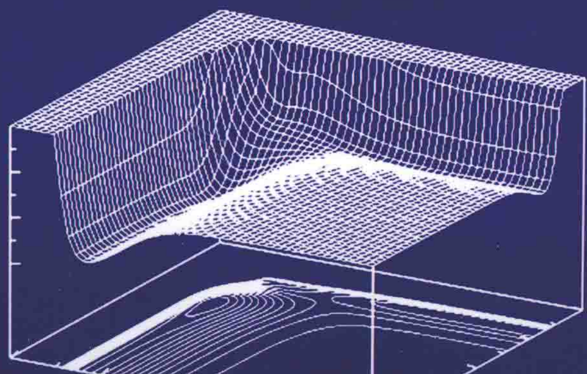
非线性最优控制计算方法及其应用

张雷 曾蓉 陈聆 编著



科学出版社

非线性最优控制计算方法及其应用

张雷　曾蓉　陈聆　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

作者多年来为四川省某些高校理工科专业的硕士研究生开设“最优控制理论及方法”课程，对教学、科研实践中搜集整理的大量素材，经过充分酝酿、反复修订、编辑成书. 本书在内容处理上注重基本概念和基本理论的阐述，突出计算方法和程序设计的训练，强调理论和方法的实际应用，引导学生主动思考，激发学生的学习兴趣，提高学生分析和解决实际问题的能力.

全书共分 6 篇(含预篇)，内容包括无约束及约束变分方法、离散及连续系统动态规划方法、无约束及约束数值方法、LQR 问题等. 在 LQR 问题中将介绍标准 LQR 问题、可转化为 LQR 问题的各种调节器. 在介绍次优 LQR 问题中，引进了作者在科研工作中整理提炼的一些素材. 书中结合算法给出最优控制问题的大量实例，包括空间技术、工程问题、经济计划和管理问题、高温超导磁悬浮等应用模型.

本书既可用于学术研究，也可以用作应用数学、运筹学及控制论专业的硕士、博士研究生教材，同时可供科技人员自学参考.

图书在版编目（CIP）数据

非线性最优控制计算方法及其应用/张雷，曾蓉，陈聆编著. —北京：科学出版社，2015

ISBN 978-7-03-045290-0

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①张… ②曾… ③陈… Ⅲ. ①非线性-最佳控制-计算方法 Ⅳ. ①O232

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 177355 号

责任编辑：李静科 赵彦超 / 责任校对：张凤琴
责任印制：徐晓晨 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司印刷
科学出版社总发行 各地新华书店经销

*

2015 年 9 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2015 年 9 月第一次印刷 印张：18 3/8
字数：355 000

定价：88.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

空间技术的发展及工程、生产问题的需要，促进了控制工程理论的突破，产生了现代控制理论，并采用时域方法，以最优化为准则处理多输入-输出的复杂被控系统. 20 世纪 60 年代随着空间计划的实施，现代控制理论迅猛发展，许多分支学科逐渐壮大，主要包括线性系统及非线性系统的一般理论，最优控制理论，分布参数控制理论，系统辨识、状态滤波估计，随机控制及模糊控制，大系统控制等. 控制理论的迅速发展及各学科的相互渗透使得我们难以面面俱到. 本书着重研究确定性的最优控制问题的计算方法以及一些典型的应用模型.

最优控制方法被用于求解许多航空航天问题、经济计划及生产管理问题、外形设计及大型空间结构问题. 近 20 年来，非线性最优控制更是被用于多原子大气反应动力学、地矿勘探及油气开发工程等领域. 最优控制是最为困难的优化问题之一. 决策变量是一个可测函数，等式约束由常微分方程或偏微分方程及各种边界条件表示，而不等式约束可能涉及边界条件、全部状态轨迹和控制作用. 本书给出最优控制问题的一般提法，着重于由常微分方程描述的系统. 在相当长的时间内，庞特里亚金(Pontryagin)的极值原理和贝尔曼(Bellman)的动态规划为人们求解最优控制问题提供了依据和方法. 20 世纪 70 年代以来，非线性系统开环控制的最优控制算法有了新的发展，非线性规划算法被推广到最优控制中，从而形成无约束和约束最优控制的数值算法.

近 30 年来，线性二次型调节器问题(LQR 问题)基于如下原因越来越受到人们关注：一方面，非线性最优控制在通常情况下很难求得解析解，用数值方法可以得到数值解，但计算量很大，且有诸多限制. 与此相反，几乎所有线性最优控制问题(包括 LQR 问题)都较容易求得解析解且易于在技术上实现. 另一方面，小信号条件下运行的非线性控制系统可以应用线性最优控制的结果. 因此本书推出 LQR 问题专题，将传统方法和现代方法有机结合形成本书的主要特色.

