/Matlab 等信息技术工具编制计算分析软件和演示工程,将难理解的知识点形象化、图形化,进一步丰富了教材、教学指导书、教学课件和课程网站资源。

(2) 跟进学科发展,突出应用。

在满足无线通信、电磁兼容、信号完整性等工程应用需求的基础上,进一步在电耦合、磁耦合、电磁仿真以及天线技术等方面做修订,以突出应用。

(3) 教材持续更新,资源完善。

本教材已改版两次,连续印刷 9 次,销售累计出版近 6 万册,得到了全国许多高校专家和师生的认可。另外,该教材还配有多媒体课件,对诸如电磁波动、行波、驻波、极化、天线的方向图等一些抽象的电磁概念给出了动画演示。本课件采用 Authorware 和 Power-Point 对各动画、数学公式、原理图、文字等进行了合理的编排,为学生提供了一个图文并茂、生动有趣的学习环境,便于读者对知识的理解和掌握。

本书可供高等学校电子信息类学科本科有关专业作为教材使用,亦可用作相关学科及有关专业技术人员的继续教育参考书。

十多年来,该套教材的持续改进,得到了教育部高教司、教育部高等学校教学评估中心领导和专家的关心与支持;得到了包括国家教学名师、西安电子科技大学前校长梁昌洪教授,国家教学名师、华北电力大学崔翔教授,长江特聘教授、上海交通大学毛军发教授,长江特聘教授、东南大学崔铁军教授,苏州大学周朝栋教授等国内电磁领域著名专家的用心指导;也得到了包括中国科技大学王刚教授,北京邮电大学王亚峰教授,南京理工大学陈如山教授,华东师范大学高建军教授,南京航空航天大学刘少斌教授,南京邮电大学徐立勤教授,中国传媒大学逯贵祯教授,江苏科技大学田雨波教授,山东科技大学郭银景教授,河南师范大学张瑜教授,青岛科技大学魏崇毓教授,东北林业大学赵伟教授,杭州电子科技大学项铁铭副教授,太原理工大学李鸿鹰老师,江南大学黄芳老师等国内合作高校教师的大力支持;还得到了苏州大学教务部和电子信息学院有关领导和同志的关心和支持,李富华副教授提出了许多建设性意见,杨歆汨副教授、蔡文锋老师、曹洪龙老师提供了许多帮助,在此一并表示感谢。由于作者水平有限,书中难免还存在一些缺点和错误,敬请广大读者批评指正。

郭辉萍 刘学观
2015 年 5 月

第一版前言

电磁理论一直是电子信息类学科本科教学的基础课程，这与电磁理论在现代信息社会的地位密切相关。19世纪电磁基础理论基本形成。20世纪在电报、广播、电视、卫星通信、移动通信、雷达、导航、无线网络及电气控制等领域得到了广泛应用。21世纪，随着个人无线通信的发展，人们将更加依赖电磁波，处处感到电磁波的重要。同时人们也更加关注电磁波对人类的影响以及电子设备间的相互影响。

电磁理论课程体系主要涉及电磁基本理论及电磁工程两个方面，电磁基本理论主要研究电磁场的源与场的关系以及电磁波在空间传播的基本规律，电磁工程主要讨论电磁波的产生、辐射、传播、电磁干扰、电磁兼容及电磁理论在各方面的应用等。

随着高等教育改革的不断深入以及人才培养模式的转变，学生对知识体系的完整性需求越来越大，因此本书在体系结构上突出基础性和知识体系的完整性，尽量避开繁杂的推导，注意理论与实际应用的结合，使读者易于接受。另外，在教材中给出了许多专业词汇的英文注解。

本书可供高等学校电子信息类学科本科有关各专业用作教材，亦可作为相关学科及有关专业技术人员的参考书。

本教材计划教学学时数为72学时。全书共八章，第1章为矢量分析与场论，介绍了标量场的梯度，矢量场的散度与旋度，为后续内容打下数学基础；第2~4章为电磁基本理论，主要讨论了静电场、恒定磁场、时变电磁场的基本规律以及平面电磁波在不同媒质中的传播特性；第5~8章为电磁工程基础部分，第5章主要叙述了TEM波传输线的基本特性、传输线的等效、史密斯圆图、同轴线、微带传输线及传输线的匹配与滤波等，第6章讨论了波导传输系统及谐振器的工作原理，第7章讨论了电磁波的辐射与接收，主要叙述电磁波辐射的基本原理以及天线的基本知识，第8章介绍了无线信道、电磁干扰与电磁兼容的基本知识，为电磁工程应用打下基础。上述内容既有联系又相对独立，使用时可根据不同的教学要求进行灵活取舍。

