固体力学问题的自然单元法

NATURAL ELEMENT METHOD FOR SOLID MECHANICS PROBLEMS

章 青 江 涛 丁道红 夏晓舟 著

科学出版社

固体力学问题的自然单元法

章　青　江　涛　丁道红　夏晓舟　著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

自然单元法是一种求解偏微分方程的无网格数值方法。与大多数其他的无网格方法不同，自然单元法形函数具有严格的插值性能，满足单位分解条件和线性完备性，可以方便地直接施加本质边界条件。自然单元法在理论和应用方面的成功吸引了国内外众多研究者的注意。

本书在前人工作的基础上，围绕固体力学的若干领域，对自然单元法在其中的模型和数值计算方法进行了研究。内容涉及自然单元法的形函数构造、试函数的单位分解增强、控制方程等效弱形式及其离散化、数值积分方案的选择、自适应方案等，并应用于平衡问题、动力学问题、材料非线性问题、几何非线性问题、断裂力学问题、中厚板弯曲问题以及不确定性问题等。通过算例分析和比较，验证了自然单元法所建立模型的正确性，展示了自然单元法的广阔应用前景。

本书可作为高等院校和科研院所相关专业研究生的教学参考书，也可供有关科研、设计和工程部门特别是从事数值计算研究的科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

固体力学问题的自然单元法/章青等著. —北京：科学出版社，2015.11

ISBN 978-7-03-046361-6

Ⅰ.①固… Ⅱ.①章… Ⅲ.①固体力学—自然—有限元法 Ⅳ.①O34

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 269994 号

责任编辑：惠 雪 曾佳佳／责任校对：何艳萍
责任印制：赵 博／封面设计：许 瑞

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

天津新科印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 11 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2015 年 11 月第一次印刷 印张：17 1/4
字数：340 000

定价：89.00 元

前　言

20 世纪 60 年代初问世的有限单元法因其理论基础严密、物理概念清晰，加上其方便性、实用性和有效性，得到了快速发展，迅速从结构的强度分析计算扩展到几乎所有的科学技术领域，成为一种丰富多彩、应用广泛并且实用高效的数值分析方法，业已成为解决科学和工程技术领域力学问题最强有力的工具。

随着问题研究的不断深入，有限单元法也逐渐暴露出一些弱点。例如：有限单元法的离散和插值是基于网格的，需要较大的前处理工作量；对于无限域问题，有限单元法通常只能取有限域进行计算，存在区域的截断误差，如果是波动问题，还需要对截断边界进行特殊处理；通常的有限单元法的应力精度较低，对于应力集中问题存在网格尺寸效应；对于大变形问题，网格还会产生畸变；对于裂纹扩展模拟和冲击爆炸等破坏分析问题，则涉及网格的重构，给问题的研究带来很大的不便。

鉴于上述情况，国内外学者一直在探索新的数值方法，目的就是改造传统有限单元法的内部结构，摆脱网格的束缚，使其更加灵活和有效，从而适合处理上述问题。近年来，相继提出了各种无网格数值方法，本书所涉及的自然单元法在本质上也是一种求解偏微分方程的无网格数值方法。

自然单元法既具有无网格方法和经典有限元方法的优点，又克服了两者的一些缺陷，与其他大多数无网格方法不同，自然单元法形函数具有严格的插值性能，满足单位分解条件和线性完备性，可以方便地直接施加本质边界条件。自然单元法最早的文献可追溯到 Braun 和 Sambridge 于 1995 年在著名期刊*Nature*上发表的*A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids*一文，该文首先将基于 Sibson 插值的自然单元法应用于求解高度不规则网格的偏微分方程，并指出自然单元法可用于有限单元法的应用领域。从此这种以 Voronoi 图为几何基础的数值方法得到了学术界极大的关注，被广泛地应用于包括弹塑性大变形、断裂力学、板壳力学、流体力学、电磁场和其他物理现象分析的众多领域。

