复变函数论

The Theory of Functions of A Complex Variable

张太忠　编著

科学出版社

复变函数论

张太忠　编著

王　朝　成亚萍　王琛颖　参编
刘红爱　丁　建　成　荣

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书系统介绍了复变函数的基本理论，包括复数的运算、复变函数的概念、解析函数的概念、解析函数的柯西积分理论、魏尔斯特拉斯级数理论、黎曼共形映射理论以及解析函数空间的有趣介绍等,体现了基本的复分析思想方法，适合于从事国际热门的解析函数空间上函数理论研究和算子理论研究的研究生在本科阶段的基本素养的培养。由于函数空间理论密切联系于工科电子通信类学科的信息处理与信号处理研究，故而也适合于电子通信类学科的面上公共课“复变函数”课程的教学。

本书通俗易懂、语言精炼、便于自学与查阅。可作为高等院校数学类专业、大气科学类专业、电子通信类专业等本科生教材,也可供相关领域科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数论/张太忠编著. —北京：科学出版社, 2016.3
ISBN 978-7-03-047780-4

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①复变函数 Ⅳ. ①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 054353 号

责任编辑: 黄　海　于盼盼　许　蕾 / 责任校对: 姜　萍
责任印制: 张　倩 / 封面设计: 许　瑞

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2016 年 3 月第　一　版　开本: 787 × 1092　1/16
2016 年 3 月第一次印刷　印张: 7 3/4
字数: 200 000

定价: 35.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

复变函数论的研究从复数开始至今已有四百多年的历史. 16 世纪, Cardan 解三次方程时, 产生了负数开平方的思想. 17 世纪, 实现了从实数域到复数域的过渡及复数与平面向量的对应. 18 世纪, Euler 系统建立了复数理论. 19 世纪至 20 世纪初, 系统形成了以魏尔斯特拉斯（Weierstrass）级数理论、柯西积分理论、黎曼共形映射理论为主体的强有力的学科. 从 20 世纪 20 年代至今, 复变函数论得到了长足的发展, 进一步形成了拟共形映射、黎曼曲面、泰希米勒空间、复动力系统、亚纯函数值分布、复域上微分方程、离散群几何、单叶函数、奇异积分与边值问题、解析函数空间与算子理论、位势理论、多复变函数论、复流形等十多个近现代研究分支, 此外复变函数论还可以在应用性学科如电子通信、信号处理、弹性力学、大气雷电等方面有广泛的应用.

本科的复变函数论以柯西、黎曼和魏尔斯特拉斯的理论为主体进行教学活动. 复变函数的图像必须取在两个复平面上, 画图复杂, 故而复变函数论的教学必须既要有其分析的特征, 还要有几何可视化的特征, 更要有面向未来新学科趋势 —— 几何函数论对函数空间的应用的特征. 北大庄圻泰教授的《复变函数》, 内容全面, 系统完整, 刻画严谨, 但其过于广博的内容与现代较少的教学学时不适应. 北大李忠教授的《复变函数》, 内容精练有趣, 很有启发性. 钟玉泉的《复变函数论》内容通俗、讲解详尽, 受到普遍的欢迎, 但是语言繁琐, 几何函数论定理不够突出, 不能满足现代课程学时少且必须面向现代化研究的教学要求. 作者在工科大学长期从事复变函数论的教学与研究工作, 因此写作本书的目的就是在作者及其工作团队的努力下寻求完成一本既能体现主要的复分析思想方法, 特别是几何函数论精练清楚, 又表述清晰易懂, 同时面向现代化的后续研究特别是侧重于解析函数空间及其对信号处理的应用的复变函数论的教材, 以造福广大学生和相关工程科技人员. 本书除了供数学类的本科生使用以外, 还可以供大气科学类、电子通信类专业的本科生使用.