本书共分 6 篇(含预篇)，内容包括无约束及约束变分方法、离散及连续系统动态规划方法、无约束及约束数值方法；在 LQR 问题中将介绍标准 LQR 问题，可转化为 LQR 问题的各种调节器以及次优 LQR 问题. 书中结合算法给出最优控制问题的大量实例，包括空间技术、工程问题、经济计划和管理问题、高温超导磁悬浮等应用

模型.

本书既可用于学术研究，也可以用作应用数学、运筹学及控制专业的博士、硕士研究生教材，同时可供科技人员自学参考.

本书的出版承蒙国家自然科学基金(项目编号:20873104)、四川省杰出青年学术技术带头人后续计划(项目编号:2012JQ0058)、“油气藏地质及开发工程”国家重点实验室基金的资助. 作者特别感谢科学出版社对本书的出版所给予的支持和帮助.

本书由西南石油大学张雷教授、西南交通大学曾蓉博士、成都理工大学陈聆教授共同编著. 四川大学张光澄教授担任主审. 本书编写工作具体分工为:预篇、第 1 篇、第 2 篇、第 4 篇(第 12 章和 13 章)由张雷执笔;第 3 篇、第 4 篇(第 14 章和 15 章)、第 5 篇(第 17 章和 18 章)由曾蓉执笔;第 5 篇第 16 章由陈聆执笔. 全书由张雷统稿.

作者十分感谢成都理工大学郭科教授对本书编写给予的关心和支持，四川大学侯泽华副教授、西南石油大学博士研究生程正军等对本书初稿的整理做了大量细致的工作，在此一并致以谢意.

限于作者水平，不当之处在所难免，诚恳读者批评指正.

张　雷

2014 年 9 月于西南石油大学

主要符号说明

E^n——Euclid 空间

$\mathbf{R}^n$——实 Euclid 空间

H——实 Banach 空间

$D\subset H$——D 属于 H 的开子集

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$——$\mathbf{R}^n$ 中的 n 维行向量(或点)

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$——$\mathbf{R}^n$ 中的 n 维列向量(或点)

x_i——n 维向量 x 的第 i 个分量

$y(x)$——H 中的标量函数

$\boldsymbol{y}(x)=(y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x))^{\mathrm{T}}$——$H$ 中的 n 维向量函数

$y_i(x)$——n 维向量函数的第 i 个分量(标量函数)

$\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}}$——$H$ 中的 n 维向量函数

$x_i(t)$——n 维向量中的第 i 个分量(标量函数)

$\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t))^{\mathrm{T}}$——意同 $\boldsymbol{x}(t)$

$\forall x\in \mathbf{R}^n$——属于 $\mathbf{R}^n$ 的任意 n 维实向量

$f:S\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$——$f$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上区域 S 中的实值函数

$\forall\, y(x)\in D\subset H$——属于 D 的任意标量函数

$J:D\subset H\to\mathbf{R}^1$——$J$ 是定义在 H 上开集 D 中的实值泛函

$\|\cdot\|_p$——$\mathbf{R}^n$ 中的向量或 n 阶方阵的 p 范数($p\geqslant1$)

$\|\boldsymbol{x}\|_p=\left[\sum_{i=1}^{n}|\boldsymbol{x}_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$,其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$

$\|\cdot\|_p$——H 中标量函数或向量函数的 p 范数($p\geqslant1$)

$\|y(x)\|_p=\left[\int_a^b y^p(x)\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}$,其中 $y(x)$ 为标量函数

$\|\boldsymbol{y}(x)\|_p=\left[\sum_{i=1}^{n}\int_a^b y_i^p(x)\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}$,其中 $\boldsymbol{y}(x)$ 为向量函数,$y_i(x)$ 为其分量函数

$\min\limits_{x\in\mathbf{R}^n}f(x)\left(\max\limits_{x\in\mathbf{R}^n}f(x)\right)$——实值函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上的最小(最大)值

$\min\limits_{y\in D\subset H}J(y)\left(\max\limits_{y\in D\subset H}J(y)\right)$——实值泛函在 DCH 上的最小(最大)值

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R},\boldsymbol{K}$ 等——常数矩阵

$\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t),\boldsymbol{Q}(t),\boldsymbol{R}(t),\boldsymbol{K}(t)$ 等——时变矩阵

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$——矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置 （$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)$ 意同 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$）

$\boldsymbol{A}^{-1}$——满秩方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 （$\boldsymbol{A}^{-1}(t)$ 意同 $\boldsymbol{A}^{-1}$）

$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$——方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹 （$\mathrm{tr}\boldsymbol{A}(t)$ 意同 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$）