本书是第一著者和他所指导的博士研究生丁道红、夏晓舟以及安徽工业大学江涛博士多年来在自然单元法方面集体研究的成果。全书共分为 11 章，内容包括：自然单元法的形函数构造、试函数的单位分解增强、控制方程等效弱形式及其离散化、数值积分方案的选择、自适应方案等，并将自然单元法应用于材料边界、板壳问题、材料非线性分析、几何非线性分析、动力分析、断裂力学问题以及区间分析等固体力学领域。

本书的研究工作得到了国家重点基础研究发展计划课题（2007CB714104）、国家自然科学基金重点项目（11132003）和面上项目（10972072）的支持，第一著者指导的硕士研究生赵旸和胡海霞也参加了相关的研究工作，硕士研究生郁杨天对书中的插图进行了编排和处理，河海大学力学学科对本书的出版给予了经费资助，在此表示衷心的感谢。同时，对在写作过程中参考的国内外文献作者们一并表示感谢。

限于作者的学识和水平，书中难免存在诸多不足甚至错误，恳请读者不吝指出。

章　青
2015 年 8 月

目　录

第 1 章　绪　　论

1.1　引　　言

科学和工程中的很多问题，如固体力学中的位移场和应力场分析、电磁学中的电磁场分析、振动特性分析、传热学中的温度场分析、流体力学中的流场分析等，都可归结为在给定边界条件下求解常微分或偏微分控制方程的问题。但能用解析方法求出精确解的只是方程性质比较简单且几何边界相当规则的少数问题，对于大多数工程技术问题，由于定解问题的复杂性难以得到解析解。这类问题的解决途径之一是引入简化假设，将方程和边界条件简化为能够处理的情形，从而得到其在简化状态下的解，但这种方法只在有限的情况下是可行的，因为过多的简化可能导致不正确的结果。因此，人们在广泛吸收现代数学、力学理论的基础上，发展了以计算机技术为基础的各种数值模拟方法，并成为求解科学和工程问题非常重要和有效的途径。目前在工程技术领域内常用的数值模拟方法有：有限差分法 (finite difference method, FDM)、有限单元法 (finite element method, FEM)、边界元法 (boundary element method, BEM) 和离散单元法 (discrete element method, DEM) 等，但就实用性和应用的广泛性而言，有限单元法产生的影响最为深远。

有限差分法用差分方程代替微分方程，从数学上进行近似，把求解微分方程的问题改换成为求解代数方程的问题。由于计算精度和求解适用性等原因，有限差分法在固体力学领域已较少应用。有限单元法基于里茨法和分片近似的思想，将原结构划分为许多小块 (单元)，用这些离散单元的集合体代替原结构，用近似函数表示单元内的真实场变量，从而给出离散模型的数值解。由于是分片近似，可采用较简单的函数作为近似函数，有限单元法具有较好的灵活性、适用性与通用性。边界元法是继有限单元法之后的一种数值方法，该法在所求解区域的边界上划分单元，用有限个边界结点值代替无限多个边界点上的值，在域内采用奇异解 (或称为基本解)，将有限个奇异解叠加并在边界结点上满足边界条件，据此求出奇异解中的待定量。边界元法具有半解析和降维等优点，但建立边界积分方程需要基本解，且难以处理复杂问题对应的边界积分方程中的奇异积分。离散单元法最早是由 Cundall 在 20 世纪 70 年代提出的一种数值计算方法[1]，特别适用于节理岩体的大位移、大变形分析。该法以受节理裂隙切割或分离的块体为出发点，将研究区域划分为单元，单元受节理不连续面控制。在运动过程中，单元结点之间可以分离，单元之间

的作用力可以根据力和位移的关系得到，而单元的运动则根据其所受的不平衡力和不平衡力矩的大小，按牛顿定律求出。离散单元法最初的单元形式是刚体块体模型，适合于求解岩体应力水平较低且可以不考虑岩石弹性变形的情况。