本书由郭辉萍和刘学观合编，郭辉萍编写了第1~4章及第7章，刘学观编写了第5、6、8章，周朝栋教授审阅了全书，徐德源编辑和马乐惠编辑对本书提出了许多宝贵的意见，在此表示诚挚的谢意。在本书的成稿过程中得到了苏州大学电子信息学院领导和同志的关心和支持，蔡文锋老师提供了许多帮助，在此一并表示感谢。同时作者对西安电子科技大学出版社的大力支持表示感谢。

由于作者水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，敬请广大读者批评指正。

作者
2003年6月

目 录

第 1 章 矢量分析与场论	1
1.1 矢量及其代数运算	1
1.2 圆柱坐标系和球坐标系	3
1.3 矢量场	8
1.4 标量场	14
1.5 亥姆霍兹定理	17
习题	18
第 2 章 静电场和恒定电场	22
2.1 电场强度与电位函数	22
2.2 真空中静电场的基本方程	28
2.3 电介质的极化及介质中的场方程	31
2.4 导体间的电容及电耦合	33
2.5 静电场的边界条件	36
2.6 恒定电场	41
习题	48
第 3 章 边值问题的解法	52
3.1 边值问题的提法	52
3.2 唯一性定理	53
3.3 镜像法	54
3.4 分离变量法	60
3.5 有限差分法	70
习题	75
第 4 章 恒定电流的磁场	79
4.1 真空中恒定磁场的基本方程	79
4.2 磁介质的磁化、介质中的场方程	86
4.3 恒定磁场的边界条件	88
4.4 自感、互感与磁耦合	90
习题	93
第 5 章 时变电磁场与电磁波	96
5.1 法拉第电磁感应定律	96
5.2 位移电流	97
5.3 麦克斯韦方程及边界条件	99
5.4 坡印廷定理与坡印廷矢量	102

5.5	时谐电磁场	106
5.6	波动方程与电磁波	108
	习题	110
第 6 章	平面电磁波	113
6.1	无耗媒质中的均匀平面波	113
6.2	导电媒质中的均匀平面波	117
6.3	良导体中的均匀平面波、趋肤效应	121
6.4	电磁波的极化	122
6.5	电磁波的色散与群速	126
6.6	均匀平面波对平面边界的垂直入射	127
6.7	均匀平面波对平面边界的斜入射	131
	习题	137
第 7 章	传输线	141
7.1	均匀传输线的分析	141
7.2	传输线的等效	146
7.3	史密斯圆图及其应用	150
7.4	传输线的效率、损耗和功率容量	153
7.5	双导线与同轴线	154
7.6	微带传输线	156
7.7	传输线的匹配与滤波	160
	习题	165
* 第 8 章	波导与谐振器	167
8.1	矩形波导	167
8.2	圆波导	176
8.3	波导的激励与耦合	179
8.4	谐振器	180
	习题	185
* 第 9 章	电磁波的辐射与接收	187
9.1	位函数的波动方程及滞后位	187
9.2	基本振子的辐射	189
9.3	天线的电参数	192
9.4	接收天线理论	201
9.5	对称振子天线和天线阵	206
	习题	211
第 10 章	无线信道、电磁干扰与电磁兼容	214
10.1	电磁波谱	214
10.2	无线信道的基本特性	216

10.3	视距传播信道	219
10.4	短波电离层反射信道	222
10.5	地表面波传播信道	226
10.6	不均匀媒质散射信道	228
10.7	电磁干扰	228
10.8	电磁兼容	232
习题		239
附录		241
附录 1	矢量及其运算	241
附录 2	史密斯圆图	243
附录 3	标准矩形波导参数和型号对照表	244
附录 4	量和单位	245
附录 5	使用信息技术工具改造课程演示程序清单	247
部分习题参考答案		250
参考文献		260

