北大燕园

2017年 李正元·范培华

考研数学①

数学

数学一

复习全书习题全解

主编 北京大学 李正元
北京大学 尤承业
北京大学 范培华

上架建议：考试·考研数学

ISBN 978-7-5620-6502-9

价：66.80元

赠

中国政法大学出版社

北大燕园

2017年李正元·范培华考研数学①

数学

数学一

复习全书习题全解

主编 北 京 大 学 李正元
北 京 大 学 尤承业
北 京 大 学 范培华

中国政法大学出版社

2016·北京

目 录

第一篇 高等数学

第二篇 线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇　高等数学

第一章　极限、连续与求极限的方法

一、选择题

1.【分析】　注意到$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，本题为$1^{\infty}$型．设$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，则原极限$=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\ln f(x)}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^2}}$．而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\frac{-\dfrac{1}{6}x^3}{x^3}=-\frac{1}{6},$$

故原极限$=e^{-\frac{1}{6}}$，应选(A)．

2.【分析一】　连续与不连续的复合可能连续，也可能间断，故(A)，(B)不对．不连续函数的相乘可能连续，故(C)也不对，因此，选(D)．

【分析二】　$f(x)$在$x=a$连续，$\varphi(x)$在$x=a$处间断，又$f(a)\neq 0\Rightarrow\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$在$x=a$处间断．(若不然$\Rightarrow$　$\varphi(x)=\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot f(x)$在$x=a$连续，与已知矛盾)．选(D)．

评注　$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant a,\\ -1, & x<a\end{cases}$在$x=a$处间断，但$\varphi^2(x)=1$连续，故(C)不对．$f(x)=x^2+a$在$x=a$处连续，$f[\varphi(x)]=1+a$，故(B)不对；$\varphi[f(x)]=1$在$x=a$处连续，故(A)不对．

3.【分析】　$f(x)$在$x=a$连续$\Rightarrow|f(x)|$在$x=a$连续$\left(\big||f(x)|-|f(a)|\big|\leqslant|f(x)-f(a)|\right)$．

$|f(x)|$在$x=a$连续$\nRightarrow f(x)$在$x=a$连续．

如$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant a,\\ -1, & x<a,\end{cases}$　$|f(x)|=1$，$|f(x)|$在$x=a$连续，但$f(x)$在$x=a$间断．

因此，选(B)．

4.【分析一】　直接考察．若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷小，则

$$y_n=\frac{1}{x_n}\cdot x_ny_n\Rightarrow\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\lim_{n\to\infty}(x_ny_n)=0.$$

因此(D)成立．

【分析二】　举例说明(A)，(B)，(C)不正确．

x_n:0,1,0,2,0,3,…… 发散，y_n:0,0,0,0,0,0,…… 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$．(A)不正确．

x_n:0,1,0,2,0,3,…… 无界，y_n:1,0,2,0,3,0,…… 无界，$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$．(B)不正确．

x_n:0,1,0,1,0,1,…… 有界，y_n:1,0,1,0,1,0,…… 不是无穷小，$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$．(C)不正确．

因此，选(D)．

5.【分析】 取 $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\in(-\infty,+\infty)(n=1,2,3,\cdots)$,则

$$f(x_n)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty\quad(n\to\infty).$$

因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 无界.选(C).

评注 取 $y_n=2n\pi(n=1,2,3,\cdots)$,则 $f(y_n)=0$.因此,$x\to+\infty$ 时,$f(x)$ 不是无穷大.

6.【分析】 如:$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & x\geqslant 0,\\ 1, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 均不连续,但 $f(x)+g(x)=1$,$f(x)\cdot g(x)=0$ 在 $x=0$ 均连续.又如:$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 均不连续,而 $f(x)+g(x)=\begin{cases}3, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ $f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 均不连续.因此选(D).

7.【分析】 该题就是要计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e\,\frac{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}-1}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e\,\frac{\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\Big/e\right]}{\frac{1}{n}}\quad(\text{等价无穷小因子替换}:t\to 0\text{ 时 }\ln(1+t)\sim t)$$

$$=e\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}$$

$$=e\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\quad(\text{转化为求相应的}\frac{0}{0}\text{型函数极限,然后用洛必达法则})$$

$$=e\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=e\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{e}{2},$$

因此选(D).

8.【分析】 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}=\dfrac{x}{|x|(x+1)}$,$x=0,\pm 1$ 是 $f(x)$ 的间断点,按题意,要逐一判断这些间断点的类型.计算可得

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x+1}=1,\quad f(0-0)=-\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x+1}=-1,$$

由于 $f(0+0)$ 与 $f(0-0)$ 存在但不相等,故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{|x|(x+1)}=\frac{1}{2}$$

$x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点,

又 $$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x}{|x|(x+1)}=\infty$$

$x=-1$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点,因此选(D).