有限单元法问世以来，经历了产生、发展和不断完善的阶段，有限元理论与计算机科学的完美结合成为现代力学的重要标志。特别是 20 世纪 70 年代以后，随着计算机和软件技术的发展, 有限元方法进入了发展的鼎盛时期，其应用范围几乎扩展到了工程科学的各个领域，从结构静力分析发展到动力问题、稳定性问题，从平面问题发展到空间问题、板壳问题。研究的对象从线弹性材料扩展到塑性、黏弹塑性和复合材料等，从小变形的弹性问题发展到大变形的非线性问题，由结构计算分析扩展到结构优化设计问题，由固体力学扩展到流体力学继而又渗透到热传导、电磁场等非力学领域，使得有限单元法成为 20 世纪数值计算方法乃至力学领域中最重要的研究成果。

尽管有限单元方法、边界元方法等传统的数值方法取得了巨大的进展，但随着研究问题的不断深入，传统的基于网格的数值方法面临着许多需要解决的问题。对于传统的有限单元法而言，面临的主要问题包括：

(1) 用有限单元法求解问题时，需要对问题域进行网格划分，而划分网格是一件费时的工作，许多人力都花费在了划分网格上，真正用于有限单元计算分析的时间并不太多。

(2) 由于有限单元法采用了分片连续的形函数，常用形函数的阶次较低，使得有限单元法所求得的应力精度较低，且应力是非连续的，因此在有限元中需要复杂和费时的后处理过程。

(3) 当用有限单元法来处理大变形问题时，由于网格产生畸变而导致计算结果失真。

(4) 因为需要不断地增减网格，使得有限单元法难以模拟裂纹沿任意复杂路径的动态扩展。

(5) 有限单元法是基于连续介质力学理论建立计算模型，这使得它难以模拟爆炸冲击等破坏力学问题。

(6) 有限单元法在处理上述的问题时若网格发生畸变扭曲，重新划分网格是一个难题，特别是对复杂的三维有限元网格划分，至今仍然是一个富有挑战性的问题。

鉴于上述情况，国内外学者一直在探索新的数值方法，目的就是改造传统有限元方法的内部结构，摆脱网格的束缚，使其更加灵活和有效，从而适合处理上述问题。在此背景下，近年来各种无网格数值方法相继提出。无网格法是通过一组离散的点来构造逼近函数，而这些点是相互独立的，不需要单元或者其他类型的网格来定义它们之间的联系，这使得无网格方法在解决大变形分析、裂纹扩展、弹塑性力

学分析、冲击爆炸破坏等问题时显示出巨大的优势。同时在前、后处理方面，无网格法也较有限元法更为方便、容易，大大地减少了工作量。

自然单元法 (natural element method，NEM) 在本质上也是一种求解偏微分方程的无网格方法，为系统起见，本书先概述无网格法的发展历程。

1.2 无网格法的发展概述

无网格法的研究可以追溯到 1977 年 Lucy[2] 提出的光滑质点流体动力学 (smoothed particle hydrodynamics, SPH) 方法。1992 年，Nayroles 等 [3] 将移动最小二乘近似引入伽辽金 (Galerkin) 法中，提出了弥散单元法 (diffuse element method, DEM)，Belytschko 等[4] 对 DEM 进行改进，提出了无单元伽辽金 (the element-free Galerkin, EFG) 法，掀起了无网格法的研究热潮。EFG 采用移动最小二乘方法进行场变量的近似表达，场量的拟合不具有插值的性质，使得对狄利克雷 (Dirichlet) 边界条件的处理较为麻烦。Belytschko 等利用 EFG 对固体力学中的许多问题进行了分析，研究了 EFG 与有限元的耦合方法[5,6]，以发挥各自的优势。Belytschko 等[7-10] 还对 EFG 法中的数值积分方案以及近似函数的计算方法进行了深入研究，并将 EFG 方法应用于动态裂纹扩展的数值模拟[11,12]，克服了有限元方法在模拟裂纹扩展时需要不断进行网格重新划分的缺点。文 [13] 对 EFG 及其他无网格法的发展和应用进行了综述。此外 Krysl 等[14,15] 将 EFG 用于板壳分析中。Ponthot 和 Du 等[16,17] 将 EFG 用于三维撞击和流体晃动分析中。Cordes 等[18] 将 EFG 方法用于相变问题的研究。Krysl 和 Belytschko 对三维动态裂纹扩展作了分析[19]，对 EFG 的研究和应用起了积极的推动作用。

