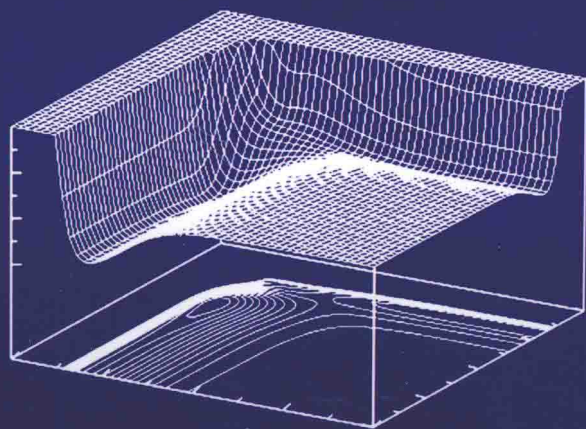


---

# 非线性最优控制 计算方法及其应用

---

张雷 曾蓉 陈聆 编著



科学出版社

# 非线性最优控制计算方法及其应用

张雷 曾蓉 陈聆 编著

科学出版社  
北京

## 内 容 简 介

作者多年来为四川省某些高校理工科专业的硕士研究生开设“最优控制理论及方法”课程,对教学、科研实践中搜集整理的大量素材,经过充分酝酿、反复修订、编辑成书。本书在内容处理上注重基本概念和基本理论的阐述,突出计算方法和程序设计的训练,强调理论和方法的实际应用,引导学生主动思考,激发学生的学习兴趣,提高学生分析和解决实际问题的能力。

全书共分6篇(含预篇),内容包括无约束及约束变分方法、离散及连续系统动态规划方法、无约束及约束数值方法、LQR问题等。在LQR问题中将介绍标准LQR问题、可转化为LQR问题的各种调节器。在介绍次优LQR问题中,引进了作者在科研工作中整理提炼的一些素材。书中结合算法给出最优控制问题的大量实例,包括空间技术、工程问题、经济计划和管理问题、高温超导磁悬浮等应用模型。

本书既可用于学术研究,也可以用作应用数学、运筹学及控制论专业的硕士、博士研究生教材,同时可供科技人员自学参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

非线性最优控制计算方法及其应用/张雷,曾蓉,陈聆编著. —北京:科学出版社, 2015

ISBN 978-7-03-045290-0

I. ①非… II. ①张… ②曾… ③陈… III. ①非线性-最佳控制-计算方法 IV. ①O232

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第177355号

责任编辑:李静科 赵彦超 / 责任校对:张凤琴

责任印制:徐晓晨 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京教图印刷有限公司印刷

科学出版社总发行 各地新华书店经销

\*

2015年9月第 一 版 开本:720×1000 B5

2015年9月第一次印刷 印张:18 3/8

字数:355 000

定价:88.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

# 前 言

空间技术的发展及工程、生产问题的需要,促进了控制工程理论的突破,产生了现代控制理论,并采用时域方法,以最优化为准则处理多输入-输出的复杂被控系统. 20 世纪 60 年代随着空间计划的实施,现代控制理论迅猛发展,许多分支学科逐渐壮大,主要包括线性系统及非线性系统的一般理论,最优控制理论,分布参数控制理论,系统辨识、状态滤波估计,随机控制及模糊控制,大系统控制等. 控制理论的迅速发展及各学科的相互渗透使得我们难以面面俱到. 本书着重研究确定性的最优控制问题的计算方法以及一些典型的应用模型.

最优控制方法被用于求解许多航空航天问题、经济计划及生产管理问题、外形设计及大型空间结构问题. 近 20 年来,非线性最优控制更是被用于多原子大气反应动力学、地矿勘探及油气开发工程等领域. 最优控制是最为困难的优化问题之一. 决策变量是一个可测函数,等式约束由常微分方程或偏微分方程及各种边界条件表示,而不等式约束可能涉及边界条件、全部状态轨迹和控制作用. 本书给出最优控制问题的一般提法,着重于由常微分方程描述的系统. 在相当长的时间内,庞特里亚金(Pontryagin)的极值原理和贝尔曼(Bellman)的动态规划为人们求解最优控制问题提供了依据和方法. 20 世纪 70 年代以来,非线性系统开环控制的最优控制算法有了新的发展,非线性规划算法被推广到最优控制中,从而形成无约束和约束最优控制的数值算法.