第1章 矢量分析与场论

在实数域内，只有大小的量称之为标量，既有大小又有方向特性的量称之为矢量。无论是标量还是矢量，一旦被赋予物理单位，则成为一个具有物理意义的量，即所谓的物理量。物理量数值的无穷集合称为场。如果这个物理量是标量，就称其为标量场；如果它是矢量，就称这个场为矢量场。场的一个重要属性是它占有一个空间，而且在该空间域内，除有限个点或表面外它是处处连续的。如果场中各处物理量不随时间变化，则称该场为静态场，不然，则称它为动态场或时变场。

本章从定义标量和矢量出发，讨论矢量在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系三种坐标系中的表示法及其代数运算和相互关系；然后介绍矢量及标量的微分和积分及其性质；最后引入亥姆霍兹定理，它总结了源与所产生的场的一般关系。

1.1 矢量及其代数运算

1.1.1 标量和矢量

电磁场中遇到的绝大多数物理量，能够容易地区分为标量(Scalar)和矢量(Vector)。一个仅用大小就能够完整描述的物理量称为标量，例如，电压、温度、时间、质量、电荷等。实际上，所有实数都是标量。一个有大小和方向的物理量称为矢量，电场、磁场、力、速度、力矩等都是矢量。例如，矢量 \mathbf{A} 可以表示成：

$$\mathbf{A} = A\mathbf{a} \quad (1-1-1)$$

其中， A 是矢量 \mathbf{A} 的大小； \mathbf{a} 代表矢量 \mathbf{A} 的方向， $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{A}}{A}$ ，其大小等于 1。

一个大小为零的矢量称为空矢(Null Vector)或零矢(Zero Vector)，一个大小为 1 的矢量称为单位矢量(Unit Vector)。在直角坐标系中，用单位矢量 \mathbf{a}_x 、 \mathbf{a}_y 、 \mathbf{a}_z 表征矢量分别沿 x 、 y 、 z 轴分量的方向。

空间中的一点 $P(X, Y, Z)$ 能够由它在三个相互垂直的轴线上的投影唯一地被确定，如图 1-1 所示。从原点指向点 P 的矢量 \mathbf{r} 称为位置矢量(Position Vector)，它在直角坐标系中表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_x X + \mathbf{a}_y Y + \mathbf{a}_z Z \quad (1-1-2)$$

式中， X 、 Y 、 Z 是位置矢量 \mathbf{r} 在 x 、 y 、 z 轴上的投影。

任一矢量 \mathbf{A} 在三维正交坐标系中都可以给出其三个分量。例如，在直角坐标系中，矢

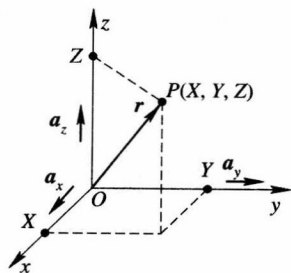


图 1-1 直角坐标系中一点的投影

量 \mathbf{A} 的三个分量分别是 A_x 、 A_y 、 A_z ，利用三个单位矢量 \mathbf{a}_x 、 \mathbf{a}_y 、 \mathbf{a}_z 可以将矢量 \mathbf{A} 表示成：

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z \quad (1-1-3)$$

矢量 \mathbf{A} 的大小为 A ：

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \quad (1-1-4)$$

1.1.2 矢量的代数运算

1. 矢量的加法和减法

任意两个矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相加等于两个矢量对应分量相加，它们的和仍然为矢量，即

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{a}_x(A_x + B_x) + \mathbf{a}_y(A_y + B_y) + \mathbf{a}_z(A_z + B_z) \quad (1-1-5)$$

任意两个矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的差等于将其中的一个矢量变号后再相加，即

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \\ &= \mathbf{a}_x(A_x - B_x) + \mathbf{a}_y(A_y - B_y) + \mathbf{a}_z(A_z - B_z) \end{aligned} \quad (1-1-6)$$

2. 矢量的乘积

矢量的乘积包括标量积和矢量积。

1) 标量积

任意两个矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的标量积(Scalar Product)是一个标量，它等于两个矢量的大小与它们夹角的余弦之乘积，如图 1-2 所示，记为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos\theta \quad (1-1-7)$$

标量积也称为点积(Dot Product)，它实质上是一个矢量在另外一个矢量方向上的投影与该矢量长度的乘积。如果两个不为零的矢量的标量积等于零，则这两个矢量必然相互垂直，或者说两个互相垂直的矢量的点积一定为零，而两个相互平行的单位矢量的点积等于 1。