自无网格法出现以来，已经发展形成了 20 多种不同名称的无网格方法，除了上面提到的以外，主要的无网格方法有：再生核质点方法 (reproducing kernel particle method，RKPM)、小波质点方法 (wavelet particle method，WPM)、单位分解法 (the partition of unity method，PUM)、h-p 云法 (h-p clouds method，HPCM)、h-p 无网格云团法 (h-p-meshless clouds method，HPMCM)、有限点方法 (the finite point method，FPM)、局部边界方程法 (local boundary integral equation method，LBIEM)、无网格局部 Petrov-Galerkin 法 (meshless local Petrov-Galerkin method，MLPGM)、点插值法 (point interpolation method，PIM) 等。

1995 年，美籍华裔计算力学学者 Liu 教授利用积分再生函数思想，提出了再生核质点方法 (reproducing kernel particle method, RKPM)[20]。并利用“小波”分析的伸缩尺度平移、多分辨率等特点，提出了多尺度再生核质点方法 (multiple-scale reproducing kernel particle method, MSRKPM)[21] 和小波质点方法 (wavelet particle method, WPM)[22] 等，实现了该类方法的自适应分析。这种方法引入了柔性可调

窗函数进行积分变换，适合于对局部进行细致的数值分析。Liu 教授成功地在他的方法里运用小波思想，对固体力学、流体力学和结构声学等领域中的大量问题进行了数值分析[23-27]。

1995 年，美国 Texas 大学的著名学者 Oden 和他的学生 Duarte 提出了 h-p 无网格云团方法[28-30]，该方法利用移动最小二乘原理建立单位分解函数来进行场量的近似表达，然后通过 Galerkin 过程建立离散模型。这种方法特别适合于进行自适应分析。Oden 等对这种方法进行了严格的数学分析，并利用 Lagrange 乘子法对 Dirichlet 边界条件进行了处理。

1995 年，Braun 和 Sambridge 基于自然邻域插值[31,32] 构造试函数与权函数，提出了一种求解偏微分方程的自然单元法[33]。1998 年，Sukumar 等[34,35] 将 NEM 用于分析固体力学问题。2001 年，Sukumar 等[36] 又基于非 Sibson 插值[37,38] 提出了自然邻点伽辽金法 (natural neighbor Galerkin method, NNGM)，用于求解线弹性力学中的椭圆型偏微分方程。

1996 年，美国计算数学知名学者 Babuška 和他的学生 Melenk 提出了单位分解法[39,40]。在这种方法里，Babuška 教授利用现代数学 “单位分解” 的重要概念，对单位分解方法进行了严格的数学论证。

1996 年，西班牙数值分析中心的 Oñate 和 Idelsohn 等提出了有限点方法[41-43]，这是一种不需要背景单元的真正无网格方法，采用最小二乘原理来构造形函数，主要用于流体动力学领域[44,45]。

