夺标丛书

九年义务教育
初中版★同步

全国重点中学部分一线教师
北京海淀区重点学校
一线高级教师　编写

# 海淀金牌

初中二年级

# 代数

◆◆◆◆◆◆

课内课后练习
单元章后练习
期中期末夺标试题
重点难点知识点
素质教育应试教育综合
名师名校经验浓缩

金牌题　银牌题　铜牌题

出版社

九年义务教育

初中版★同步

# 夺标丛书

◆全国重点中学部分一线教师
◆北京海淀区重点学校一线高级教师 编写

# 海淀金牌

## 初中二年级
## 代数

吉 林 教 育 出 版 社

（吉）新登字 02 号

## 《夺标丛书 · 海淀金牌》编委会


主　　编／沈敬云
　　　　　邓　均（北京大学附属中学）
　　　　　陈立容（清华大学附属中学）
执行主编／陈　洪　陈晶茹
　　　　　郭维琮　许华桂（北京海淀区中学高级教师）
策　　划／屈　航　杨犁桦

编　　写

于继红 王丽萍 王　波 王彦红 王庭东 王　雪 孙　俭 孙　强
刘立文 刘亚芝 刘秉阁 刘　敏 刘瑞珍 李文茹 李丹妮 李　平
李世哲 李　涛 任冬艳 庄艳伟 关爱民 邬光洁 张丹萍 张亚芹
陈　珊 宋艳梅 吴桂芹 金光淑 周冬葩 周淑敏 周瑞芬 赵玉兰
赵秀华 郝光荣 姜瑞秋 徐凤文 黄潇雨 韩　双 韩英霞 韩淑清
董树勋 熊　阔 韩莹雁 白　梅 鲍　红 訾　涛 周玉玲 金维复
许　晶 郭晓燕

责任编辑／阙家栋
封面设计／版式设计／曲　刚



夺标丛书 **海淀金牌** 初中二年级代数

全国重点中学部分一线教师
北京海淀区重点学校一线高级教师／编写

| | | |
|---|---|---|
| 责任编辑：阙家栋 | | 封面设计：曲　刚 |
| 出版：吉林教育出版社 | 787 × 1092 毫米 16 开本 | 12 印张　298 千字 |
| | | 1998 年 5 月第 1 版　1998 年 5 月第 1 次印刷 |
| 发行：吉林省新华书店 | 印数：1－15000 册　全套定价：60.00 元（共五册） | 定价：12.00 元 |
| 印刷：吉林市华南彩印厂 | | ISBN7－5383－3334－7/G.2993 |

# 出版说明

《海淀金牌》是一套以九年义务教育教学大纲为标准，紧密配合九年义务教育新教材，帮助中学生全面更好地掌握初中各主要学科课程的一套实用性、权威性的辅导读物。

《海淀金牌》以提高学生文化素质、测试学生综合能力为基础，找到素质教育与应试教育的契合点，使学生得到全面发展。

本套丛书由全国重点中学部分一线优秀教师和北京海淀区重点中学的部分一线优秀教师编写。全套书注重学生学习方法的指导，注重基础知识。

《海淀金牌》在内容上把课（单元、章）进行科学条块的划分。综述指明每课学习中心；通过重点、难点、典型例题分析指明思路，做到一节一过关，一章一验收；期中、期末模拟试题配合夺标试题全面训练，使学生所学知识系统完整。

《海淀金牌》本着突出重点、减轻学生负担的原则，在练习和测试结合的基础上，通过金牌题、银牌题、铜牌题等全方位题型，做到分级训练，加深理解消化知识点，紧扣重点和难点，以达到夺标取胜的目的。

希望通过本套书的出版，能使中学生在学习与训练过程中得到最有效地帮助。

编者

1998年5月

# 目　　录

# 第八章　因式分解

本章的主要内容是多项式因式分解中一部分最基本的知识和基本的方法，它包括因式分解的有关概念，整式乘法与因式分解的区别和联系，因式分解的四种基本方法，即提公因式法、运用公式法、分组分解法和十字相乘法，因式分解方法的理论依据是多项式乘法的逆变形.

本章的重点是因式分解的四种基本方法，因为这部分内容在分式通分和约分时有着直接的应用，在解方程以及后面所学的内容也经常用到，因此，对因式分解的四种基本方法必须给予足够的重视，一定要熟练地掌握.

因此，在学习因式分解的每一种方法时，都紧紧扣住因式分解是整式乘法的逆变形，采用对比的方法，从多项式乘法出发，根据相等关系得出因式分解公式和方法，在分解因式时，应注意观察题目本身的特点，按一定的思维程序，正确选择因式分解的方法，熟练准确地进行因式分解.

## 8.1 提公因式法

## 基础知识综述

一、整式乘法与因式分解

在小学，同学们学习过整数的乘法和整数的因数分解.

类似地我们学习了整式乘法之后，学习了多项式的因式分解，如何分清这两个概念呢？

如：$m(a+b+c)=md+mb+mc$　　(1)

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$　　(2)

它们都是把积的形式化为和差的形式，是乘法运算，这里 $m$、$(a+b+c)$是 $ma+mb+mc$ 的因式，$(a+b)$、$(a-b)$是 $a^2-b^2$ 的因式.

将(1)式反过来得到：$ma+mb+mc=m(a+b+c)$　　(3)

将(2)式反过来得到：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$　　(4)

这个变形是把多项式由和、差的形式转化为两个因式的积的形式，像这样把一个多项式化为几个整式的积的形式叫做多项式的因式分解.