例如，直角坐标系中的单位矢量有下列关系式：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y &= \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = 0 \\ \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x &= \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1 \end{aligned} \right\} \quad (1-1-8)$$

任意两矢量的标量积，用矢量的三个分量表示为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-1-9)$$

标量积服从交换律和分配律，即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1-1-10)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1-1-11)$$

2) 矢量积

任意两个矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 的矢量积(Vector Product)是一个矢量，矢量积的大小等于两个矢量的大小与它们夹角的正弦之乘积，其方向垂直于矢量 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 组成的平面，如图 1-3 所示，记为

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = a_n AB \sin\theta \quad (1-1-12)$$

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_A \times \mathbf{a}_B \quad (\text{右手螺旋})$$

矢量积又称为叉积(Cross Product)，如果两个非零矢量的叉积等于零矢量，则这两个矢量必然相互平行，或者说，两个相互平行矢量的叉积一定等于零矢量。

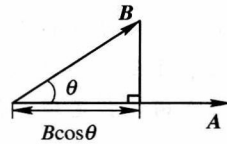


图 1-2 标量积的图示

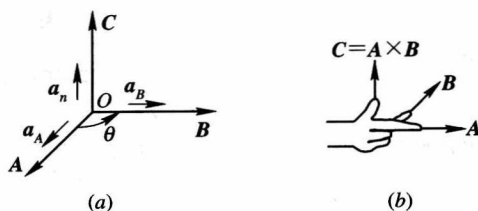


图 1-3 矢量积的图示及右手螺旋
(a) 矢量积的图示; (b) 右手螺旋

矢量的叉积不服从交换律, 但服从分配律, 即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1-1-13)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1-1-14)$$

直角坐标系中的单位矢量有下列关系式:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y &= \mathbf{a}_z, \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x, \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_x &= \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (1-1-15)$$

在直角坐标系中, 矢量的叉积还可以表示为行列式形式, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{a}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{a}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{a}_z (A_x B_y - A_y B_x) \end{aligned} \quad (1-1-16)$$

矢量的其他运算详见附录 1。

1.2 圆柱坐标系和球坐标系

在实际应用中, 有时采用圆柱坐标系或球坐标系能使问题的分析更简洁、明了。下面我们介绍圆柱坐标系和球坐标系及其与直角坐标系之间的转换。

1.2.1 圆柱坐标系

空间任一点 P 的位置可以用圆柱坐标系中的三个变量 (ρ, φ, z) 来表示, 如图 1-4 所示。其中, ρ 是位置矢量 \overrightarrow{OP} 在 xy 面上的投影, φ 是从 $+x$ 轴到位置矢量 \overrightarrow{OP} 在 xy 面上的投影之间的夹角, z 是 \overrightarrow{OP} 在 z 轴上的投影。由图 1-4 可以看出, 圆柱坐标与直角坐标之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (1-2-1)$$