此外，波兰学者 Liszka 等提出了 “h-p-meshless clouds method”[46]，这种方法与 Oden 等的 “h-p clouds method” 的不同点在于它采用的是配点形式，也不需背景单元作为积分域，是一种纯粹的无网格方法。日本学者 Yagawa 教授基于点积分的概念，提出了自由网格法 (free mesh method, FMM)[47]，该法在计算过程中实时对每个场点自动形成局部的三角形网格，然后进行结点积分，其特点是便于实施并行计算。FMM 被成功地应用于三维固体及流体力学问题的计算中[48]。1998 年，著名计算力学学者 Atluri 等提出了两种方法：局部边界方程法 (local boundary integral equation method, LBIEM) 和无网格局部 Petrov-Galerkin 法 (meshless local Petrov-Galerkin method, MLPGM)[49-51]。这两种方法都是基于移动最小二乘近似来建立场函数的近似表达，在积分时不需要背景网格，是完全的无网格方法。

2001 年，Liu 等针对用移动最小二乘 (MLS) 近似的 Galerkin 法和局部 Petrov-Galerkin 法无法直接施加本质边界条件的问题，采用多项式基函数和径向基函数实施点插值，提出了无网格点插值法[52,53]，并很好地分析了带孔无限板、桥墩、地基固结、坝体等问题。

2003 年，Liu 和 Gu[54,55] 提出了无网格弱-强式 (meshless weak-strong, MWS) 方法，并用于求解平面弹性力学问题。在 MWS 中，对于位于问题域内或本质边界

条件上的结点用配点法建立系统方程，对于位于 Neumann 边界上的结点用积分弱形式建立系统方程，最后基于结点把这两种方程组合起来，得到最后的系统方程。

受无网格法思想的影响，还有很多学者研究了无网格法的近似方案和数值离散方案，随后出现了多种新型的或改进的无网格法，如多象限法 (multiquadrics method, MQM)[56]、逐点法或点到点法 (node-by-node method, NNM)[57]、有限覆盖法 (finite cover method, FCM)[58]、有限球法 (finite spheres method, FSM)[59]、边界无网格法 (boundary element-free method, BEFM)[60] 等，这里不再细述。

国内学者对无网格方法也作了大量的研究和应用。曹国金等[61] 和顾元通等[62] 对无网格法的研究进展进行了综述。Chen 等[63-65] 将径向基函数与边界元法相结合，提出了基于径向基函数的边界结点法 (boundary knot method, BKM) 和边界粒子法 (boundary partical method, BPM)，所采用的方法只需对求解域的边界进行离散。继清华大学张雄[66] 的研究团队出版了《无网格法》一书后，西北工业大学的刘更等[67] 也出版了《无网格法及其应用》，同时有越来越多的研究人员投入到这个领域的研究之中。其中清华大学的陆明万教授和张雄教授及其研究小组[68,69] 对无网格数值方法进行了深入和系统的研究，将紧支函数应用于配点法，建立了相应的无网格法[70,71]，用于求解固体力学问题。基于伽辽金法的无网格法的精度较高，但需要进行数值积分，计算量大，还需要引入积分网格。基于配点的无网格法计算效率高，但其稳定性差，精度低。于是张雄等将两种方法结合起来，提出了最小二乘配点无网格法[72] 和加权最小二乘无网格法[73]，兼顾了两者的优点，为无网格法的发展开拓出新的方向。湖南大学龙述尧等[74-76] 对 MLPGM 进行了系统的研究，并分别用于求解弹性力学问题、地基梁问题、弹性板、各向异性板、弹塑性和断裂力学等问题。同济大学蔡永昌等[77] 提出了基于 Voronoi 结构和采用自然单元法 (NEM) 近似位移函数的 MLPGM，可以有效地减少计算所需的时间和提高求解结果的精度。南京航空航天大学的刘欣博士对基于流形覆盖思想的无网格数值方法、自适应无网格方法、单位分解有限元和半解析无网格数值方法进行了比较系统的研究[78-80]。史宝军等[81,82] 基于核重构思想构造近似函数，将配点法和最小二乘原理相结合对微分方程进行离散，建立了 Helmholtz 方程的最小二乘配点格式，分别研究了 Helmholtz 方程的波传播问题和边界层问题。Cheng 等建立了三维弹性力学、弹性动力学等问题的边界无单元法[83] 和基于径向基函数的局部边界积分方程方法等[84]。此外，还有很多其他的研究内容和成果，限于篇幅，本书不再逐一介绍。