通过前面两对式子的对照，我们可以清楚地看到：整式的乘法与因式分解是两种不同的变形过程，它们是互逆的，即：

$$m(a+b+c)\underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘法}}{\rightleftharpoons}}ma+mb+mc\qquad (a+b)(a-b)\underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘法}}{\rightleftharpoons}}a^2-b^2$$

从左边到右边的变形，是把积的形式化为和差的形式，是整式乘法，而从右边到左边的变形，则是把和差的形式化为几个因式的积的形式，是因式分解，这体现了因式分解和整式乘法之间有着密切的内在联系，同时又有着本质的区别. 因此，我们可以从整式乘法得出因式分解的某些方法，又可以利用整式乘法来检验因式分解的结果是否正确，但要特别注意分清这两个概念，注意审题，避免出现进行因式分解到某一步后，又回头做了整式乘法的错误.

二、用提公因式法分解因式

1. 提公因式的依据

由乘法的分配律，有：$m(a+b+c)=ma+mb+mc$

反过来就得到：$ma+mb+mc=m(a+b+c)$

这就是提公因式，具体讲，就是把所给的多项式中的三项的公因式 $m$ 提出来. 为什么可把公因式 $m$ 提出来呢？这是依据乘法的分配律. 有时，我们也说是逆用乘法分配律.

2. 怎样找出一个多项式的公因式

如果一个多项式的各项都是单项式，通常，公因式的系数取多项式中各项系数的最大公约数；公因式的字母取多项式中各项都有的字母，并且，它的指数取各项中次数最低的. 考虑多项式

$12xy^3z-8x^3y^2$

它的公因式的系数取 12 与 8 的最大公约数，是 4. 公因式的字母怎么取呢？两项都有的字母是 $x$ 与 $y$，它们的指数呢？在两项中，$x$ 的最低次数是 1，$y$ 的最低次数是 2，所以取 $xy^2$. 合起来，公因式取 $4xy^2$. 注意，像 $2x$，$2y$，$xy$ 等，也是上面的多项式各项的公因式，但是，在分解因式时，要提取的公因式应是最高公因式.

如果在一个多项式中，有的项是多项式因式乘积的形式，

$5(x+y)^2-15(x+y)^3$

这时，可以把 $x+y$ 看成一个字母，然后，对照上面的方法，确定它的公因式.

3. 提取公因式后，余下因式的确定

先看一个例子.

把 $5x^2y-3xy^2+xy$ 分解因式，不难看出，应提取的公因式是 $xy$. 提出 $xy$ 后，剩余的因式是什么呢？由前一章可以知道，余下的因式应是 $(5x^2y-3xy^2+xy)\div xy$，根据整式除法，这个因式是 $5x-3y+1$. 在后一个因式中有三项，与原多项式的项数相同，最后一项是 1，这是由 $xy\div xy$ 得出的.

4. 灵活处理系数

在用提公因式法分解因式时，有时会遇到所给的多项式的系数是分数，有时又会遇到第一项是负数. 遇到这些情况，可灵活处理，特别是在以后实际应用因式分解时，例如，在下一章中. 不过，通常，我们为了方便，常采用以下方法处理.

例如，把 $\frac{xy}{3}-\frac{x^2y^2}{3}+\frac{x^2y}{4}$ 分解因式，一般写成：$\frac{xy}{3}-\frac{x^2y^2}{3}+\frac{x^2y}{4}=\frac{1}{12}xy(4-4xy+3x)$

也就是说，类似分数通分，把各项中分数系数的最小公分母作为公因式系数的分母，使余下的因式中各项系数都化为整数.

至于多项式的第一项是负数时，通常把负号作为公因式的符号提出来，使余下的因式的第一项为正.

# 典型例题分析

**铜牌题 【例 1】 把下列各式分解因式**

(1) $15x^2y^3-25x^3y^2+5x^2y^2$；(2) $-26abc+13a^2b-39ab^2c^3$.

分析：用提公因式法进行因式分解的思维程序一般分两步：一是确定公因式[以(1)式为例：15、$-25$、5 的最大公约数是 5，$x^2y^3$、$x^3y^2$、$x^2y^2$ 中相同字母的最低次幂的积是 $x^2y^2$，故(1)式的公因式为 $5x^2y^2$]；二是确定括号中的每一项(用多项式的每一项除以公因式所得到的商)，但它的书写格式很简单，一般可直接写出结果.

解：(1) $15x^2y^3-25x^3y^2+5x^2y^2=5x^2y^2(3y-5x+1)$；

(2) $-26abc+13a^2b-39ab^2c^3=-13ab(2c-a+3bc^3)$.

**金牌题 【例 2】** 已知 $a+b=5,ab=7$，求 $a^2b+ab^2-a-b$ 的值

分析：此例属于条件求值类型的题目，一是先求出 $a$、$b$ 的值，再求多项式的值；二是先把多项式变形，出现 $a+b$ 与 $ab$，再求多项式的值，由于同学们所学的知识有限，还不会求 $a$、$b$ 的值，故应采取第二条思路. 利用方程一端 $(-5)$ 代换方程另一端 $(a+b)$，利用方程一端 $(7)$ 代换方程另一端 $(ab)$，可以达到消元的目的；即方程具有消元功能.