如同直角坐标系一样, 圆柱坐标系也具有三个相互垂直的坐标面, 如图 1-5 所示。

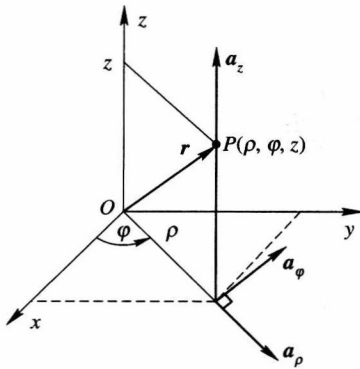


图 1-4 圆柱坐标系一点的投影

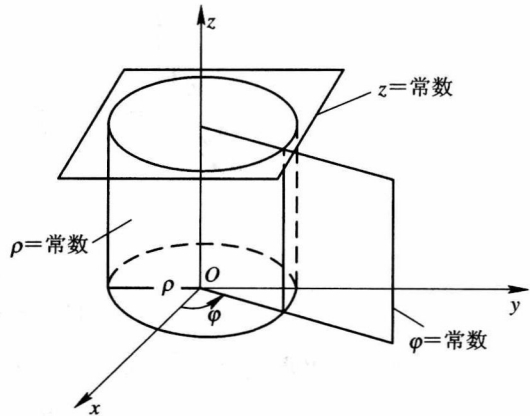


图 1-5 圆柱坐标系三个互相垂直的坐标面

坐标面

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{常数} \quad (1-2-2)$$

表示一个以 z 轴为轴线的半径为 ρ 的圆柱面, ρ 的变化范围为 $0 \leq \rho < \infty$ 。

坐标面

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \text{常数} \quad (1-2-3)$$

表示一个以 z 轴为界的半平面, φ 的变化范围为 $0 \leq \varphi < 2\pi$ 。

坐标面

$$z = \text{常数} \quad (1-2-4)$$

表示一个平行于 xy 平面的平面。 z 的变化范围为 $-\infty < z < +\infty$ 。

由于三个面相交成直角, 因此能够建立互相垂直的坐标轴: ρ 、 φ 和 z , 相应的单位矢量为 \mathbf{a}_ρ 、 \mathbf{a}_φ 和 \mathbf{a}_z , 分别指向 ρ 、 φ 和 z 增加的方向。应该指出: 圆柱坐标系中的三个单位矢量(与直角坐标系的不同)除 \mathbf{a}_z 外, \mathbf{a}_ρ 和 \mathbf{a}_φ 都不是常矢量, 它们的方向随 P 点的位置不同而变化, 但 \mathbf{a}_ρ 、 \mathbf{a}_φ 和 \mathbf{a}_z 三者始终保持正交关系, 并遵循右手螺旋法则, 即

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\varphi &= \mathbf{a}_z, \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\varphi \\ \mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\rho &= \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (1-2-5)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\varphi &= \mathbf{a}_\varphi \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_\rho = 0 \\ \mathbf{a}_\rho \cdot \mathbf{a}_\rho &= \mathbf{a}_\varphi \cdot \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1 \end{aligned} \right\} \quad (1-2-6)$$

圆柱坐标系的位置矢量 \mathbf{r} 可以表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_\rho \rho + \mathbf{a}_z z \quad (1-2-7)$$

圆柱坐标系中的单位矢量 \mathbf{a}_ρ 和 \mathbf{a}_φ 在单位矢量 \mathbf{a}_x 和 \mathbf{a}_y 上的投影示于图 1-6, 显然

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_\rho &= \mathbf{a}_x \cos\varphi + \mathbf{a}_y \sin\varphi \\ \mathbf{a}_\varphi &= \mathbf{a}_x (-\sin\varphi) + \mathbf{a}_y \cos\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1-2-8)$$

因此, 直角坐标系中的单位矢量变换到圆柱坐标系中的单位矢量的表达式写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_\rho \\ \mathbf{a}_\varphi \\ \mathbf{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_z \end{bmatrix} \quad (1-2-9)$$

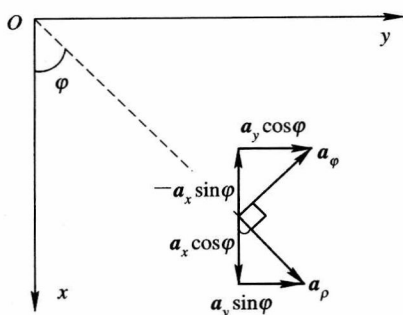


图 1-6 圆柱坐标系单位矢量的变换

将上式求逆即可得到从圆柱坐标系到直角坐标系的转换关系为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{a}_y \\ \mathbf{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_\rho \\ \mathbf{a}_\varphi \\ \mathbf{a}_z \end{bmatrix} \quad (1-2-10)$$

式(1-2-9)和式(1-2-10)表明:如果矢量 \mathbf{A} 是在圆柱坐标系给定的,根据式(1-2-10)可以得到直角坐标系的表达式;反之,若矢量 \mathbf{A} 是在直角坐标系给定的,则根据式(1-2-9)可以得到圆柱坐标系的表达式。无论用何种坐标系表示,矢量的大小和方向是不变的。

圆柱坐标系中的任意一点 P 沿 ρ 、 φ 和 z 方向的长度增量分别为

$$dl_\rho = d\rho, \quad dl_\varphi = \rho d\varphi, \quad dl_z = dz \quad (1-2-11)$$

它们与沿各自坐标增量之比分别为

$$h_1 = \frac{dl_\rho}{d\rho} = 1, \quad h_2 = \frac{dl_\varphi}{d\varphi} = \rho, \quad h_3 = \frac{dl_z}{dz} = 1 \quad (1-2-12)$$