1.3 典型无网格方法的近似方案

不同无网格方法之间的主要差别在于所采用的近似函数和微分方程的等效形

式不同，但都可以看做是紧支试函数加权余量法的某种具体形式。只要紧支试函数是利用离散点来建立的，且离散点之间并无明确的网格连接，由紧支试函数加权余量法[66] 导出的所有方法都可以统称为无网格法。

目前在无网格法中使用的近似函数主要有：移动最小二乘近似、核函数近似、重构核近似、单位分解函数、点插值函数、径向基函数和自然邻点插值函数等。可以根据加权余量计算时权函数的不同选择，将无网格方法进行分类。与常用的无网格方法对应的加权余量法有：配点法、伽辽金法、局部彼得罗夫-伽辽金法和加权最小二乘法，相应的无网格方法称为配点型、伽辽金型、局部彼得罗夫-伽辽金型和最小二乘型无网格法。变分原理是另一种表达连续介质力学问题的积分形式，用变分原理求解连续介质力学问题时要求某个关于未知函数的泛函取驻值，在存在相应的泛函时，伽辽金法与变分法会得到相同的结果。下面着重对典型无网格法中使用的近似函数的构造方法进行介绍。

1.3.1 光滑质点流体动力学 (SPH) 方法

SPH 方法是计算力学中最早出现的无网格粒子方法，由 Lucy 和 Gingold 等[2,85] 在 1977 年分别独立提出。在这种方法提出后的最初几年里，其应用范围主要局限在与天体物理学相关的领域[86-88]，例如恒星或星系的形成与发展等。这是因为当时对 SPH 方法的一些特殊性质和优点的认识还不充分。

SPH 方法的核心和精髓主要包含在 “光滑”、“粒子” 和 “流体动力学” 这三个术语中。“光滑” 指的是通过对邻近粒子进行加权平均而得到稳定的光滑近似；“粒子” 是指在 SPH 方法中，系统的状态是用一系列的粒子来描述的，这些粒子包含着独立的材料性质，而且按照守恒法则控制着相关粒子的运动方程；“流体动力学” 是指该方法主要应用于流体动力学问题。SPH 方法的基本思想是将连续的流体用相互作用的质点组来描述，各个物质点上承载着各种物理量，包括质量、速度等，通过求解质点组的动力学方程和跟踪每个质点的运动轨迹，求得整个系统的力学行为。SPH 的优点在于它是一种纯粹的 Lagrange 方法，可以避免 Euler 方法描述中处理欧拉网格与材料的界面等问题，特别适合于求解高速碰撞等动态问题和大变形问题。

SPH 方法的出发点是用一个作用在近程范围内的核函数描述空间的粒子与其邻近粒子的相互关系，设 $F(x)$ 为一个场函数，其近似函数可表示为

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{u}(\bar{\boldsymbol{x}}) w(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}, h) \mathrm{d}\Omega_{\bar{\boldsymbol{x}}} \tag{1-1}$$

其中，$w(\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}, h)$ 是核函数; h 是核函数的影响半径。将上式进行离散化处理可得

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{J=1}^{N} w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_J) \boldsymbol{u}_J \Delta V_J \tag{1-2}$$

其中，ΔV_J 为结点 $\boldsymbol{x}_J$ 所对应的体积。在 SPH 中将结点视为质点或粒子，各结点所对应的体积为 $\Delta V_J = m_J/\rho_J$，则式 (1-2) 可写为

$$\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{J=1}^{N} w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_J)\frac{m_J}{\rho_J}\boldsymbol{u}_J \tag{1-3}$$