本书第一章介绍了复数与复平面; 第二章介绍了复变函数与解析函数, 包括应用柯西-黎曼条件方法对复变函数的解析性的判定、初等单值解析函数、初等多值解析函数; 第三章介绍了柯西积分定理和柯西积分公式及其应用, 包括复积分的定义和计算, 单连通和多连通区域的柯西积分定理、柯西积分公式、高阶导数公式、柯西不等式、刘维尔定理、判断函数解析性的摩勒拉定理、最大模原理, 作为最大模原理的应用证明了后来影响深远的许瓦茨引理, 还介绍了调和函数与解析函数的关系; 第四章在解析函数项级数理论的基础上介绍了解析函数的泰勒展开式和唯一性定理; 第五章介绍了解析函数的洛朗展开式以及孤立奇点的分类与判定; 第六章介绍了留数定理、留数对实积分计算的应用、著名的辐角原理和鲁歇定

理、Huiwitz 定理等；第七章介绍了共形映射的概念, 系统介绍了最常见和最常用的共形映射 —— 分式线性映射的特征, 不加证明地给出了单复变函数论中最重要的定理 —— 黎曼映射定理, 作为共形映射的应用给出了许瓦茨引理的一个改进形式 —— 许瓦茨–皮克引理, 还介绍了国际上新近得到的边界上的许瓦茨引理；第八章介绍了在复分析研究中强有力的研究工具 Blaschke 乘积；作为第七章和第八章的应用, 第九章介绍了两个十分有趣又十分活跃的解析函数空间（解析函数空间又叫全纯函数空间）: Bloch 空间和 Dirichlet 空间, 作为全纯函数空间的入门, 先学习作为 Möbius 不变函数空间的 Bloch 空间和既是 Möbius 不变空间又是再生核空间的 Dirichlet 空间是十分有益的.

作者衷心感谢南京信息工程大学副校长周伟灿教授、数学与统计学院院长蒋勇教授和教务处特别是教材科的领导对本书出版的大力支持. 科学出版社的于盼盼女士和黄海先生等先后策划并促成了本书在科学出版社的出版. 本书责任编辑许蕾女士对本书的书稿作了精心的编辑加工, 纠正了作者的一些疏忽, 使得拙著更加完善. 在这里, 作者对他（她）们表示诚挚的感谢!

作者深知自己的水平有限, 书中定有一些疏漏与不当之处, 诚恳欢迎使用本书的教师与学生提出批评与指正.

张太忠

20116 年 3 月

目　　录

第 1 章　复数与复平面

1.1　复数的定义与四则运算

定义 1.1　形如 $z=x+iy$ 的数叫复数, 其中 x、y 为实数, $i=\sqrt{-1}$ 为虚根单位. x 称为复数的实部, 记作 $\mathrm{Re}z$, y 称为复数的虚部, 记作 $\mathrm{Im}z$. 特别地, 当 $y=0$ 时 $z=x$ 为实数; 当 $y\neq 0$ 时, $z=x+iy$ 称为虚数, $z=iy$ 称为纯虚数.

定义 1.2　设 $z_j=x_j+iy_j\ (j=1,2)$. 若 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$, 则称 z_1 与 z_2 相等, 记为 $z_1=z_2$.

对于两个复数的加减乘除四则运算定义如下:

定义 1.3　设 $z_j=x_j+iy_j\ (j=1,2)$. 规定:

(1) $z_1+z_2=(x_1+x_2)+i\,(y_1+y_2)$,

(2) $-z=-x-iy$,

(3) $z_1-z_2=(x_1-x_2)+i\,(y_1-y_2)$,

(4) $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i\,(x_1y_2+x_2y_1)$,

(5) 当 $z_2\neq 0$ 时, 可以定义除法运算:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

减法可以作为加法的逆运算, $z_1-z_2=\tau$ 当且仅当 $z_1=z_2+\tau$, 因而 (3) 可由 (1) 根据定义 1.2 推出. 除法可以作为乘法的逆运算, $\dfrac{z_1}{z_2}=\zeta$ 当且仅当 $z_1=z_2\zeta$, 因而 (5) 可由 (4) 根据定义 1.2 推出. 对于除法运算, 在本节还有一个利用共轭运算计算的简便方法, 具体的除法计算一般都使用此简便方法.