近 30 年来,线性二次型调节器问题(LQR 问题)基于如下原因越来越受到人们关注:一方面,非线性最优控制在通常情况下很难求得解析解,用数值方法可以得到数值解,但计算量很大,且有诸多限制. 与此相反,几乎所有线性最优控制问题(包括 LQR 问题)都较容易求得解析解且易于在技术上实现. 另一方面,小信号条件下运行的非线性控制系统可以应用线性最优控制的结果. 因此本书推出 LQR 问题专题,将传统方法和现代方法有机结合形成本书的主要特色.

本书共分 6 篇(含预篇),内容包括无约束及约束变分方法、离散及连续系统动态规划方法、无约束及约束数值方法;在 LQR 问题中将介绍标准 LQR 问题,可转化为 LQR 问题的各种调节器以及次优 LQR 问题. 书中结合算法给出最优控制问题的大量实例,包括空间技术、工程问题、经济计划和管理问题、高温超导磁悬浮等应用

模型.

本书既可用于学术研究,也可以用作应用数学、运筹学及控制专业的博士、硕士研究生教材,同时可供科技人员自学参考.

本书的出版承蒙国家自然科学基金(项目编号:20873104)、四川省杰出青年学术技术带头人后续计划(项目编号:2012JQ0058)、“油气藏地质及开发工程”国家重点实验室基金的资助.作者特别感谢科学出版社对本书的出版所给予的支持和帮助.

本书由西南石油大学张雷教授、西南交通大学曾蓉博士、成都理工大学陈聆教授共同编著.四川大学张光澄教授担任主审.本书编写工作具体分工为:预篇、第1篇、第2篇、第4篇(第12章和13章)由张雷执笔;第3篇、第4篇(第14章和15章)、第5篇(第17章和18章)由曾蓉执笔;第5篇第16章由陈聆执笔.全书由张雷统稿.

作者十分感谢成都理工大学郭科教授对本书编写给予的关心和支持,四川大学侯泽华副教授、西南石油大学博士研究生程正军等对本书初稿的整理做了大量细致的工作,在此一并致以谢意.

限于作者水平,不当之处在所难免,诚恳读者批评指正.

张 雷

2014年9月于西南石油大学

## 主要符号说明

$E^n$ ——Euclid 空间

$\mathbf{R}^n$ ——实 Euclid 空间

$H$ ——实 Banach 空间

$D \subset H$ —— $D$  属于  $H$  的开子集

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ —— $\mathbf{R}^n$  中的  $n$  维行向量(或点)

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ —— $\mathbf{R}^n$  中的  $n$  维列向量(或点)

$x_i$ —— $n$  维向量  $x$  的第  $i$  个分量

$y(x)$ —— $H$  中的标量函数

$\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))^T$ —— $H$  中的  $n$  维向量函数

$y_i(x)$ —— $n$  维向量函数的第  $i$  个分量(标量函数)

$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ —— $H$  中的  $n$  维向量函数

$x_i(t)$ —— $n$  维向量中的第  $i$  个分量(标量函数)

$\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$ ——意同  $\mathbf{x}(t)$

$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ——属于  $\mathbf{R}^n$  的任意  $n$  维实向量

$f: S \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^1$ —— $f$  是定义在  $\mathbf{R}^n$  上区域  $S$  中的实值函数

$\forall y(x) \in D \subset H$ ——属于  $D$  的任意标量函数

$J: D \subset H \rightarrow \mathbf{R}^1$ —— $J$  是定义在  $H$  上开集  $D$  中的实值泛函

$\|\cdot\|_p$ —— $\mathbf{R}^n$  中的向量或  $n$  阶方阵的  $p$  范数 ( $p \geq 1$ )

$\|\mathbf{x}\|_p = \left[ \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}$ , 其中  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$

$\|\cdot\|_p$ —— $H$  中标量函数或向量函数的  $p$  范数 ( $p \geq 1$ )

$\|y(x)\|_p = \left[ \int_a^b y^p(x) dx \right]^{\frac{1}{p}}$ , 其中  $y(x)$  为标量函数