向量函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 散度的离散近似为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{J=1}^{N}\frac{m_J}{\rho_J}\nabla w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_J)\cdot\boldsymbol{u}_J \tag{1-4}$$

若式 (1-2) 中的场函数为密度场 $\rho(\boldsymbol{x})$，则密度场的离散近似为

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \sum_{J=1}^{N} w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_J)m_J \tag{1-5}$$

因此，结点 I 处的密度可由对它有影响的质点的质量经光滑化而得到

$$\rho(\boldsymbol{x}_I) = \sum_{J=1}^{N} w(\boldsymbol{x}_I-\boldsymbol{x}_J)m_J \tag{1-6}$$

一般来说，流体动力学的控制方程可以表达为一组 Lagrange 形式的偏微分方程，如著名的 Navier-Stokes 方程组，其中包括动量方程、连续方程和能量方程，分别表示了动量守恒、质量守恒和能量守恒定律，还包括描述质点运动的方程。无体积力作用时，描述流体的运动和状态的流体动力学方程组为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} = \rho\dot{\boldsymbol{v}}\\ \dot{\rho}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0\\ \rho\dot{E} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}+\dot{E}_Q\\ \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}\end{cases} \tag{1-7}$$

其中，E 为单位密度的能量; $\dot{E}_Q$ 表示黏性应力对内能的贡献; $\boldsymbol{\sigma}$、$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 分别表示应力和应变率张量。

采用离散形式进行数值计算时，令式 (1-7) 在离散结点上得到满足，并将应力对空间坐标的散度用核近似表示，可得运动方程的离散形式:

$$\dot{\boldsymbol{v}}_I = \frac{1}{\rho_I}\sum_{J=1}^{N}\frac{m_J}{\rho_J}\boldsymbol{\sigma}_J\nabla w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_J)|_{x=x_I} \tag{1-8}$$

根据上式，可由 t^n 时刻的应力求得 t^n 时刻的加速度，进而由蛙跳差分格式得到 $t^{n+1/2}$ 时刻的速度和 t^{n+1} 时刻的坐标:

$$\boldsymbol{v}_I^{n+1/2} = \boldsymbol{v}_I^{n-1/2}+\frac{1}{2}(\Delta t^{n+1/2}+\Delta t^{n-1/2})\dot{\boldsymbol{v}}_I^n \tag{1-9}$$

$$\boldsymbol{x}_I^{n+1} = \boldsymbol{x}_I^n + \Delta t^{n+1/2} \boldsymbol{v}_I^{n+1/2} \tag{1-10}$$

利用式 (1-4) 可得 $t^{n+1/2}$ 时刻的速度张量为

$$\nabla \boldsymbol{v}_I^{n+1/2} = \sum_{J=1}^{N} \frac{m_J}{\rho_J} \boldsymbol{v}_J^{n+1/2} \nabla w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_J)\big|_{x=x_I} \tag{1-11}$$

进而可得 $t^{n+1/2}$ 时刻的应变率张量为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left(\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\right)\Big|_I^{n+1/2} \tag{1-12}$$

$t^{n+1/2}$ 时刻的速度散度可表示为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_I^{n+1/2} = -\sum_{J=1}^{N} m_J (\boldsymbol{v}_I^{n+1/2} - \boldsymbol{v}_J^{n+1/2}) \cdot \nabla w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_J)\big|_{x=x_I} \tag{1-13}$$

则由连续方程利用中心差分格式可得 t^{n+1} 时刻的密度为

$$\rho_I^{n+1} = \rho_I^n + \Delta t^{n+1/2} \left\{ \sum_{J=1}^{N} m_J (\boldsymbol{v}_I^{n+1/2} - \boldsymbol{v}_J^{n+1/2}) \cdot \nabla w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_J)\big|_{x=x_I} \right\} \tag{1-14}$$