解：$a^2b+ab^2-a-b=ab(a+b)-(a+b)=(a+b)(ab-1)$

$\because a+b=-5,ab=7$，$\therefore$ 原式 $=(a+b)(ab-1)=(-5)(7-1)=-30$

**金牌题 【例 3】** 证明：$81^7-27^9-9^{13}$ 能被 45 整除.

分析：要证明 $81^7-27^9-9^{13}$ 被 45 整除，只要能证明 $81^7-27^9-9^{13}$ 中含有因式 45 即可，因此考虑把 $81^7-27^9-9^{13}$ 进行因式分解. 初看起来，没有公因式，但仔细观察 81、27、9 都是 3 的乘方，把 $81^7$ 化成 $(3^4)^7$ 即 $3^{28}$，同理 $27^9=3^{27}$，$9^{13}=3^{26}$，这样三项就有公因式 $3^{26}$ 了.

证明：$\because 81^7-27^9-9^{13}=3^{28}-3^{27}-3^{26}=3^{26}(3^2-3-1)=3^{26}\times5=3^{24}\times3^2\times5=3^{24}\times45$

$\therefore 81^7-27^9-9^{13}$ 能被 45 整除

## 课后练习题

**铜牌题** 1. 把下列各式从左边到右边的变形，哪些是因式分解？哪些不是？

(1) $3a(2a^2+5ab-b^2)=6a^3+15a^2b-3ab^2$

(2) $2m^3-3mn-2n^2-2=(m+2n)(2m-n)-2$

(3) $2x^2-4xy+x=x(2x-4y+1)$

(4) $10a(x-y)^2-5b(y-x)=(x-y)(10ax-10ay+5b)$

**铜牌题** 2. 在下列各式的横线上填写适当的数、式或者符号使等式成立.

(1) $-3x+2y=$ ________ $(3x-2y)$

(2) $x-y+k(y-x)=$ ________ $(k-1)$

(3) $a(b-c)+c-b=$ ________ $(a-1)$

(4) $(a-b)^3-(b-a)^2=(a-b)^2$ ________

(5) $p(x-y)-q(y-x)=p(x-y)$ ________ $q(x-y)$

(6) $a^{m+1}b^m-a^{m-1}b^{m-1}=a^{m-1}b^{m-1}$ ________

(7) $-3a^2(1-x)-2b(x-1)+c(1-x)=(x-1)$ ________

(8) $m(a-b)(a-c)-n(b-a)(c-a)=(a-b)(a-c)$ ________

(9) $2abc+4ac-6acd=$ ________ $(b+2-$ ________ $)$

(10) $-8a^3y+12a^2y^2-16ay^3=$ ________ $(2a^2+$ ________ $+4y^2)$

**铜牌题** 3. 把下列各式分解因式

(1) $9x^3y^2z-12x^2y$　　(2) $4m^3-7m^2n+m$

(3) $-14a^3+21a^2-28a$　　(4) $4x(a+b)-7(a+b)$

(5) $5m(x-y)+3n(y-x)$　　(6) $11x(a-b)^2-9y(b-a)^2$

(7) $4y(a-b)^3+13x(b-a)^3$　　(8) $(a-b+c)(m-n)+(b-c)(n-m)$

(9) $\frac{4}{5}x^2y(a-c)-\frac{8}{5}xy(a-c)$　　(10) $-15ax-12y$

(11) $12xy^3-8xy^4+24x^2y^6$　　(12) $-16x^4-32x^3+56x^2$

(13) $x+y-(2x-y)(x+y)$　　(14) $-25x^8+125x^{16}$

(15) $m(a-b)+n(b-a)$　　(16) $4y^2(1-m)-2y(m-1)$

(17) $q-p+m(p-q)$　　(18) $a^2(x-2a)^2-a(2a-x)^2$

(19) $a^2b(a-b)+3ab(a-b)$　　(20) $a(c-2b)-3d(2b-c)$

(21) $a^2b(x-y)ab(y-x)$　　(22) $5b(x-y)+10c(y-x)$

(23) $2(a-b)^3-(b-a)^2$　　(24) $(x-3)^3-(3-x)^2$

(25) $(a-b)(x-y)-(b-a)(x+y)$

(26) $(3a-4b)(7a-8b)+(11a-12b)(7a-8b)$

(27) $(m+n)(p+q)-(m+n)(p-q)$

(28) $(a+b)(a-b)-(b+a)$

(29) $3(x-1)^3y-(1-x)^3z$

(30) $x(p-q)-y(p-q)+z(p-q)$

**银牌题**　4. 选择题

(1)下面各式的因式分解中,正确的是:　（　　）

A. $12xyz-9x^2y^2=3xyz(4-3xy)$;　B. $3a^2y-3ay+6y=3y(a^2-a+2)$;

C. $-x^2+xy-xz=-x(x^2+y-z)$;　D. $a^2b+5ab-b=b(a^2+5a)$.

(2) $-13ab^2x^6-39a^3b^2x^5$ 分解因式等于:　（　　）

A. $-abx^3(13+39a^2x^2)$;　B. $-13ab^2x^6(1+3a^2)$;

C. $-13ab^2x^5(x+3a^2)$;　D. $-13ab^2x^5(x-3a^2)$.

(3) $m^2(a-2)+m(2-a)$分解因式等于:　（　　）

A. $(a-2)(m^2-m)$;　B. $m(a-2)(m+1)$;

C. $m(a-2)(m-1)$;　D. 以上答案都不对.

(4) $-52abx^4y^2+39a^2b^3x^3y$ 分解因式等于:　（　　）

A. $-4abx^3y(13xy-9ab^2)$;　B. $-abxy(52x^3y+39ab^2x^2)$;

C. $-4abx^3y(13xy+9ab^2)$;　D. 以上答案都不对.