$\|\mathbf{y}(x)\|_p = \left[ \sum_{i=1}^n \int_a^b y_i^p(x) dx \right]^{\frac{1}{p}}$ , 其中  $\mathbf{y}(x)$  为向量函数,  $y_i(x)$  为其分量函数

$\min_{x \in \mathbf{R}^n} f(x) \left( \max_{x \in \mathbf{R}^n} f(x) \right)$ ——实值函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}^n$  上的最小(最大)值

$\min_{y \in D \subset H} J(y) \left( \max_{y \in D \subset H} J(y) \right)$ ——实值泛函在  $D \subset H$  上的最小(最大)值

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{K}$  等——常数矩阵

$\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{Q}(t), \mathbf{R}(t), \mathbf{K}(t)$  等——时变矩阵

$\mathbf{A}^T$ ——矩阵  $\mathbf{A}$  的转置 ( $\mathbf{A}^T(t)$  意同  $\mathbf{A}^T$ )

$\mathbf{A}^{-1}$ ——满秩方阵  $\mathbf{A}$  的逆矩阵 ( $\mathbf{A}^{-1}(t)$  意同  $\mathbf{A}^{-1}$ )

$\text{tr}\mathbf{A}$ ——方阵  $\mathbf{A}$  的迹 ( $\text{tr}\mathbf{A}(t)$  意同  $\text{tr}\mathbf{A}$ )

$\dot{y}(x)$ ——同  $y'(x)$

$F_y(x, y, y')$ ——同  $\frac{\partial F}{\partial y}$

$F_{y'}(x, y, y')$ ——同  $\frac{\partial F}{\partial y'}$

$\approx$ ——近似于

$\in$ ——属于

$\notin$ ——不属于

$\cup$ ——集合的并运算

$\cap$ ——集合的交运算

$\supset$ ——集合之间的包含

$\subset$ ——集合之间的被包含

$\exists$ ——存在

s. t. ——“满足于(subject to)”的缩写

$U(y_0, \delta)$ ——以  $y_0$  为心、 $\delta$  为半径的邻域

# 目 录

前言

主要符号说明

## 预篇 变分原理与最优控制

第 1 章 变分原理 .....	3
1.1 泛函极值问题实例 .....	3
1.2 泛函的极值 .....	6
1.2.1 极值的定义 .....	6
1.2.2 极值曲线与绝对极值 .....	8
1.3 泛函的变分 .....	10
1.3.1 变分的定义和性质 .....	10
1.3.2 泛函极值的必要条件 .....	14
1.4 无约束变分问题 .....	15
1.4.1 必要条件 .....	15
1.4.2 横截条件 .....	18
1.4.3 充分条件 .....	19
1.4.4 含多个函数的泛函变分问题 .....	20
1.5 约束变分问题 .....	21
1.5.1 $\varphi(x, y_1, \dots, y_n) = 0$ 型约束 .....	21
1.5.2 $\varphi(x, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n) = 0$ 型约束 .....	22
第 2 章 最优控制问题及实例 .....	24
2.1 动态系统与状态空间简介 .....	24
2.1.1 动态系统的数学描述 .....	24
2.1.2 动态系统的状态空间 .....	25
2.1.3 动态系统的几种形式 .....	27
2.2 最优控制概述 .....	27
2.3 最优控制实例分析 .....	30
2.3.1 空间技术的问题 .....	30
2.3.2 工程问题 .....	32
2.3.3 生产问题 .....	33



2.3.4 运动学问题 .....	34
<b>第3章 最优控制问题的数学描述 .....</b>	<b>35</b>
3.1 最优控制问题的初等描述 .....	35
3.1.1 受控制系统的数学模型 .....	35
3.1.2 约束条件 .....	36
3.1.3 性能指标 .....	36
3.1.4 最优控制的提法 .....	37
3.2 精确数学表达形式 .....	38
3.3 离散系统最优控制描述 .....	39
3.3.1 离散系统的控制问题 .....	39
3.3.2 连续控制问题离散化 .....	40