通常将 h_1 、 h_2 、 h_3 称为拉梅系数(Lame Constant);引入拉梅系数,为各种坐标系下的统一表达提供了方便。

圆柱坐标三个坐标面的面元矢量分别为

$$d\mathbf{S}_\rho = \mathbf{a}_\rho dl_\varphi dl_z = \mathbf{a}_\rho \rho d\varphi dz \quad (1-2-13)$$

$$d\mathbf{S}_\varphi = \mathbf{a}_\varphi dl_\rho dl_z = \mathbf{a}_\varphi d\rho dz \quad (1-2-14)$$

$$d\mathbf{S}_z = \mathbf{a}_z dl_\rho dl_\varphi = \mathbf{a}_z \rho d\varphi d\rho \quad (1-2-15)$$

体积元为

$$dV = dl_\rho dl_\varphi dl_z = \rho d\varphi d\rho dz \quad (1-2-16)$$

1.2.2 球坐标系

在球坐标系中,空间一点 P 唯一地用三个坐标变量 (r, θ, φ) 来表示,如图 1-7 所示。此处,位置矢量 \mathbf{r} 又称为矢径(Radius Vector), r 是其大小, θ 是位置矢量 \mathbf{r} 与 z 轴的夹角, φ 是从 $+x$ 轴到位置矢量 \mathbf{r} 在 xy 面上的投影 OM 之间的夹角。由图 1-7 可以看出,球坐标与直角坐标之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-2-17)$$

同样,球坐标也有三个坐标面,如图 1-8 所示。

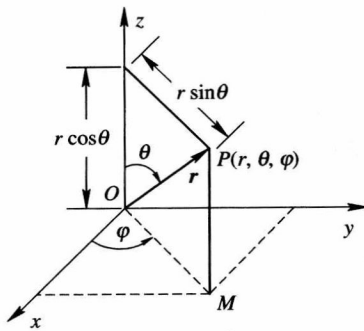


图 1-7 球坐标系一点的投影

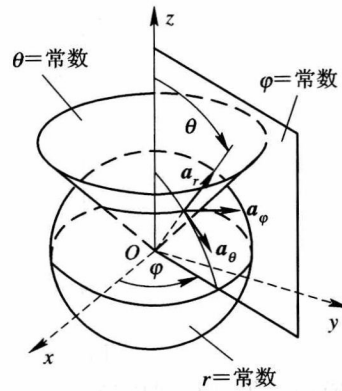


图 1-8 球坐标系三个互相垂直的坐标面

坐标面

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \text{常数} \quad (1-2-18)$$

表示一个半径为 r 的球面, r 的变化范围为 $0 \leq r < \infty$ 。

坐标面

$$\theta = \text{常数}$$

表示一个以原点为顶点、以 z 轴为轴线的圆锥面, θ 的变化范围为 $0 \leq \theta \leq \pi$ 。

坐标面

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \text{常数} \quad (1-2-19)$$

表示一个以 z 轴为界的半平面, φ 的变化范围为 $0 \leq \varphi < 2\pi$ 。

球坐标系的位置矢量可以表示为

$$\mathbf{r} = a_r r \quad (1-2-20)$$

球坐标系中任意点 $P(r, \theta, \varphi)$ 的三个单位矢量为 a_r 、 a_θ 和 a_φ , 它们互相正交且遵循右手螺旋法则, 即

$$\left. \begin{aligned} a_r \times a_\theta &= a_\varphi, a_\theta \times a_\varphi = a_r, a_\varphi \times a_r = a_\theta \\ a_r \times a_r &= a_\theta \times a_\theta = a_\varphi \times a_\varphi = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (1-2-21)$$

$$\left. \begin{aligned} a_r \cdot a_\theta &= a_\theta \cdot a_\varphi = a_\varphi \cdot a_r = 0 \\ a_r \cdot a_r &= a_\theta \cdot a_\theta = a_\varphi \cdot a_\varphi = 1 \end{aligned} \right\} \quad (1-2-22)$$

单位矢量 a_r 、 a_θ 和 a_φ 在单位矢量 a_x 、 a_y 和 a_z 上的投影分别示于图 1-9(a)、(b) 和 (c)。由图 1-9 可以得到直角坐标系中的单位矢量变换到球坐标的表达式为

$$\begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\varphi & \cos\theta \sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (1-2-23)$$

将上式求逆即可得到球坐标中的单位矢量变换到直角坐标的表达式为

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\varphi \end{bmatrix} \quad (1-2-24)$$