(5)将 $a^{m+n+3}+a^{m+2n+3}$分解因式,等于:　（　　）

A. $a^{m+n+3}(a+a^n)$;　B. $a^{m+n+3}(1+a^n)$;　C. $a^{m+n+3}(1+a^2)$;　D. $a^{m+n}(a^3+a^{n+3})$.

(6)计算 $978\times95+978\times5$ 简单的方法是:　（　　）

A. $978\times95+978\times5=978\times(95+5)$;　B. $978\times95+978\times5=978\times5(19+1)$;

C. $978\times95+978\times5=5(978\times19+978)$;　D. $978\times95+978\times5=9210+4890$.

(7)分解因式 $x(x-y-z)+y(z-x+y)+z(y-x+z)$得:　（　　）

A. $(x-y-z)^2$;　B. $-(x-y-z)^2$;

C. $(y+z-x)^2$;　D. $(x-y-z)(x+y-z)$.

**银牌题**　5. 把下列各式分解因式

(1) $a^m-a^{m+1}$　　(2) $18x^{3n}y^m+27x^ny^{2m}$

(3) $a^{m+1}b^m-a^{m-1}b^{m+1}$　　(4) $3x^{a-1}-4x^a+7x^{a+1}$

(5) $4x^{n+2}+20x^n$　　(6) $15x^{2n+3}-25x^{n+1}-5x^n$

(7) $a(x+y)+b(x+y)+c(x+y)$

(8) $3(a+b)(a-b)(x+y)-(a+b)(a-2b)(x+y)$

(9) $(a-b)(x-y)(x-2y)-(b-a)(y-x)(a+b)$

(10) $2a(m-n)-3b(m-n)+c(m-n)$

(11) $6m(n-1)^3-8m^2(n-1)^2$

(12) $(x-3)^2(x^3-2)-(3-x)(x^2-1)+2(3-x)$

(13) $2a(x+y-z)+3b(z-x-y)-c(x+y-z)$

(14) $6m(x-1)^3-8m^2(x-1)^2-2m(1-x)^2$

(15) $5a(2a-b)+3b(b-2a)-3(2a-b)$

(16) $2(x-y)(a-2b+3c)-3(x+y)(2b-a-3c)$

(17) $-3a(x-1)-2b(1-x)+c(1-x)$

(18) $(x+1)^2(2x-3)+(x+1)(2x-3)^2-(x+1)(3-2x)$

银牌题　6. 利用因式分解计算

(1) $72.5\times75-53\times75-75\times30.5+75\times21$

(2) $234\times265-234\times65$　　(3) $36\times128+64\times128$

(4) $12.4\times8+47.6\times8$　　(5) $13.4\times8+46.6\times8$

(6) $10^5-5\times10^3$　　(7) $\frac{5}{7}\times\frac{5}{4}-\frac{5}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{11}{4}\times\frac{5}{7}$

金牌题　7. (1)已知：$a-b+2=0$，$ab=3$，求 $a^2b-4a-ab^2+4b$ 的值. (2)已知 $a+b=1$，$ab=108$，求 $a^2b+ab^2$ 的值. (3)已知 $4x^2+7x-1=-3$，求 $-12x^2-21x$ 的值.

金牌题　8. 不解方程组 $\begin{cases}2x+y=6\\x-3y=1\end{cases}$ 求 $7y(x-3y)^2-2(3y-x)^3$ 的值.

金牌题　9. 求证：对于任意自然数 $n$，$2^{n+4}-2^n$ 一定是 30 的倍数.

金牌题　10. 计算 $1996\times19951995-1995\times19961996$

金牌题　11. 先把下式分解因式，再求值

$(2x+1)^2(3x-2)-(2x+1)(3x-2)^2-x(2x+1)(2-3x)$，其中 $x=\frac{3}{2}$.

金牌题　12. 求值：$9^{997}-5\times3^{1993}+6\times81^{498}$.

# 单元练习题

铜牌题　1. 填空题

(1)把一个多项式化成几个________形式，叫做把这个多项式分解因式.

(2) $ma+mb+mc=m($________$)$

(3) $3ax+2xy=x($________$)$

(4) $(x+y)-k(x+y)=($________$)(1-k)$

(5) $-5xy-7xz=-x($________$)$

(6) $(a-b)x+(b-a)y=(a-b)($________$)$

(7) $x(a-x)^2-y(x-a)^2=(x-a)^2($________$)$

(8) $(1+a)xy-a-1=$ ________ $(xy-1)$

(9) $m(a-b)(a-c)-n(b-a)(c-a)=(a-b)(a-c)($ ________ $)$

(10) $a^m+3a^{m+2}-5a^{m-1}=a^{m-1}($ ________ $)$

(11) $x(-x+1)+6(x-1)=(x-1)($ ________ $)$

(12) $3x^2zy-6xy^2z+18xyz^2=3xyz($ ________ $)$

(13)计算 $22\times3.142+54\times3.142+24\times3.142=($ ________ $)$

(14)已知多项式 $6x-12$ 有一个因式等于 18,那么 $x=($ ________ $)$

(15)在多项式 $x^2-2xy+y^2-x+y$ 中有一个因式为 $x-y$,那么另一个因式是( ______ ).