### 第1篇 最优控制问题的变分方法

<b>第4章 最优控制与变分问题的相互转换 .....</b>	<b>43</b>
4.1 最优控制问题的三种形式 .....	43
4.1.1 Lagrange 问题(积分型性能指标) .....	43
4.1.2 Mayer 问题(终端指标) .....	43
4.1.3 Bolza 问题(综合指标) .....	43
4.2 三种形式的等价关系 .....	44
4.2.1 Bolza 问题转化为 Lagrange 问题 .....	44
4.2.2 Bolza 问题转化为 Mayer 问题 .....	44
4.2.3 Lagrange 问题转化为 Mayer 问题 .....	45
4.3 变分问题的三种形式及其等价关系 .....	45
4.3.1 变分问题的三种形式 .....	45
4.3.2 三种形式的等价关系 .....	46
4.4 最优控制问题化为变分问题 .....	46
4.5 变分问题化为最优控制问题 .....	48
<b>第5章 无约束最优控制问题的变分方法 .....</b>	<b>49</b>
5.1 数学模型与终端状态 .....	49
5.2 固定终端时间极值的必要条件 .....	51
5.2.1 $x(t_f)$ 自由的情形 .....	51
5.2.2 $x(t_f)$ 受约束的情形 .....	54
5.3 自由终端时间极值的必要条件 .....	58
5.3.1 $S=R^n$ 的情形 .....	59
5.3.2 $S=\{x(t_f)   N(x(t_f), t_f)=0, N$ 为 $q$ 维向量函数} 的情形 .....	60

5.4 一般结论及例子 .....	64
<b>第 6 章 约束最优控制问题的变分方法</b> .....	<b>69</b>
6.1 问题提出 .....	69
6.2 等式约束下的变分方法 .....	70
6.3 特殊等式约束下的迭代方法 .....	72
6.4 不等式约束下的变分方法 .....	74
6.4.1 Pontryagin 极小值原理 .....	74
6.4.2 一般方法及例子 .....	76
6.4.3 问题与思考 .....	79

## 第 2 篇 动态规划方法

<b>第 7 章 离散系统的动态规划方法</b> .....	<b>83</b>
7.1 多阶段决策问题(引例及相关基本概念) .....	83
7.2 多阶段决策问题的数学描述 .....	86
7.2.1 数学模型 .....	86
7.2.2 Bellman 最优性原理 .....	86
7.2.3 动态规划基本定理 .....	87
7.3 求解多阶段决策问题的动态规划方法 .....	88
<b>第 8 章 连续系统的动态规划方法</b> .....	<b>93</b>
8.1 连续系统的最优性原理 .....	93
8.2 最优控制的必要条件 .....	94
8.3 动态规划计算方法 .....	97
8.4 算例 .....	98
8.5 其他终端时刻、终端状态的情形 .....	101
8.6 两种系统(离散与连续)动态规划的比较 .....	102
8.6.1 最优性原理 .....	102
8.6.2 最优值函数 .....	103
8.6.3 基本方程(最优值函数所满足的方程) .....	104
8.7 无约束变分方法、约束变分方法与连续动态规划方法比较 .....	104

## 第 3 篇 最优控制问题的数值方法

<b>第 9 章 两点边值问题</b> .....	<b>109</b>
9.1 引言 .....	109
9.2 线性边值问题 .....	110
9.2.1 基本恒等式与共轭函数法 .....	111

9.2.2	补足函数法	114
9.3	非线性边值问题	116
9.3.1	迭代-共轭函数法	116
9.3.2	拟线性方法(Newton法与补足函数法联合使用)	119
9.3.3	优化方法	121
9.3.4	Newton法	122
9.4	隐式边界条件的求解	124
9.5	多重打靶方法	126
<b>第10章</b>	<b>无约束最优控制问题的数值方法</b>	129
10.1	无约束变分方法的迭代算法	129
10.2	梯度法	130
10.2.1	泛函的梯度	130
10.2.2	迭代步长因子 $\alpha$ 的选择	132
10.2.3	梯度算法	132
10.3	共轭梯度法	137
10.4	Newton法(二阶变分法)	138
10.5	变尺度方法	139
<b>第11章</b>	<b>约束最优控制问题的数值方法</b>	141
11.1	控制变量约束的处理	141
11.2	约束梯度算法	142
11.3	Frank-Wolfe方法	143
11.4	罚函数法	144
11.5	另外形式的迭代算法	145