再结合流体的本构方程和能量方程，可得 t^{n+1} 时刻的应力 $\boldsymbol{\sigma}_I^{n+1}$ 和内能 E_I^{n+1}。

由上面的过程可以看出，光滑质点流体动力学 (SPH) 方法采用的是核近似的配点型无网格方法。

1.3.2　再生核质点法 (RKPM) 及多尺度再生核质点法 (MSRKPM)

从数学上来说，偏微分方程的解可以表示为[89]

$$\boldsymbol{u}^R(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) \phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{y} \tag{1-15}$$

其中，ϕ 是核函数或窗函数，其作用相当于一个投影算子，$\boldsymbol{u}^R(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 的再生解，这一类构造近似函数的方法 (如 SPH 方法和小波方法) 即称为核重构方法 (reproducing kernel method)。这种方法的一个主要缺点是对于有限区域问题需要进行特别的边界处理，如对称边界处理法、虚拟粒子边界处理法、镜像粒子方法等[90]，这是由于上述近似方案不满足一致性要求所致。Liu 等[20] 通过构建适当的边界修正函数，通过再生条件构造满足一致性要求的重构核近似，解决了 SPH 方法和小波方法中需要人工边界的问题，并提高了离散解的精度。

对于有限的区域，可将再生解表示为

$$\boldsymbol{u}^R(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) \bar{\phi}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{y} \tag{1-16}$$

其中，$\bar{\phi}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=C(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ 为修正的核函数; $C(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ 为边界修正函数。

由于再生解的积分一般不能用分析的方法得出，需要将其离散化，在 RKPM 中，近似函数空间 V^h 可以通过一个窗函数的系列 $\phi_j(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j)$ 经过再生变换的方法得到

$$V_\phi^h=\{\phi_1,\cdots,\phi_j\cdots,\phi_{np}\},\quad j\in[1,np] \tag{1-17}$$

其中，np 为质点总数。由于任意选择的窗函数经变换张成的空间可能不满足完备性的要求，因此需对修正的窗函数附加一些条件以满足完备性的要求：

$$\bar{\phi}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=C(\boldsymbol{x};\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\sum_{k=0}^{n}\beta_k(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^k\phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{1-18}$$

为满足完备性要求，需要窗函数的 k 阶离散矩满足下列条件：

$$\begin{aligned}&\bar{m}_0(\boldsymbol{x})=1\\&\bar{m}_k(\boldsymbol{x})=0,\quad k=1,2,\cdots,n\end{aligned} \tag{1-19}$$

其中，

$$\bar{m}_k(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{np}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j)^k\phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j)\Delta\boldsymbol{x}_j \tag{1-20}$$

将对 0 到 n 阶离散矩的要求施加于修正的窗函数可得关于 $+\beta_k(\boldsymbol{x})$ 的 $n+1$ 个线性方程，通过这种方法可以得到满足 n 阶完备性的修正函数及相应的修正核函数。

修正的重构核近似的离散形式为

$$\boldsymbol{u}^{R_h}(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{np}N^{\mathrm{RKPM}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_j) \tag{1-21}$$

其中，$N^{\mathrm{RKPM}}=C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j)\phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_j)\Delta\boldsymbol{x}_j$ 为形函数。

Liu 等在文 [22] 中将小波分析方法引入重构核近似中，建立了多尺度再生核质点法 (multiple-scale reproducing kernel particle method, MSRKPM)，多尺度分析的逼近空间由一系列的嵌套子空间组成：

$$\{0\}=V_\infty\subset\cdots\subset V_1\subset V_0\subset V_{-1}\subset\cdots\subset V_{-\infty}=\mathrm{L}^2(\mathrm{R}) \tag{1-22}$$

生成这些子空间的基函数是相应的尺度函数，尺度函数可由窗函数的平移和膨胀得到

$$\phi_{mn}(x)=2^{-m/2}\phi\left(\frac{x}{2^m}-n\right),\quad m,n\in\mathit{\Gamma}=[\cdots,-1,0,1,\cdots] \tag{1-23}$$