铜牌题　2. 选择题

(1)分解因式 $x^{2n+3}-x^{2n+2}+x^{2n+1}$ 的结果是:　(　　)

A. $x^n(x^2+x+2)$;　B. $x^{2n}(x^3-x^2+2)$;

C. $x^{2n+1}(x^2-x+1)$;　D. $x^n(x^3+x-2)$.

(2)下列从左边到右边变形正确的是:　(　　)

A. $12abc-9a^2b^2c=3abc(4-3ab)$;　B. $-x^3+xy+xz=-x(x+y+z)$;

C. $x^2y+5xy-y=y(x^2+5x)$;　D. $3a^3x^2-3a^2x^2+ax=3a^2x^2(ax-3)+ax$.

(3)计算 $7.88\times95+7.88\times5$ 的简便方法是:　(　　)

A. $7.88\times95+7.88\times5=7.88\times5\times(19+1)$;

B. $7.88\times95+7.88\times5=7.88\times(95+5)$;

C. $7.88\times95+7.88\times5=5(7.88\times19+7.88)$;

D. $7.88\times95+7.88\times5=(748.6+3.94)$.

(4)下列分解因式:

①$3xy-6xz+9yz=3(xy-xz+3yz)$;

②$m^2(a-2)+m(2-a)=m(a-2)(m+1)$;

③$(x-y)^3-(y-x)^4=(x-y)^3(1+y-x)$;

④$(1+a)mn-a-1=(1+a)(mn-1)$.

其中正确的是:　(　　)

A. ①、②;　B. ③、④;　C. ①、③;　D. ②、④.

铜牌题　3. 把下列各式分解因式

(1) $2x^2-4x$　(2) $-6y^2+y$

(3) $5x^3-25x^2+5x$　(4) $-3x^2y-27xy^2$

(5) $12x^3-16x^2-8x$　(6) $-3xy+x^2y^2-x^3y^3$

(7) $9m^3n^2-18m^5n^3-36m^4n^4$　(8) $x^{2m+1}-x^{m+1}$

(9) $\frac{8}{27}x^3y^2-\frac{4}{9}xy^3$　(10) $-6x^{2m+1}y^{m+2}+10x^{m+1}y^{2m+4}$

铜牌题　4. 把下列各式分解因式

(1) $m(x+y)+n(x+y)$　(2) $(m+n)^3-(m+n)^4$

(3) $x^2y(x+y)-3xy(x+y)$　(4) $6m(a-b)+3m(b-a)(b+a)$

(5) $a(x-y+z)+b(y-x-z)$　(6) $m(x-y)^2-n(y-x)^3$

(7) $3(x-5)^3-6(5-x)^2+9(5-x)$

(8) $a^3b^2c(m-n)-ab^2c^3(n-m)$

(9)$a(x-y-z)+b(z+y-x)-c(y-x+z)$

(10)$(3x-2)^2(2x+3)+(3x-2)(2x+3)^2-(2-3x)(3+2x)$

**银牌题** 5. 利用因式分解计算

(1)$1.728\times93+1.728\times7$　　(2)$12.4\times18+47.6\times18$

(3)$0.75\times36.6-\frac{3}{4}\times26.6$　　(4)$1.6\times4.72-1\frac{3}{5}\times3.08+0.36\times\frac{8}{5}$

**银牌题** 6. 分解因式

(1)$1+x+x(x+1)+x(x+1)^2+x(x+1)^3$　(2)$24m(n-1)^{2n}-32m(1-n)^{2n+1}$

**银牌题** 7. 利用因式分解化简求值

$(x-y)(x^2+xy+y^2)+3xy(y-x)$,其中 $x=7.17$,$y=-2.83$

**银牌题** 8. 解方程$(42x+7)+(6x+1)^2=0$

# 8.2 运用公式法

## 基础知识综述

把乘法公式反过来,就得到了多项式因式分解公式,乘法公式中的字母,可以表示数,也可以表示一个单项式或多项式. 同样,因式分解公式中的字母可以表示数、单项式或多项式. 只要符合公式的结构特点,就可以运用公式法分解因式.

教科书中依次介绍了五个因式分解公式:

平方差公式:$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;

完全平方公式:$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$;

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$;

立方和公式:$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

立方差公式:$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

运用公式法的关键是弄清各公式的形式与特点.

1. 平方差公式是多项式分解因式应用较多的一个公式,一个二项式如果能写成平方差的形式就可以运用这个公式分解因式.

(1)要掌握平方差公式的特征:①两项必须是平方项;②两项符号相反.

(2)开始学习用平方差公式分解因式时,先恢复公式的形式进行分解,以避免差错,尤其是防止出现系数错误. 关键是熟练地把一个式子写成完全平方的形式,如 $0.0016x^4y^6=(0.04x^2y^3)^2$;$9(x-y)^2=[3(x-y)]^2$.

(3)为使计算迅速准确,要熟记 1—19 平方数.

2. 运用完全平方公式分解因式的关键在于正确判断一个三项式是不是完全平方式. 判断方法是:先把这个三项式按某个字母升(或降)幂排好,然后看首末两项能否写成平方和的形式;如果首、末两项能写成两式(或数)的平方和的形式;再看剩下的一项(不必看这项的符号)是不是等于这两式(或数)的积的 2 倍. 如果是就可以运用完全平方公式,写出两数和(或差)的平方形式. 运用两个完全平方公式时,要注意检验中间一项是否符合公式,这一点容易产生错误. 如,$a^2-ab+b^2=(a-b)^2$,$x^2+4x+16=(x+4)^2$ 是借误的. 例如把 $2xy-x^2-y^2$ 分解因式,可以先按 $x$ 的降幂重新排列多项式,得

$-x^2+2xy-y^2$

不难看出，提出一个负号后，就可以运用公式了.