由定义 1.2, 定义 1.3 易于验证复数的加法满足交换律、结合律, 复数乘法满足交换律、结合律, 以及乘法对加法的左、右分配律. 所有有穷复数构成的复数集在上述加法、乘法运算下满足代数学中域的条件, 因而构成复数域, 记为 C. 在复数域中, 复数不可以比较大小, 原因是复数域不是有序域, 严格的证明见代数学专著. 读者可以举例得出矛盾, 复数集中单纯的顺序关系可以存在, 这种顺序关系在运算中不再保持, 故复数域中不可比较大小.

定义 1.4　设 $z=x+iy$, 则称非负实数 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ 为复数 z 的模. 显然, $z=0$ 当且仅当 $|z|=0$. 还有下述不等式成立:

$$|x|\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|,\quad |y|\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|.$$

模有穷, 即满足 $|z| < +\infty$ 的复数 z, 叫做有穷复数, 因而复数域可以写成:$C = \{z \mid |z| < +\infty\}$. 又规定 $z = \infty$ 当且仅当 $|z| = +\infty$, 显然 $\infty \notin C$.

定义 1.5　设 $z = x + iy$, 则称 $\bar{z} = x - iy$ 为 z 的共轭复数. 显然 z 与 $\bar{z}$ 互相为共轭复数.

易于验证共轭运算有以下性质:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2,$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad |z|^2 = z\bar{z},$$

$$\mathrm{Re}z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

利用共轭运算可以给出复数除法的一个简便计算方法:

$$\zeta = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

上述方法把除法化为乘法, 而乘法运算只要利用分配律计算即可, 具体计算中好用好记, 十分方便.

定理 1.1　$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

证明　$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2$.

显然, $|z_1 \bar{z}_2| = |z_1|\,|z_2|$. 证毕.

定理 1.2　$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$(称为三角不等式).

证明

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\
&= z_1 \bar{z}_1 + (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + z_2 \bar{z}_2 \\
&= |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \\
&\leqslant |z_1|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| + |z_2|^2 \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2,
\end{aligned}$$

从不等式 $|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_2|$, 立即有 $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2|$, 对调 z_1、z_2 位置有 $|z_2| - |z_1| \leqslant |z_1 + z_2|$. 证毕.

归纳可证:$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.

1.2　复数的表示

复数 $z = x + iy$ 为代数表示, 还有三角表示、指数表示, 几何上可以表示为复平面上的点和矢量以及黎曼球面上的点.

取建立笛卡儿直角坐标系 Oxy 平面, 将复数 $z = x + iy$ 与点 $P(x, y)$ 一一对应, 实数 x 与 x 轴上点 $(x, 0)$ 一一对应 (因而 x 轴称为实轴), 纯虚数 iy 与 y 轴上点 $(0, y)$ 一一对应 (因而 y 轴称为虚轴), 将建立这样对应关系的 Oxy 平面称为复平面, 仍记为 C. 今后, 复数 z 和复平面 C 上的点 z 不加区分.

对于复平面上复数 $z = x + iy$, 还可以建立与矢量 $\overrightarrow{OP}$ 的一一对应, 其中 O 为原点, P 即 $P(x, y)$. 从而复数的加减运算对应于矢量的加减运算, 参见图 1.1,

$$|z_2 - z_1| = \left|\overrightarrow{OP}_2 - \overrightarrow{OP}_1\right| = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

从而可知 $|z_2 - z_1|$ 表示两点 z_1、z_2 之间的欧氏距离.