$\dot{y}(x)$——同 $y'(x)$

$F_{y'}(x,y,y')$——同 $\dfrac{\partial F}{\partial y}$

$F_{y'}(x,y,y')$——同 $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$

$\approx$——近似于

$\in$——属于

$\notin$——不属于

$\cup$——集合的并运算

$\cap$——集合的交运算

$\supset$——集合之间的包含

$\subset$——集合之间的被包含

$\exists$——存在

s. t. ——“满足于(subject to)”的缩写

$U(y_0,\delta)$——以 y_0 为心、δ 为半径的邻域

目　录

第 1 篇 最优控制问题的变分方法

第 2 篇　动态规划方法

第 3 篇　最优控制问题的数值方法

第 4 篇 LQR 问题专题研究

第 5 篇 最优控制的应用模型

预篇　变分原理与最优控制

本篇介绍泛函极值与泛函变分的概念、无约束与约束变分问题，通过最优控制的大量实例分析，概括出最优控制的数学描述.

第 1 章　变 分 原 理

1.1　泛函极值问题实例

例 1.1(最速降线问题,即捷线问题)　已知沿垂直平面上两定点 A,B(图 1.1),一质点在重力作用下由 A 滑向 B,该质点在 A 点具有初速度 v_0,试确定该质点在重力作用下下滑的路径,且要求所需时间最少.

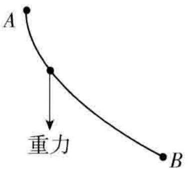


图 1.1

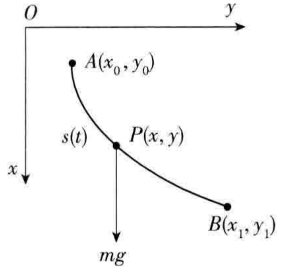


图 1.2

解　首先建立平面坐标系(图 1.2),设 $A(x_0,y_0)$,$B(x_1,y_1)$,$\widehat{AB}$的方程 $y=y(x)$,设质点从 A 出发,经时间 t 沿$\widehat{AB}$运动到点 $P(x,y)$,所经过的路程为 $s(t)$,据能量守恒定律

$$\frac{1}{2}m(v^2-v_0^2)=mg(y-y_0)$$

由此得

$$v=\sqrt{2g(y-y_0)+v_0^2}=\sqrt{2g(y-a)}$$

其中,$a=y_0-\dfrac{v_0^2}{2g}$,令$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v$,于是有

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2g(y-a)}}=\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2g(y-a)}}\mathrm{d}x$$

故从 A 至 B 所需时间为

$$\tau=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2g(y-a)}}\mathrm{d}x$$

因此,问题是选择以 A 为起点,B 为终点的曲线 $y=y(x)$,使泛函

$$J(y)=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2g(y-a)}}\mathrm{d}x$$

取最小值,即是求解下列问题：

$$\min J(y)$$

且 $y(x)$满足边界条件

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y(x_1)=y_1 \end{cases}$$

注意：$\tau=J(y(x))$是函数 $y(x)$的函数,故称为**泛函数**,简称**泛函**,其严格的数学定义将在后面叙述.

若令 $v_0=0, x_0=y_0=0$,如图 1.3 所示,上述问题可简化为

$$\min J(y)=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x$$

且 $y(x)$满足边界条件

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y(x_1)=y_1 \end{cases}$$

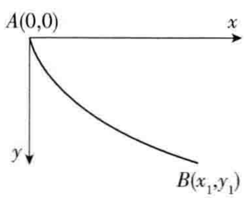


图 1.3

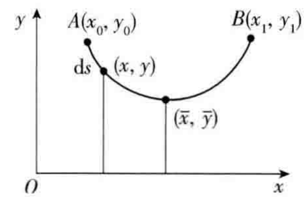


图 1.4

例 1.2(悬线问题)　设有一条足够长的绳索,在重力作用下下垂,在平衡状态下求该绳索的形状(假定该绳索密度均匀,密度 ρ 为常数).

解　建立平面坐标系,如图 1.4 所示.

设$\widehat{AB}$ 的长$L=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}x$,重心坐标为$(\bar{x},\bar{y})$,若$\widehat{AB}$的质量集中在重心时,据$\widehat{AB}$对 y 轴的力矩公式有

$$\rho L\bar{x}=\int_{x_0}^{x_1}\rho x\,\mathrm{d}s$$

即

$$\bar{y}=\frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}x$$

绳索$\widehat{AB}$在重力作用下下垂,其重心也下降,当绳索到达平衡位置时,其重心最低,即 $\bar{y}$ 最小,于是有下列泛函极值问题：

$$\min J(y)=\frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}x$$

且 $y(x)$满足：