有时，初看并不能应用公式，在这种情况下，要先考虑所给多项式能否提公因式，有些多项式在提取公因式后，就可以运用公式了. 例如，

$8x^2-18y^2$

$-2x^2+16x-32$

在运用公式时，还应该明确，像下面这样的一些多项式，在目前（严格地说，是在实数范围内）不能分解因式. 例如，

$a^2+b^2$，

$a^2+ab+b^2$，

$a^2-ab+b^2$.

3. 立方和与立方差公式的等号右边较前三个公式复杂. 应注意弄清公式中的符号规律：原式为两数的立方和（或差），分解后它的一个因式为这两个数的和（或差），而另一个因式有三项，其中第二项是这两个数的积，其前面的符号应为负（或正）号. 并把后一个因式与完全平方式对比起来记忆，这个因式 $a^2\pm ab+b^2$ 不是完全平方式.

4. 综合运用提公因式法，公式法两种方法分解因式，当拿到一个题目以后，应首先观察各项有无公因式（含变形后出现公因式），若有公因式先提取公因式，没有公因式再观察它有几项，有两项一般考虑平方差、立方和、立方差公式，有三项一般考虑完全平方公式，当验证它符合公式形式后，再利用公式进行因式分解. 运用公式后要注意能化简的要化简，能分解的继续分解到不能再分解为止. 要注意换元的思想，公式中的字母可以表示数、单项式或多项式.

## 典型例题分析

**铜牌题 【例 1】** 把下列各式因式分解

(1) $(a+2b)^2-(a-3b)^2$　　　　(2) $b^2-(a-b+c)^2$

分析：直接应用平方差公式分解，分解时注意使用括号，去括号化简时要特别注意符号.

解：(1) $(a+2b)^2-(a-3b)^2=[(a+2b)+(a-3b)][(a+2b)-(a-3b)]$

$=(a+2b+a-3b)(a+2b-a+3b)=5b(2a-b)$

(2) $b^2-(a-b+c)^2=[b+(a-b+c)][b-(a-b+c)]$

$=(b+a-b+c)(b-a+b-c)=(a+c)(2b-a-c)$

**铜牌题 【例 2】** 把下列各式因式分解

(1) $x^2(1-3y)^2-9(x-y)^2$　　　(2) $4(a+b+c)^2-9(a-b-c)^2$

分析：从形式上看原式，不符合平方差公式，但若把 $x^2(1-3y)^2$ 写成 $[x(1-3y)]^2$，$9(x-y)^2$ 写成 $[3(x-y)]^2$，则可以把原式转化为符合平方差公式结构特征.

解：(1) $x^2(1-3y)^2-9(x-y)^2=[x(1-3y)]^2-[3(x-y)]^2$

$=[x(1-3y)+3(x-y)][x(1-3y)-3(x-y)]=(4x-3xy-3y)(3y-3xy-2x)$

(2) $4(a+b+c)^2-9(a-b-c)^2=[2(a+b+c)]^2-[3(a-b-c)]^2$

$=[2(a+b+c)+3(a-b-c)][2(a+b+c)-3(a-b-c)]$

$=(5a-b-c)(5b+5c-a)$

**银牌题 【例 3】** 运用公式计算 $1993^3-1992\times1994$

分析：把 1992 写成 1993－1，1994 写成 1993＋1，恰好符合平方差公式.

解：$1993^2-1992\times1994=1993^2-(1993-1)(1993+1)$

$=1993^2-1993^2+1=1$

**金牌题 【例 4】** 用简便方法计算

$(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{98^2})(1-\frac{1}{99^2})(1-\frac{1}{100^2})$

分析：观察题目特点，发现它的每一个因式都符合平方差公式特点，故用平方差公式分解一个因式. 得到一串有规律排列的分数相乘，这样除头尾两个分数外，中间每相邻的两个分数相乘都是 1，这样就使运算大大简化了.

解：$(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{98^2})(1-\frac{1}{99^2})(1-\frac{1}{100^2})$

$=(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})\cdots(1-\frac{1}{99})(1+\frac{1}{99})(1-\frac{1}{100})(1+\frac{1}{100})$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{97}{98}\times\frac{99}{98}\times\frac{98}{99}\times\frac{100}{99}\times\frac{99}{100}\times\frac{101}{100}=\frac{1}{2}\times\frac{101}{100}=\frac{101}{200}$

## 课后练习题

**铜牌题** 1. 填空题

(1)$3x^3=(\quad)^3$；　　(2)$\frac{1}{4}x^4y^2=(\quad)^2$；

(3)$28(a+b)y^2=2x[6(a+b)]\times(\quad)$；

(4)$4a^2-9b^2=(\quad)^2-(\quad)^2$；

(5)$9m^2-6mn+n^2=(\quad)^2$

(6)$-x^2+4xy-4y^2=-(\quad)^2$；

(7)$\frac{a^3}{8}+\frac{b^3}{125}=(\frac{a}{2}+\frac{b}{5})(\qquad)$；

(8)$m^6n^3-27=(\qquad)(m^4n^2+3m^2n+9)$.