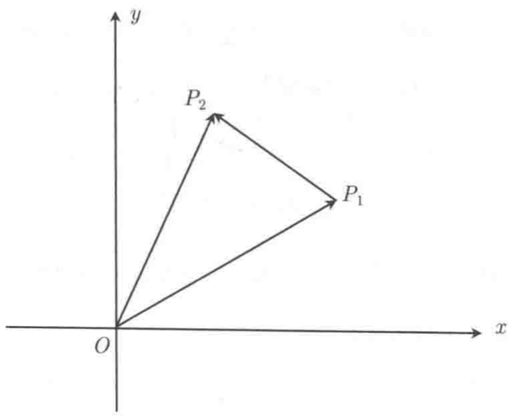

图 1.1

设 $z = x + iy \neq 0, \infty, P$ 点即 $P(x, y)$, x 轴正向与矢量 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角 $\theta = \operatorname{Arg} z$, 称为 z 的辐角 (或幅角), 从 x 轴逆时针旋转到 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角 θ 规定为正值, 顺时针旋转的角度为负值. 当 $-\pi < \theta \leqslant \pi$ 时, θ 称为复数 z 的辐角主值或主辐角, 记为 $\theta = \arg z$. 当 $z = 0, \infty$ 时没有辐角. 显然, $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

记模 $|z| = r, \theta = \operatorname{Arg} z$, 则复数 z 的实部和虚部表示为 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 从而得到复数的三角表示:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \text{其中} r \geqslant 0.$$

利用欧拉公式: $\cos\theta + \sin\theta = e^{i\theta}$ 得复数的指数表示:

$$z = re^{i\theta}, \text{其中} r \geqslant 0.$$

在复数的三角表示或指数表示 $z_j = r_j e^{i\theta_j}\ (j = 1,\ 2)$ 之下, $z_1 = z_2$ 当且仅当 $r_1 = r_2$ 且 $\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$, k 为整数.

可以算出下列一般公式 (z 都不在坐标轴上): 当 z 位于第一、第四象限时 $\arg z = \arctan\dfrac{y}{x}$; 当 z 位于第二象限时 $\arg z = \arctan\dfrac{y}{x} + \pi$; 当 z 位于第三象限时 $\arg z = \arctan\dfrac{y}{x} - \pi$. 这三

个计算公式的证明作为思考题.

例 1.1　求出下列复数的三角表示和指数表示.

(1) $\dfrac{i}{1+i}$;　　(2) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2$.

解　(1) 原式 $=\dfrac{i\,(1-i)}{(1+i)\,(1-i)}=\dfrac{1+i}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}i}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$,

(2) 原式 $=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2=e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$.

定理 1.3　(1) $|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|$,　(2)$\mathrm{Arg}\,(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2$.

证明　用复数的三角表示或指数表示给出证明. 设 $z_j=r_je^{i\theta_j}$ $(j=1,\ 2)$, 则

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2\left\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i\,(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\right\}\\&=r_1r_2\left\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right\},\ r_1r_2>0,\end{aligned}$$

所以

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1|\,|z_2|,$$

$$\mathrm{Arg}\,(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2.$$

定理 1.3 证毕.

定理 1.4　设 $z_2\neq 0$, 则

(1)$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$,　(2)$\mathrm{Arg}\,\dfrac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{Arg}\,z_2$.

证明　只要证明 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right||z_2|=|z_1|$, $\mathrm{Arg}\,\dfrac{z_1}{z_2}+\mathrm{Arg}\,z_2=\mathrm{Arg}\,z_1$, 由定理 1.3, 显然得证. 定理 1.4 证毕.

归纳可证:

$$|z_1z_2\cdots z_n|=|z_1|\,|z_2|\cdots|z_n|,$$

$$\mathrm{Arg}\,(z_1z_2\cdots z_n)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2+\cdots+\mathrm{Arg}\,z_n.$$

思考题: 复数乘法有何几何意义? 除法有何几何意义? 这一点在第二章和第七章有详细的论述.

复数的球面表示. 建立一个三维的笛卡儿直角坐标系 $Oxyw$, 三个坐标轴的正方向符合右手系, 以原点 $O\,(0,0,0)$ 为中心, 1 为半径的球面 $S=\{(x,y,w):x^2+y^2+w^2=1\}$ 称为黎曼球面, 点 $N\,(0,0,1)$ 称为北极 (图 1.2). 平面 Oxy 看作复平面 C, 在复平面 C 上任取一点 $z=x+iy$, 连接 z 点与北极 N 交黎曼球面 S 于 P 点, 则在集合 $S\backslash\{N\}$ 与复平面 C 之间, 点 P 与点 z 建立了一一对应关系, 将无穷远点 ∞ 与北极 N 对应, 从而在黎曼球面 S 与扩充复平面 $\bar{C}=C\cup\{\infty\}$ 之间建立了一一对应的关系, 扩充复平面 $\bar{C}$ 上点可以用黎曼球面上点来表示, 扩充复平面上两点之间的距离可以用黎曼球面上两点之间的距离来表示.