### 第4篇 LQR问题专题研究

<b>第12章</b>	<b>标准LQR问题</b>	151
12.1	有限时间的LQR问题(连续系统的状态调节器)	151
12.1.1	数学模型	151
12.1.2	用最优性条件解反馈形式 $u^*(t)=u(x,t)$	151
12.1.3	求解有限时间LQR问题(线性二次型最优控制问题)的步骤	155
12.1.4	关于Riccati矩阵的一些性质	159
12.2	有限时间的LQR问题(离散系统的状态调节器)	161
12.2.1	离散系统的数学模型	161
12.2.2	由极小值原理求最优反馈律	162
12.2.3	有限时间离散系统LQR问题解题步骤	162

12.2.4	定常系统的动态规划解法	163
12.3	无限时间的状态调节器	170
12.3.1	数学模型	170
12.3.2	最优反馈律	171
12.4	无限时间的定常状态调节器	172
12.4.1	数学模型	172
12.4.2	Riccati 矩阵 $\mathbf{K}(t, 0, \infty)$ 的定常性质	173
12.5	附录	175
12.5.1	线性时变系统的解	176
12.5.2	线性定常系统的解	177
12.5.3	线性系统的可控性	178
12.5.4	线性系统的可观性	179
<b>第 13 章</b>	<b>可转化为状态调节器的 LQR 问题</b>	<b>182</b>
13.1	输出调节器	182
13.1.1	有限时间的输出调节器	182
13.1.2	无限时间的输出调节器(定常系统)	183
13.2	具有指定稳定度 $\alpha$ 的调节器	184
13.3	常值干扰下的调节器	186
13.3.1	不考虑输出方程的数学模型	186
13.3.2	最优反馈律	187
13.3.3	考虑输出方程的数学模型	189
13.4	跟踪调节器	193
13.4.1	不考虑输出 $y(t)$ 的光滑要求	193
13.4.2	考虑对 $y(t)$ 的光滑要求	194
<b>第 14 章</b>	<b>次优 LQR 问题</b>	<b>198</b>
14.1	问题的提出(次优反馈律)	198
14.2	关于代价矩阵 $V_L(t)$ 及其性质	199
14.3	次优控制的数学模型(次优 LQR 问题)	201
14.3.1	$L(t)$ 的结构问题	201
14.3.2	$L(t)$ 的最优选择	202
14.4	次优增益矩阵的收敛性和误差估计	203
14.5	次优 LQR 问题的最优性条件(必要条件)	206
14.6	分段定常增益矩阵的算法设计	210
<b>第 15 章</b>	<b>无限终端次优调节器的研究</b>	<b>213</b>
15.1	无限终端定常状态调节器的次优输出反馈律	213