**铜牌题** 2. 选择题

(1)下列分解因式的变形中，错误的是：　　(　　)

A. $x^2-4x+4=(x-2)^2$；　　B. $m^3-27=(m-3)(m^2+3m+9)$；

C. $a^2-\frac{1}{25}=25a^2-1=(5a+1)(5a-1)$；　　D. $a^2-4a=a(a^2-4)=a(a+2)(a-2)$.

(2)下列分解因式的变形中，正确的是：　　(　　)

A. $-14x^3y^2+21x^2y^3-7x^2y^2=-7x^2y^2(2x-3y)$；　　B. $-x^3+8=(2-x)(4+2x+x^2)$；

C. $\frac{1}{4}=x+x^2=(\frac{1}{4}+x)^2$；　　D. $a^2-4c^2=(a+4c)(a-4c)$.

(3)下列式子中，子中含$(x+1)$因式的是：　　(　　)

A. $(x+1)^2+2(x+1)+1$；　　B. $(x+1)^2-(x-1)^2$；

C. $x^2-2x+1$；　　D. $(2x+3)^3-(x+2)^3$.

(4)$8x^3+27$ 的一个因式是：　　(　　)

A. $4x^2-6x+9$；　B. $4x^2-12x+9$；　C. $2x-3$；　D. $8x+3$.

铜牌题　3. 把下列各式分解因式：

(1)$x^2-25$　(2)$m^2-64n^2$　(3)$\frac{9}{121}a^2=1.44x^2$

(4)$(a+b)^2-1$　(5)$(x+y+z)^2-(x+y-z)^2$　(6)$(m^2+n^2)^2-9m^2n^2$

(7)$a^2-10a+25$　(8)$-1+4b-4b^2$　(9)$x^2-x+\frac{1}{4}$

(10)$25a^2+70ab+49b^2$　(11)$81m^4-18m^2n+n^2$　(12)$(t-1)^2-4(t-1)+4$

(13)$x^3-1$　(14)$y^3+27$　(15)$\frac{1}{8}-a^3$

(16)$m^6-n^3$　(17)$-(2x+3)^3-x^3$　(18)$a^5-a^3b^2$

银牌题　4. 证明题

(1)证明：两个连续奇数的平方差一定是8的倍数.

(2)证明：当$n$是正整数时，$n^3-n$的值是6的倍数.

(3)已知$a^2+b^2=5ab$，求证$a^4+b^4=23a^2b^4$.

(4)求证：不论$x$、$y$为任何实数，$x^2+y^2-2x-4y+8$的值总是正数

(5)求证：$107^3-94^3$能被13整除.

金牌题　5. 解答下列各题

(1)已知：$|2x-4y-3|+3x+5y-10|=0$，求代数式$(2x+y)^2$-$2(2x+y)(x-y)+(x-y)^2$的值

(2)已知：$x-6=2$，$xy=3$　求$2x^2+2y^2$的值.

(3)已知：$a^2-2a+b^2+6b+10=0$，求$3a+b$的值.

(4)已知：$a=\frac{1}{2}m+1$，$b=\frac{1}{2}m+2$，$c=\frac{1}{2}m+3$　求$a^2+2ab+b^2-2ac+c^2-2bc$的值.

(5)已知：$a+b=1$，求$a^3+b^3+3ab$的值.

(6)已知：$x\neq y$，且$x^3-x=5$，$y^3-y=5$，求$x^2+xy+y^2$的值.

(7)已知：$x+\frac{1}{x}=-3$，求$x^3+\frac{1}{x^3}$的值.

(8)已知：$a+b=4$，$ab=3$，求$a^3+b$.

## 单元练习题

铜牌题　1. 选择题

(1)分解因式$0.01-4a^2$等于：　(　　)

A. $(0.01+2a)(0.01-2a)$；　B. $(0.01-2a)(0.01-2a)$；

C. $(0.1-2a)(0.1-2a)$；　D. $(0.1+2a)(0.1-2a)$.

(2)已知$-(3a+\frac{1}{2}b)(3a-\frac{1}{2}b)$是下列多项式的一个分解因式结果，这个多项式是：

(　　)

A. $9a^2-\frac{1}{4}b^2$；　B. $-(\frac{1}{4}b^2+9a^2)$；

C. $\frac{1}{4}b^2-9a^2$；　D. $-9a^2-\frac{1}{4}b^2$.

(3)把$169(a-b)^2-196(a+b)^2$分解因式得：　(　　)

A. $-784ab$；　B. $108ab$；

C. $-(a+b)(27a+b)$；　　D. $-(a+27b)(27a+b)$.

(4)两个连续奇数的平方差是：（　　）

A. 16 的倍数；　B. 12 的倍数；　C. 8 的倍数；　D. 4 的倍数.

(5)在多项式 $x^2+y^2, x^2-y^2, -x^2+y^2, -x^2-y^2$ 中，在有理数范围内可以进行因式分解的有：（　　）

A. 1 个；　B. 2 个；　C. 3 个；　D. 4 个.

(6)下列各式能用完全平方公式分解因式的是：（　　）

A. $1+4a^2$；　B. $4a^2-4a-1$；　C. $x^2+xy+y^2$；　D. $x^2-4x+4$.

(7)如果 $x^2-6xy+k$ 是一个完全平方式，那么 $k$ 值是：（　　）

A. $3y$；　B. $36y^2$；　C. $6y^2$；　D. $9y^2$.

(8)如果 $9x^2+k+y^2$ 是一个完全平方式，那么 $k$ 值是：（　　）

A. $\pm 3xy$；　B. $\pm 6xy$；　C. $6y^2$；　D. $9y^2$.

(9)$9x^4-6x^2+1$ 的一个因式是：（　　）

A. $3x^2+1$；　B. $3x^2-1$；　C. $(3x)^2-1$；　D. $(3x)^2+1$.

(10)下列因式分解正确的是：（　　）

A. $50x-25x^2-25=-25(x+1)^2$；

B. $4(m-n)^2-4(m-n)+1=(2m-2n+1)^2$；

C. $4(m-n)^2-4(n-m)+1=(2m-2n+1)^2$；

D. $-a^2-2ab-b^2=(-a-b)^2$.

(11)$\frac{1}{5}x^2-5y^2$ 分解因式得：（　　）

A. $5(x+y)(x-y)$；　B. $\frac{1}{5}(x+y)(x-y)$；

C. $5(x+5y)(x-5y)$；　D. $\frac{1}{5}(x+5y)(x-5y)$.

(12)下列因式分解正确的是：（　　）

A. $8a^3+1=(2a+1)(4a^2+2a+1)$；

B. $8a^2+2=2(4a^2+1)=2(2a+2)(2a-1)$；

C. $4a^2-4a+1=(4a-1)^2$；

D. $8a^3+1=(2a+1)(4a^2-2a+1)$.

(13)把 $(2x-1)^3-x^3$ 分解因式的结果是：（　　）

A. $(x-1)(7x^2-5x+1)$；　B. $(x-1)(3x^2-3x+1)$；

C. $(x-1)(7x^2+5x+1)$；　D. $(3x-1)(7x^2+5x+1)$.

**铜牌题**　2. 填空题

(1) $4a^2=(\_\_\_\_\_\_)^2$　$\frac{1}{100}b^2=(\_\_\_\_\_\_)^2$　$\frac{1}{4}x^4=(\_\_\_\_\_\_)^2$　$0.25x^2y^2=(\_\_\_\_\_\_)^2$　$81m^2n^2=(\_\_\_\_\_\_)^2$　$\frac{1}{81}a^6b^4=(\_\_\_\_\_\_)^2$

(2)$216=(\_\_\_\_\_\_)^3$　$0.512=(\_\_\_\_\_\_)^3$

(3)$x^6=(\_\_\_\_\_\_)^3$　$x^3y^3=(\_\_\_\_\_\_)^3$　$x^6y^9=(\_\_\_\_\_\_)^3$

(4)$0.064a^3=(\_\_\_\_\_\_)^3$　$-\frac{1}{216}x^6=(\_\_\_\_\_\_)^3$　$-729m^6n^3=(\_\_\_\_\_\_)^3$

(5)$a^2-b^2=(a+b)(\_\_\_\_\_\_\_\_)$

(6) $4x^2-9y^2=($__________$)(2x+3y)$

(7) $-12m^2+27n^2=-3($__________$)($\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$)=3($\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$)($\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$)$

(8) $x^2-1=($__________$)($\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$)$

(9) $x^2+2xy+y^2=($__________$)^2$　　$x^2-2xy+y^2=($__________$)^2$

(10) $x^2+x+($__________$)=(x+\frac{1}{2})^2$

(11) $($________$)^2-4x+1=($\_\_\_\_\_\_\_\_$)^2$

(12) $4a^2+12ab+9b^2=($________$)^2$

(13) $1-8x^3=(1-2x)($__________$)$

(14) $27m^3+8=($__________$)(9m^2-6m+4)$

(15) $5x^{n+3}-625x^n=5x^n($__________$)($\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$)$

**铜牌题**　3. 把下列各式分解因式

(1) $1000x^2-10$　　(2) $-\frac{4}{9}m^2+0.01n^2$

(3) $\frac{1}{16}-m^4$　　(4) $(2x-3y)^2-4x^2$

(5) $p^2-p+\frac{1}{4}$　　(6) $\frac{m^2}{9}+1+\frac{2}{3}m$

(7) $2mx^4-98m$　　(8) $3a^5x^2+6a^3x+3a$

(9) $a^3-b^3$　　(10) $a^3+b^3$

(11) $8x^3-y^3$　　(12) $0.01m^3n^3-\frac{1}{64}a^3b^3$

(13) $2mx^3-128m$　　(14) $-m^3-64$

(15) $1-27(x-y)^3$　　(16) $x^3+(x-y)^3$

**银牌题**　4. 把下列各式因式分解

(1) $x(m+n)+y(m+n)$　　(2) $(x+y)^3-(x+y)^4$

(3) $12x^2y^3-27x^2y$　　(4) $a^2(x-y)+b^2(y-x)$

(5) $\frac{1}{4}m^2+2mn+4n^2$　　(6) $4(x+y-z)^2-9(x-y-z)^2$

(7) $25+(a+2b)^2-10(a+2b)$　　(8) $-y^2(a-b)^2+(b-a)^2$

(9) $(x-y)^{n+2}-(x-y)^n$　　(10) $-4a+a(a^2+1)^2$

(11) $x^6-y^6$　　(12) $x^{3n}+y^{3n}$

(13) $x^{3m+3}-y^{3n-3}$　　(14) $-0.064x^{6m}y^{3n}-512x^3y^3$

(15) $a^3(-m-n)^3+(m+n)^3$　　(16) $8a^6-27y^{12}$

(17) $(x^2+x)^3+\frac{1}{64}$　　(18) $3m^2-192m^3y^6$

(19) $8x^3(x^2-y^2)-27y^6(y^2-x^2)$　　(20) $a^5-a^3b^2$

**银牌题**　5. 利用因式分解计算

(1) $759^2-241^2$　　(2) $201^2-101^2$

(3) $999^2+999\times2+1$　　(4) $1002^2-1002\times4+4$

**银牌题**　6. 已知 $x=97.03, y=2.97$，求下列各式的值．

(1) $x^2-y^2$　　(2) $x^2+2xy+y^2$