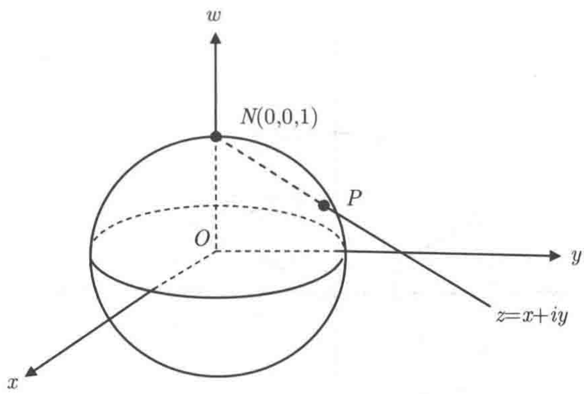

图 1.2

1.3 乘幂与方根运算

设 $z = re^{i\theta}$, 其中 $r > 0$, n 为正整数, 则由定理 1.3 知

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

特别地, 当 $r = 1$ 时, 得到 De Moivre 公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

定义 1.6 设 $z \neq 0, \infty$, 正整数 $n \geqslant 2$, 若存在复数 w, 使得 $w^n = z$, 则称 w 为 z 的 n 次方根, 记为 $w = \sqrt[n]{z}$.

设 $z = re^{i\theta}, w = \rho e^{i\varphi}$, 由 $\rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}$ 可知

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k\text{为整数}.$$

所以 $w_k := \left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, k$ 为整数.

注意到 $\dfrac{w_{k+1}}{w_k} = e^{i\frac{2\pi}{n}}, w_0 = w_n$, 故 z 的 n 次方根 w_k 分布在以原点为圆心、$\sqrt[n]{r}$ 为半径的同一个圆周 Γ 上 (图 1.3), 相邻两根相差辐角 $\dfrac{2\pi}{n}$, 从而互异的方根恰好有 n 个, 一般记为

$$w_k := \left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

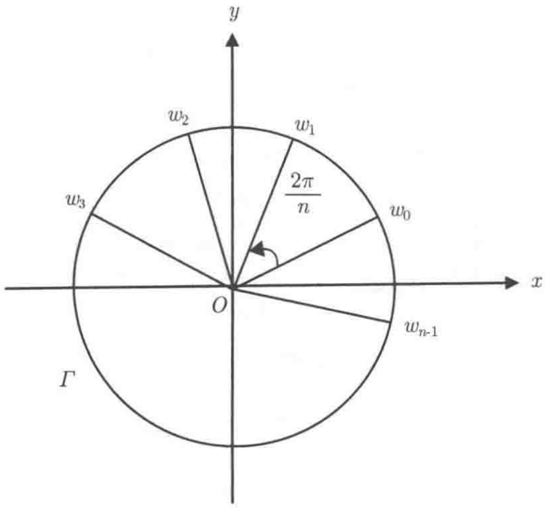

图 1.3

1.4 复平面上的点集

定义 1.7 以 z_0 为中心, $\rho > 0$ 为半径的圆盘 $\{z \in C : |z - z_0| < \rho\}$ 称为点 z_0 的以 ρ 为半径的邻域, 记为 $U(z_0, \rho)$, 简记为 $U(z_0)$.

定义 1.8 设点集 $E \subset C$, $z_0 \in C$.

(1) 若存在一个邻域 $U(z_0)$, 使得 $U(z_0) \subset E$, 则称 z_0 点为点集 E 的内点, 记为 $z_0 \in \mathring{E}$, 其中 $\mathring{E}$ 为 E 所有内点的集合, 称为 E 的内部. 若 E 的每一点都为内点, 则称 E 为开集.