15.2 无限终端定常输出调节器的最优输出反馈律 ..... 216

15.3 带控制结构约束的无线终端定常调节器 ..... 217

    15.3.1 次优模型的建立 ..... 218

    15.3.2 次优反馈的必要条件 ..... 218

15.4 算法设计 ..... 220

### 第 5 篇 最优控制的应用模型

**第 16 章 最优管理问题** ..... 225

    16.1 生产与库存问题 ..... 225

        16.1.1 离散时间系统的最优库存模型 ..... 225

        16.1.2 类似于离散时间的最优库存模型,关于连续时间系统的最优库存模型 ..... 233

    16.2 最优消费时的最优积累率 ..... 235

    16.3 最优经济增长模型 ..... 238

        16.3.1 最优资本积累模型 ..... 238

        16.3.2 引入人口平均消费量的模型 ..... 239

    16.4 最优投资模型 ..... 242

**第 17 章 最短时间和最少燃料的最优控制** ..... 246

    17.1 Bang-Bang 控制 ..... 246

    17.2 非线性系统的时间最优控制 ..... 258

    17.3 线性定常系统非奇异的判别条件 ..... 260

    17.4 最小燃料问题 ..... 263

        17.4.1 燃料最优控制 ..... 263

        17.4.2 时间-燃料综合最优控制 ..... 266

**第 18 章 最优控制应用实际案例**

    ——第二代 YBCO 高温超导带材磁悬浮系统的稳定控制 ..... 270

    18.1 问题的提出 ..... 270

    18.2 建模分析 ..... 271

    18.3 模型的建立 ..... 274

    18.4 模型的求解 ..... 275

        18.4.1 静态外磁场下优化模型的求解 ..... 275

        18.4.2 动态外磁场下最优控制模型的求解 ..... 279

**参考文献** ..... 280

# 预篇 变分原理与最优控制

本篇介绍泛函极值与泛函变分的概念、无约束与约束变分问题,通过最优控制的大量实例分析,概括出最优控制的数学描述.



# 第 1 章 变分原理

## 1.1 泛函极值问题实例

**例 1.1**(最速降线问题,即捷线问题) 已知沿垂直平面上两定点  $A, B$ (图 1.1), 一质点在重力作用下由  $A$  滑向  $B$ , 该质点在  $A$  点具有初速度  $v_0$ , 试确定该质点在重力作用下下滑的路径, 且要求所需时间最少.

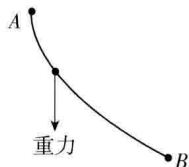


图 1.1

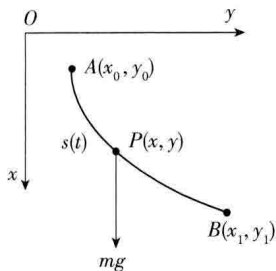


图 1.2

**解** 首先建立平面坐标系(图 1.2), 设  $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1)$ ,  $\widehat{AB}$  的方程  $y = y(x)$ , 设质点从  $A$  出发, 经时间  $t$  沿  $\widehat{AB}$  运动到点  $P(x, y)$ , 所经过的路程为  $s(t)$ , 据能量守恒定律

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = mg(y - y_0)$$

由此得

$$v = \sqrt{2g(y - y_0) + v_0^2} = \sqrt{2g(y - a)}$$

其中,  $a = y_0 - \frac{v_0^2}{2g}$ , 令  $\frac{ds}{dt} = v$ , 于是有

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(y - a)}} = \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2g(y - a)}} dx$$

故从  $A$  至  $B$  所需时间为

$$\tau = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2g(y - a)}} dx$$

因此, 问题是选择以  $A$  为起点,  $B$  为终点的曲线  $y = y(x)$ , 使泛函

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2g(y - a)}} dx$$



取最小值,即是求解下列问题:

$$\min J(y)$$

且  $y(x)$  满足边界条件

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

注意:  $\tau = J(y(x))$  是函数  $y(x)$  的函数,故称为泛函数,简称泛函,其严格的数学定义将在后面叙述.

若令  $v_0 = 0, x_0 = y_0 = 0$ ,如图 1.3 所示,上述问题可简化为

$$\min J(y) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

且  $y(x)$  满足边界条件

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}$$

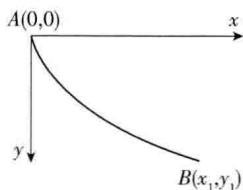


图 1.3

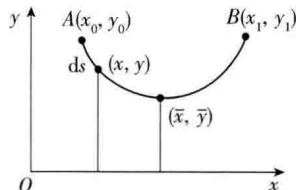


图 1.4

**例 1.2(悬线问题)** 设有一条足够长的绳索,在重力作用下下垂,在平衡状态下求该绳索的形状(假定该绳索密度均匀,密度  $\rho$  为常数).

**解** 建立平面坐标系,如图 1.4 所示.

设  $\widehat{AB}$  的长  $L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$ , 重心坐标为  $(\bar{x}, \bar{y})$ , 若  $\widehat{AB}$  的质量集中在重心时,

据  $\widehat{AB}$  对  $y$  轴的力矩公式有

$$\rho L \bar{x} = \int_{x_0}^{x_1} \rho x ds$$

即

$$\bar{y} = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$$

绳索  $\widehat{AB}$  在重力作用下下垂,其重心也下降,当绳索到达平衡位置时,其重心最低,即  $\bar{y}$  最小,于是有下列泛函极值问题:

$$\min J(y) = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$$

且  $y(x)$  满足: