

2016

挑战压轴题

高考数学

主编 卜照泽 尹德好

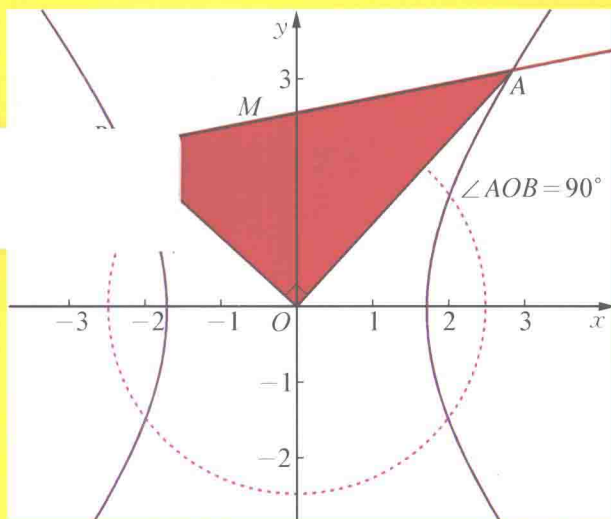
强化训练篇

(修订版)

这里有一群学霸



微信号: tiaozhanyazhouti



华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

挑战压轴题

高 考 数 学

强化训练篇

主 编 尹德好 卜照泽
编写者 张丽华 陈国平

图书在版编目(CIP)数据

挑战压轴题. 高考数学. 强化训练篇/尹德好, 卜照泽主编. —修订本. —上海: 华东师范大学出版社, 2015. 4
ISBN 978-7-5675-3459-9

I. ①挑… II. ①尹…②卜… III. ①中学数学课—初中—题解—升学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 087972 号

挑战压轴题·高考数学:强化训练篇

主 编 尹德好 卜照泽
总 策 划 倪 明
项目编辑 徐 平
组稿编辑 徐 平
审读编辑 马超群
装帧设计 高 山
漫画设计 孙丽莹 胡 艺
责任发行 王 祥

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 店 <http://hdsdcbbs.tmall.com>

印 刷 者 上海崇明裕安印刷厂
开 本 787×1092 16 开
印 张 14
字 数 405 千字
版 次 2015 年 8 月第 3 版
印 次 2015 年 8 月第 1 次
印 数 25000
书 号 ISBN 978-7-5675-3459-9/G·8225
定 价 27.00 元

出 版 人 王 焰

.(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

编写说明

高考数学压轴题是学生既畏惧又难以放弃的一块“鸡肋”，很多同学想，反正也不指望考清华、北大，又没必要考满分，所以在复习备考过程中彻底放弃压轴题。确实，压轴题信息量大、文字多、审题难；或因数学情景新颖，或有时条件隐蔽，甚至要经过推理计算才能看出其中的特殊性；或因过程多，情景变化不断，导致列出的方程多，数学解题过程复杂，甚至有的时候需要用到不常用的数学方法，难以想到。但不管怎样，放弃压轴题绝对不是良策。

为了帮助同学们熟悉压轴题的特征及题型，找到解决这类题的一般程序和方法，化解做题难度，并通过一定的训练提升做题的信心，我们把原本一道道很难的压轴题，通过分散它们的难点，化大题、难题为小题、容易题。本书所选择的压轴题其实是高考中30%的较难题，选择、填空、计算题型都有，针对面有所扩大。让读者全面掌握压轴题的命题意图、三维要求及解题策略。为此，我们在原有系列的基础上继续拓展编写了《挑战压轴题》之轻松入门篇和强化训练篇。

《挑战压轴题》之轻松入门篇按知识网络和数学方法并结合压轴题热点题型进行编排，分解答题压轴题和客观型压轴题。对每一小专题先作解法综述，再以分级例题的方式逐步引出解题之方法策略。从基础题开始，建立解题基础，再对提高题进行解题分级转化，相当于把一道大题分成几道小题，减少了步长，化解了难度。再以压轴题为例题，提出难点分化策略，展示满分解答，帮助学生建立起解决问题的思维程序，让人觉得一道综合题无非是几道小题、基本题的汇集整合。掌握了做题的程序，也就减少了畏惧心理。最后配置真题试做，所选题目有层次，供学生逐级训练，以便最终能直击压轴题。

《挑战压轴题》之强化训练篇纯粹作为配套训练使用，题目来源分为三类，包括真题、模拟题、创新题，其设置比例大概为5:3:2。真题主要从近5年各地高考试卷中遴选出来，模拟题主要为近两年各地考前的一模、二模试卷，具有一定的典型性。创新题主要是我们根据命题趋势对一些题目进行适当的改编，建议学生在考前3个月有计划地进行练习。在做题过程中，先不要看答案，独立思考完成，然后根据自己写的步骤并参照答案进行查漏补缺。在彻底看懂的基础上通过这样透彻的练习，才能提高准确性和做题速度。

最后，由于作者水平有限，对书里存在的问题，欢迎读者批评指正。

编者

目 录

第一部分 解答型压轴题

第 1 章 解析几何 / 1

- 基本问题 1 求曲线方程问题 / 1
- 基本问题 2 参数取值范围问题 / 6
- 基本问题 3 最值问题 / 10
- 基本问题 4 定点、定值问题 / 14
- 基本问题 5 求动点轨迹方程 / 18

第 2 章 函数 / 22

- 基本问题 1 函数单调性问题 / 22
- 基本问题 2 值域、极值、最值问题 / 26
- 基本问题 3 恒成立、恰成立、能成立问题 / 29
- 基本问题 4 函数零点问题 / 31

第 3 章 数列 / 34

- 基本问题 1 判断或证明等差、等比数列 / 34
- 基本问题 2 求数列的通项公式 / 38
- 基本问题 3 数列求和问题 / 41
- 基本问题 4 研究数列的性质 / 44
- 基本问题 5 数列中不等式的证明 / 48

第 4 章 一般能力问题 / 51

- 一般能力 1 学习能力 / 51
- 一般能力 2 探索能力 / 57
- 一般能力 3 应用能力 / 62
- 一般能力 4 创新能力 / 66

第二部分 客观型压轴题

基本方法 1 直接法 / 71

基本方法 2 特殊值法 / 75

基本方法 3 数形结合法 / 78

基本方法 4 等价转化法 / 81

基本方法 5 分析法 / 84

参考答案与解析 / 87

第 1 章 解析几何 / 87

基本问题 1 求曲线方程问题 / 87

基本问题 2 参数取值范围问题 / 93

基本问题 3 最值问题 / 98

基本问题 4 定点、定值问题 / 104

基本问题 5 求动点轨迹方程 / 110

第 2 章 函数 / 115

基本问题 1 函数单调性问题 / 115

基本问题 2 值域、极值、最值问题 / 121

基本问题 3 恒成立、恰成立、能成立问题 / 126

基本问题 4 函数零点问题 / 130

第 3 章 数列 / 137

基本问题 1 判断或证明等差、等比数列 / 137

基本问题 2 求数列的通项公式 / 142

基本问题 3 数列求和问题 / 147

基本问题 4 研究数列的性质 / 152

基本问题 5 数列中不等式的证明 / 156

第 4 章 一般能力问题 / 161

一般能力 1 学习能力 / 161

一般能力 2 探索能力 / 167

一般能力 3 应用能力 / 172

一般能力 4 创新能力 / 176

基本方法 1 直接法 / 183

基本方法 2 特殊值法 / 189

基本方法 3 数形结合法 / 195

基本方法 4 等价转化法 / 202

基本方法 5 分析法 / 208

第一部分 解答型压轴题

第1章 解析几何

基本问题1 求曲线方程问题

命题规律

圆锥曲线中求已知曲线的方程问题,如果出现在压轴题的第(I)小题一般会是送分题.如果在压轴题的第(II)、(III)小题出现,题目会有难度,但是如果你细细体会,解题的常用方法还是待定系数法.由于这种题目可以考查学生的基本功、运算能力以及转化的思想,故将是未来几年高考的热点.



真题直击

1. (2015 安徽) 设椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 点 O 为坐标原点, 点 A 的坐标为 $(a, 0)$, 点 B 的坐标为 $(0, b)$, 点 M 在线段 AB 上, 满足 $|BM| = 2|MA|$, 直线 OM 的斜率为 $\frac{\sqrt{5}}{10}$.
- (1) 求 E 的离心率 e ;
- (2) 设点 C 的坐标为 $(0, -b)$, N 为线段 AC 的中点, 点 N 关于直线 AB 的对称点的纵坐标为 $\frac{7}{2}$, 求 E 的方程.

2. (2014 新课标 I) 已知点 $A(0, -2)$, 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, F 是

椭圆 E 的右焦点, 直线 AF 的斜率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, O 为坐标原点.

(1) 求 E 的方程;

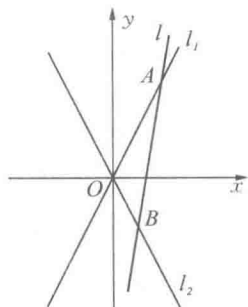
(2) 设过点 A 的动直线 l 与 E 相交于 P, Q 两点, 当 $\triangle OPQ$ 的面积最大时, 求 l 的方程.

3. (2014 福建) 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线分别为 $l_1: y = 2x$,

$l_2: y = -2x$.

(1) 求双曲线 E 的离心率.

(2) 如图, O 为坐标原点, 动直线 l 分别交直线 l_1, l_2 于 A, B 两点 (A, B 分别在第一、四象限), 且 $\triangle OAB$ 的面积恒为 8. 试探究: 是否存在总与直线 l 有且只有一个公共点的双曲线 E ? 若存在, 求出双曲线 E 的方程; 若不存在, 说明理由.

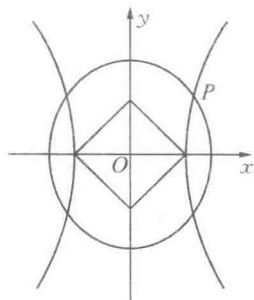


第 3 题

4. (2014 湖南)如图, O 为坐标原点, 双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1 (a_1 > 0, b_1 > 0)$ 和椭圆 $C_2: \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{x^2}{b_2^2} = 1 (a_2 > b_2 > 0)$ 均过点 $P\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1\right)$, 且以 C_1 的两个顶点和 C_2 的两个焦点为顶点的四边形是面积为 2 的正方形.

(1) 求 C_1 和 C_2 的方程.

(2) 是否存在直线 l , 使得 l 与 C_1 交于 A, B 两点, 与 C_2 只有一个公共点, 且 $|\vec{OA} + \vec{OB}| = |\vec{AB}|$? 证明你的结论.

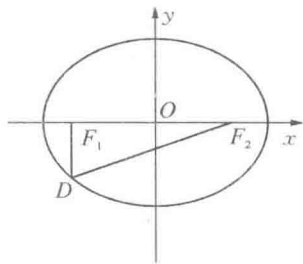


第 4 题

5. (2014 重庆)如图, 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 D 在椭圆上, $DF_1 \perp F_1F_2$, $\frac{|F_1F_2|}{|DF_1|} = 2\sqrt{2}$, $\triangle DF_1F_2$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

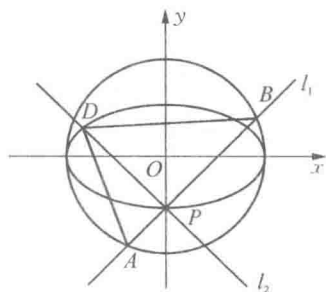
(1) 求该椭圆的标准方程.

(2) 是否存在圆心在 y 轴上的圆, 使圆在 x 轴的上方与椭圆有两个交点, 且圆在这两个交点处的两条切线相互垂直并分别过不同的焦点? 若存在, 求出圆的方程; 若不存在, 请说明理由.



第 5 题

6. (2013 浙江)如图,点 $P(0, -1)$ 是椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一点, C_1 的长轴是圆 $C_2: x^2 + y^2 = 4$ 的直径. l_1, l_2 是过点 P 且互相垂直的两条直线,其中 l_1 交圆 C_2 于 A, B 两点, l_2 交椭圆 C_1 于另一点 D . (1)求椭圆 C_1 的方程; (2)求 $\triangle ABD$ 面积取最大值时直线 l_1 的方程.



第 6 题

7. (2013 全国)在平面直角坐标系 xOy 中,已知圆 P 在 x 轴上截得线段长为 $2\sqrt{2}$,在 y 轴上截得线段长为 $2\sqrt{3}$.

(1) 求圆心 P 的轨迹方程;

(2) 若 P 点到直线 $y = x$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,求圆 P 的方程.

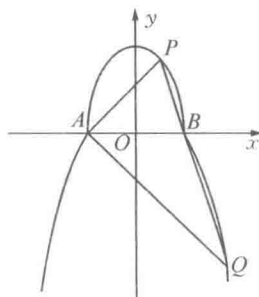


模拟训练

8. (2014 陕西)如图,曲线 C 由上半椭圆 $C_1: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0, y \geq 0)$ 和部分抛物线 $C_2: y = -x^2 + 1 (y \leq 0)$ 连接而成, C_1 与 C_2 的公共点为 A 和 B ,其中 C_1 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 过点 B 的直线 l 与 C_1, C_2 分别交于点 P, Q (均异于点 A, B),若 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$,求直线 l 的方程.

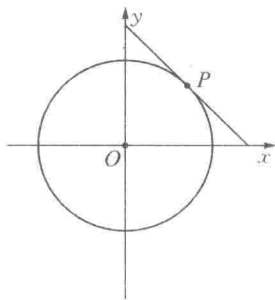


第 8 题

9. (2014 辽宁) 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的切线与 x 轴正半轴, y 轴正半轴围成一个三角形, 当该三角形面积最小时, 切点为 P (如图). 双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过点 P 且离心率为 $\sqrt{3}$.

(1) 求 C_1 的方程;

(2) 椭圆 C_2 过点 P 且与 C_1 有相同的焦点, 直线 l 过 C_2 的右焦点且与 C_2 交于 A, B 两点. 若以线段 AB 为直径的圆过点 P , 求 l 的方程.



第 9 题



创新强化

10. 已知椭圆 C 以 $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$ 为焦点且经过点 $P(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 已知直线 l 过点 P , 且直线 l 的一个方向向量为 $\vec{m} = (3, 3)$. 一组直线 $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots, l_{2n} (n \in \mathbb{N}^*)$ 都与直线 l 平行且与椭圆 C 均有交点, 它们到直线 l 的距离依次为 $d, 2d, \dots, nd, \dots, 2nd (d > 0)$, 直线 l_n 恰好过椭圆 C 的中心, 试用 n 表示 d 的关系式, 并求出直线 $l_i (i = 1, 2, \dots, 2n)$ 的方程. (用 n, i 表示)

基本问题 2 参数取值范围问题

命题规律

在圆锥曲线中的参数范围问题,是高考常考题型.全国各地都有考到.因为这类问题可以附着很多知识点,可在知识的交汇处设计题目,综合性强,变量多,涉及知识面广,难度大.这类问题往往要用函数思想、方程思想、数形结合思想等,通过构造不等式(组)、转化为求函数值域等方法来解决.圆锥曲线中的参数范围问题还将是未来高考的热点.



真题直击

1. (2015 天津)已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 $F(-c, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 点 M 在椭圆上且位于第一象限, 直线 FM 被圆 $x^2 + y^2 = \frac{b^2}{4}$ 截得的线段长为 c , $|FM| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求直线 FM 的斜率;

(2) 求椭圆的方程;

(3) 设动点 P 在椭圆上, 若直线 FP 的斜率大于 $\sqrt{2}$, 求直线 OP (O 为原点) 的斜率的取值范围.

2. (2014 湖北)在平面直角坐标系 xOy 中, 点 M 到点 $F(1, 0)$ 的距离比它到 y 轴的距离大 1. 记点 M 的轨迹为 C .

(1) 求轨迹 C 的方程;

(2) 设斜率为 k 的直线 l 过定点 $P(-2, 1)$, 求直线 l 与轨迹 C 恰好有一个公共点、两个公共点、三个公共点时 k 的相应取值范围.

3. (2013 山东)椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 过

F_1 且垂直于 x 轴的直线被椭圆 C 截得的线段长为 1.

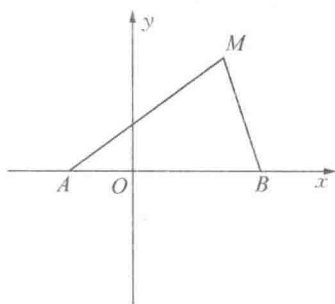
(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 点 P 是椭圆 C 上除长轴端点外的任一点, 连结 PF_1, PF_2 , 设 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PM 交 C 的长轴于点 $M(m, 0)$, 求 m 的取值范围.

4. (2012 四川)如图, 动点 M 与两定点 $A(-1, 0), B(2, 0)$ 构成 $\triangle MAB$, 且 $\angle MBA = 2\angle MAB$, 设动点 M 的轨迹为 C .

(1) 求轨迹 C 的方程;

(2) 设直线 $y = -2x + m$ 与 y 轴交于点 P , 与轨迹 C 相交于点 Q, R , 且 $|PQ| < |PR|$, 求 $\frac{|PR|}{|PQ|}$ 的取值范围.

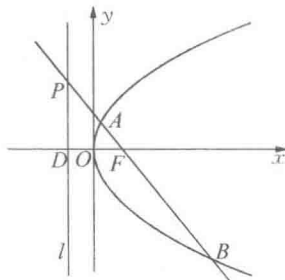


第 4 题

5. (2015 上海宝山)已知点 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, 点 P 是准线 l 上的动点, 直线 PF 交抛物线 C 于 A, B 两点, 若点 P 的纵坐标为 $m (m \neq 0)$, 点 D 为准线 l 与 x 轴的交点.

(1) 求直线 PF 的方程;

(2) 求 $\triangle DAB$ 面积 S 的取值范围.

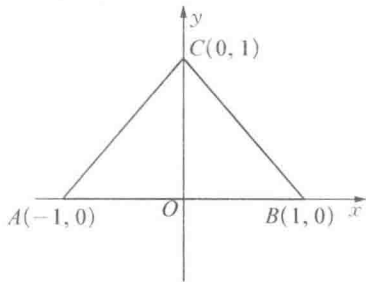


第 5 题

6. (2015 上海浦东) 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$.

(1) 动点 P 在 $\triangle ABC$ 的内部或边界上, 且点 P 到三边 AC 、 AB 、 BC 的距离依次成等差数列, 求点 P 的轨迹方程;

(2) 若 $0 < a \leq b$, 直线 $l: y = ax + b$ 将 $\triangle ABC$ 分割为面积相等的两部分, 求实数 b 的取值范围.



第 6 题



模拟训练

7. (2012 北京西城区) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的一个焦点是 $F(1, 0)$, 且离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设经过点 F 的直线交椭圆 C 于 M, N 两点, 线段 MN 的垂直平分线交 y 轴于点 $P(0, y_0)$, 求 y_0 的取值范围.

8. (2015 上海崇明) 已知椭圆 C 的中心在原点 O , 焦点在 x 轴上, 椭圆的两焦点与椭圆短轴的一个端点构成等边三角形, 右焦点到右顶点的距离为 1.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 是否存在与椭圆 C 交于 A, B 两点的直线 $l: y = kx + m$ ($k \in \mathbf{R}$), 使得 $|\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}|$ 成立? 若存在, 求出实数 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

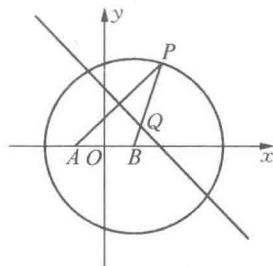


创新强化

9. 如图, 已知点 $A(-2, 0)$, 点 P 是 $\odot B: (x-2)^2 + y^2 = 36$ 上任意一点, 线段 AP 的垂直平分线交 BP 于点 Q , 点 Q 的轨迹记为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 已知 $\odot O: x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 的切线 l 总与曲线 C 有两个交点 M, N , 并且其中有一条切线满足 $\angle MON > 90^\circ$, 求证: 对于任意一条切线 l 总有 $\angle MON > 90^\circ$.



第9题

基本问题 3 最值问题

命题规律

圆锥曲线背景下的最值问题,可很好地考察“坐标法”思想,又便于与其他知识(如:函数、方程、三角、向量、不等式、导数、平面几何等)综合,符合在知识交汇点命题考查学生能力的原则,所以是高考数学中的热点问题.解决这类问题不仅要紧紧把握圆锥曲线的定义,而且要善于综合应用代数、平面几何、三角等相关知识,特别是要转化为求函数的最值问题.



真题直击

1. (2014 山东)已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , A 为 C 上异于原点的任意一点,过点 A 的直线 l 交 C 于另一点 B ,交 x 轴的正半轴于点 D ,且有 $|FA| = |FD|$. 当点 A 的横坐标为 3 时, $\triangle ADF$ 为正三角形.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若直线 $l_1 \parallel l$, 且 l_1 和 C 有且只有一个公共点 E .

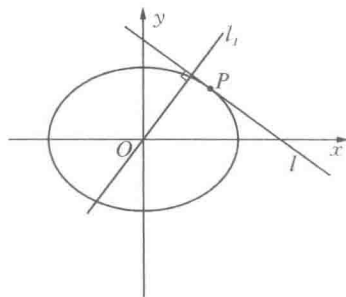
① 证明直线 AE 过定点, 并求出定点坐标;

② $\triangle ABE$ 的面积是否存在最小值? 若存在, 请求出最小值; 若不存在, 请说明理由.

2. (2014 浙江)如图, 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 动直线 l 与椭圆 C 只有一个公共点 P , 且点 P 在第一象限.

(1) 若直线 l 的斜率为 k , 试用 a, b, k 表示点 P 的坐标;

(2) 若过原点 O 的直线 l_1 与 l 垂直, 证明: 点 P 到直线 l_1 的距离的最大值为 $a - b$.



第 2 题

3. (2014 四川) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 4, 其短轴的两个端点与长轴的一个端点构成正三角形.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设 F 为椭圆 C 的左焦点, T 为直线 $x = -3$ 上任意一点, 过 F 作 TF 的垂线交椭圆 C 于点 P, Q .

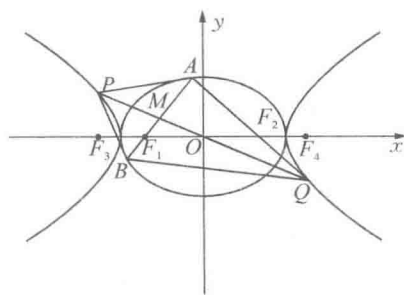
(i) 证明: OT 平分线段 PQ (其中 O 为坐标原点);

(ii) 当 $\frac{|TF|}{|PQ|}$ 最小时, 求点 T 的坐标.

4. (2014 湖南) 如图, O 为坐标原点, 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 e_1 ; 双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_3, F_4 , 离心率为 e_2 . 已知 $e_1 e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $|F_2 F_4| = \sqrt{3} - 1$.

(1) 求 C_1, C_2 的方程;

(2) 过 F_1 作 C_1 的不垂直于 y 轴的弦 AB , M 为 AB 的中点. 当直线 OM 与 C_2 交于 P, Q 两点时, 求四边形 $APBQ$ 面积的最小值.



第 4 题