(2) 若 z_0 的任意邻域内都含有 E 的无穷多个点, 则称 z_0 为点集 E 的聚点, 记为 $z_0 \in E'$, 其中 E' 为 E 所有聚点的集合, 称为 E 的导集. 若 $E' \subset E$, 则称 E 为闭集.

(3) 若 z_0 的任意邻域内同时含有 E 中的点和 E 以外的点, 则称 z_0 为 E 的边界点, 记为 $z_0 \in \partial E$, 其中边界 ∂E 为 E 所有边界点的集合.

(4) 若非聚点 $z_0 \in E$, 则称 z_0 为 E 的孤立点; 若非聚点 $z_0 \notin E$, 则 z_0 称为 E 的外点.

规定空集 $\varnothing$ 为开集. 复平面 C, 邻域和 $\mathring{E}$ 为开集.

E', $\bar{E} = E \cup E'$, ∂E 为闭集. 孤立点必为边界点, 孤立点必为非聚点. 设全集为 C, 则开集的补集为闭集. 闭集的补集为开集, 上述结论的证明略.

定义 1.9 设 $x(t), y(t)$ 为区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续的实值函数, 则称曲线 $\gamma{:}z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ 为复平面上一条连续曲线. 若规定起点和终点, 则称 γ 为有向曲线. 若曲线 γ 的端点重合, 则称 γ 为闭曲线; 若曲线 γ 的中间没有相交的重合的点, 则称 γ 为简单曲线或 Jordan 曲线. 若在 $[\alpha, \beta]$ 上 $x'(t)$, $y'(t)$ 连续且 $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$, 则称 γ 为光滑曲线.

定义 1.10 设 $D \subset C$, $D \neq \varnothing$, 若 D 为连通的开集, 则称 D 为区域. 所谓 D 的连通性指弧连通. 若存在 $\{|z| \leqslant R\}$, 使得 $D \subset \{|z| \leqslant R\}$, 则称 D 为有界域. 若沿着区域 D 的边界

曲线 γ 向前行走时, 区域总在 γ 的左边, 则称此方向为边界曲线 γ 的正方向, 否则称为负方向. 若区域 D 内任何一条简单闭曲线的内部都含于 D 内, 则称 D 为单连通区域, 否则 D 称为多连通区域.

例 1.2 直线和圆周的表示.

解 对于直线的方程, 有三个方法:

方法一 设 z_1、z_2 为复平面上不同的两点, 则通过此两点的直线 l 的方程可表示为 $z = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $-\infty < t < +\infty$, t 为参数. 这是由于矢量 $\overrightarrow{z_1 z}$ 与矢量 $\overrightarrow{z_1 z_2}$ 平行, 故 $\overrightarrow{z_1 z} = t\overrightarrow{z_1 z_2}$(图 1.4).

方法二 设 z_1、z_2 为直线 l 的一对对称点, 则直线 l 的方程可表示为 (图 1.5)

$$l: |z - z_1| = |z - z_2|.$$

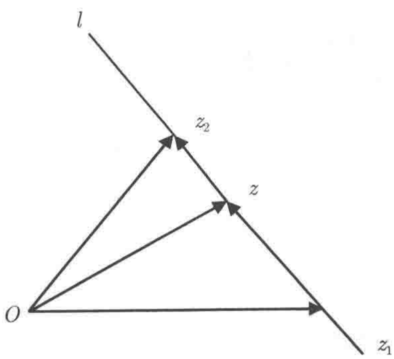

图 1.4

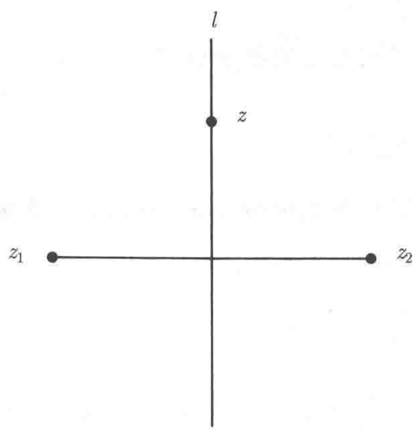

图 1.5

方法三 已知直线方程的实分析表示为 $ax + by + c = 0$, 其中 x、y 为直线 l 上点 z 的实部和虚部, a、b、c 为实数, 且 a、b 不全为零. 将 $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}, y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$ 代入上式, 即得直线 l 方程为

$$\bar{A}z + A\bar{z} + B = 0$$

其中,$A = a + bi \neq 0$, $B = 2c$.

对于以 z_0 为圆心, 以 $R > 0$ 为半径的圆周 $\varGamma$ 的方程, 常用的是 $|z - z_0| = R$.

定义 1.11 设 $\{z_n\}$ 为复平面 C 上一个点列, $z_n = a_n + b_n i$, $p = a + bi$ 为复数, 若对于任意的正数 $\varepsilon > 0$, 存在相应的正整数 N, 当 $n > N$ 时, 有 $|z_n - p| < \varepsilon$ 成立, 则称当 $n \to \infty$ 时, z_n 收敛到 p, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = p$.

由 $|a_n - a| \leqslant |z_n - p| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|, |b_n - b| \leqslant |z_n - p|$ 可知,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = p \text{ 当且仅当 } \lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

利用实分析的相应定理易于证明下述定理.

定理 1.5(柯西收敛准则)　复数数列 $\{z_n\}$ 收敛的充分且必要条件为对于任意的正数 $\varepsilon > 0$, 存在相应的正整数 N, 当 m、$n > N$ 时, 有 $|z_n - z_m| < \varepsilon$ 成立.

定理 1.6(致密性定理)　设 $\{z_n\}$ 是一个有界复数数列, 则 $\{z_n\}$ 存在收敛子列.

定理 1.7(聚点定理)　设 E 为复平面上有界的无穷点集, 则 E 必有聚点, 即 $E' \neq \varnothing$.

对于复数点集的闭集套定理和 Heine-Borel 有限覆盖定理仍成立, 其表述读者自行给出.

习　题　1

1. 求下列复数的实部、虚部与共轭复数.

(1) $z = \dfrac{25}{3-4i}$;　　　　(2) $z = \dfrac{1}{1+i} - \dfrac{3i}{1-i}$.

2. 求出下列复数的模和辐角.

(1) $\dfrac{i}{(i-1)(i-2)}$;　　　　(2) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

3. 试求下列各式中的 x 与 y (x, y 都是实数).

(1) $(1+i)x + (3-5i)y = 1-3i$;

(2) $\dfrac{x+1+i(y-3)}{5+3i} = 1+i$.

4. 设 $\dfrac{x+iy}{x-iy} = a+ib$, 求 a^2+b^2(x, y, a, b 为实数).

5. 将下列复数化成三角表示式和指数表示式.

(1) $-i$;　　　　(2) -2;

(3) $1+\sqrt{3}i$;　　　　(4) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)(1+i)}{(\sqrt{3}-i)(1-i)}$.

6. 设 $|z| = \sqrt{5}$, $\arg(z-i) = \dfrac{3}{4}\pi$, 求复数 z.

7. 求下列各式的值.

(1) $(1+i\sqrt{3})^8$;　　(2) $\sqrt[6]{-1}$;　　(3) $\sqrt[4]{1-i}$.

8. 设 $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}, n \geqslant 2$. 证明: $1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0$.

9. 如果 $|z| = 1$, 试证: 对任何复数 a 与 b 有 $\left|\dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right| = 1$.

10. 设 $|a| < 1, |z| < 1$, 证明下列等式.

$$1 - \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}.$$

11. 证明等式 $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$, 并说明此式的几何意义.

12. 设 z_1, z_2, z_3 三点适合条件: $z_1+z_2+z_3=0$ 及 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$.
证明 z_1, z_2, z_3 是一个内接于单位圆周 $|z|=1$ 的正三角形的顶点.

13. 已知正三角形两顶点为 $z_1=1$ 和 $z_2=2+i$, 求它的第三个顶点.

14. 指出下列各式中点 z 所确定的平面图形, 作出草图. 并说明是不是区域, 若为区域, 指出是单连通域还是多连通域.

(1) $\arg z=\dfrac{\pi}{4}$;　　(2) $|z-1|=|z+1|$;

(3) $1<|z+i|<2$;　　(4) $\mathrm{Re}z>\mathrm{Im}z$;

(5) $\mathrm{Im}z>1$且$|z|<2$;　　(6) $|z-1|>2$;

(7) $\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$ 且 $1<|z|<3$;　　(8) $|z-1|<|z+3|$;

(9)$\mathrm{Re}z^2<1$;　　(10) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|>a, a>0$.

15. 已知两点 z_1 与 z_2, 问下列各点 z 位于何处?

(1)$z=\dfrac{1}{2}(z_1+z_2)$;　　(2)$z=\lambda z_1+(1-\lambda)z_2$ (λ 为实数).

16. 将下列方程 (t 为实参数) 给出的曲线用一个实直角坐标系方程给出.

(1)$z=t(1+i)$;　　(2)$z=a\cos t+ib\sin t$(a, b 是实常数);

(3)$z=t+\dfrac{i}{t}$;　　(4)$z=t^2+\dfrac{i}{t^2}$.

17. 证明: 复数数列 $\{z_n\}$ 收敛的充分且必要条件为对于任意的正数 $\varepsilon>0$, 存在相应的正整数 N, 当 m、$n>N$ 时, 有 $|z_n-z_m|<\varepsilon$ 成立.

18. 证明: 设 $\{z_n\}$ 是一个有界复数数列, 则 $\{z_n\}$ 存在收敛子列.

19. 证明: 设 E 为复平面上有界的无穷点集, 则 E 必有聚点, 即

$$E'\neq\varnothing.$$

第 2 章　复变函数与解析函数

2.1 复变函数

定义 2.1　设 $D \subset C$, 若 $f: D \to \bar{C}$ 为映射, 则称在 D 上确定了一个单值复变函数 $w = f(z), z \in D$, 其中 z 为自变量, w 为因变量, D 为函数 f 的定义域, $f(D)$ 为函数 f 的值域. 若对于 $z \in D$, 有不止一个值 w 与之对应, 则称 f 为多值复变函数, 例如 $w = \mathrm{Arg} z$ 为无穷多值函数, $w = \sqrt[n]{z}$ 为 n 值多值函数, 其中整数 $n \geqslant 2$. 在本文中如不加指明, 均指单值复变函数.

例 2.1　函数 $w = z^2$ 的分析表示.

解　用复数的代数表示、三角表示、指数表示来表示函数的自变量、因变量, 因而函数 $w = z^2$ 还可以表示为:

$$
\begin{aligned}
& w = (x^2 - y^2) + 2xyi, \\
& w = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta), \\
& P(r,\,\theta) = r^2 \cos 2\theta\text{、}Q(r,\,\theta) = r^2 \sin 2\theta, \\
& \rho = r^2\text{、}\varphi = 2\theta + 2k\pi.
\end{aligned}
$$

复变函数 $w = f(z) = u + iv$ 的图像表示, 因为 (x, y, u, v) 表达了四维空间, 因而一个复平面不能表达出复变函数的图像, 取两个复平面 z 平面和 w 平面 (图 2.1), z 平面上取函数自变量的可取的点集或曲线 γ, w 平面上刻画自变量的所取点集 γ 在函数 f 这个映射作用下的像即函数因变量所取的点集 $f(\gamma)$.

例 2.2　函数 $w = z^2$ 把 z 平面上下列曲线映射为 w 平面上何种曲线?(1) 以原点为心, 2 为半径的上半圆周; (2) 双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 和双曲线 $xy = 1$.

解　(1) $w = z^2$ 化为 $\rho = r^2$, $\varphi = 2\theta$. 故 $w = z^2$ 将 z 平面上以原点为心, 2 为半径的上半圆周映射为 w 平面上以原点为心, 4 为半径的圆周 (图 2.2).