9.【分析一】 因 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x(1-\cos\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{\tan x-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\cos^2 x\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin^2 x}=+\infty,$$

即当 $x\to 0^+$ 时 α 是比 β 高阶的无穷小量,α 与 β 应排列为 β,α. 故可排除(A)与(D).

又因 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\dfrac{2-x^3}{2}\right)^x-1}{\tan x-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln\left(1-\frac{x^3}{2}\right)}-1}{\tan x-x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln\left(1-\dfrac{x^3}{2}\right)}{\tan x-x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^4}{\tan x-x}=-2\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}=-2\lim_{x\to 0^+}\cos^2 x\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{\sin^2 x}=0,$$

即当 $x\to 0^+$ 时 γ 是较 α 高阶的无穷小量,α 与 γ 应排列为 α,γ. 可排除(B),即应选(C).

【分析二】 确定无穷小 α,β,γ 的阶数. 由

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\alpha}{x^n}=\lim_{x\to 0+}\frac{\tan x-x}{x^n}=\lim_{x\to 0+}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sin^2 x}{nx^{n-1}}\xlongequal{n=3}\frac{1}{3},$$

可知 α 为 x 的 3 阶无穷小. 由

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\beta}{x^n}=\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^x(1-\cos\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{x^n}=\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\dfrac{1}{2}x}{nx^{n-1}}\xlongequal{n=2}\frac{1}{4},$$

可知 β 是 x 的 2 阶无穷小. 由

$$\gamma=\left(1-\frac{1}{2}x^3\right)^x-1\sim\ln\left[\left(1-\frac{1}{2}x^3\right)^x-1+1\right]=x\ln\left(1-\frac{1}{2}x^3\right)\sim-\frac{1}{2}x^4,$$

可知 γ 是 x 的 4 阶无穷小.

因此排列为 β,α,γ,选(C).

10.【分析】 本题四个极限都可以化成 $e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1\pm x)}{x^n}}$ 的形式,其中 $n=2,3$,故只需讨论极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1\pm x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\pm x}{x^n}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0}\left(\pm\dfrac{1}{x}\right), & n=2,\\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\pm\dfrac{1}{x^2}\right), & n=3.\end{cases}$$

要选择该极限为 $+\infty$ 的,仅当 $n=3$ 并取“+”号时,即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x^3}=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^3}}=+\infty.$$ 选(D).

二、填空题

1.【分析】 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}3\cdot\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sin x}{x}=3+0=3.$

2.【分析】 由题设及$\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}-1)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+f(x)\tan x}-1=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)\tan x=0$.

现利用等价无穷小因子替换

$$\sqrt{1+f(x)\tan x}-1\sim\frac{1}{2}f(x)\tan x\ (x\to 0),\quad e^{2x}-1\sim 2x\quad (x\to 0),$$

$$\Rightarrow\quad \text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\tan x}{2x}=3\Rightarrow\lim_{x\to 0}f(x)=12.$$

3.【分析】 属 1^{∞} 型极限. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x}\ln[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]}$,而

$$\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{x}\ln(\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x})\right]\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}}\lim_{x\to 0}\frac{-[-\delta K^{-x}\ln K-(1-\delta)L^{-x}\ln L]}{\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}}$$
$$=\ln K^{\delta}+\ln L^{1-\delta},$$

因此,原式 $=e^{\ln K^{\delta}+\ln L^{1-\delta}}=K^{\delta}L^{1-\delta}$.

4.【分析】 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=f(0)$. 由于

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0+}\frac{-\tan x}{\frac{x}{2}}=-2,\quad \lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(ae^{2x})=a=f(0),$$

因此 $a=-2$.

5.【分析】 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-e^{x^2}}{x^{2k}}\xlongequal{t=x^2}\lim_{t\to 0+}\frac{1+t-e^t}{t^k}\xlongequal[\text{洛必达法则}]{(k\geqslant 1)\ \frac{0}{0}}\lim_{t\to 0+}\frac{1-e^t}{kt^{k-1}}\xlongequal[\text{取 }k=2]{\frac{0}{0}}\lim_{t\to 0+}\frac{-e^t}{2}=-\frac{1}{2},$$

因此当 $x\to 0$ 时 $1+x^2-e^{x^2}$ 是 x 的4阶无穷小.

评注 若用泰勒公式

$$1+x^2-e^{x^2}=1+x^2-\left[1+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)\right]=-\frac{1}{2}x^4+o(x^4),$$

更易得结论.

6.【分析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2a}{x-a}x}=e^{2a}=9\quad\Rightarrow\quad a=\ln 3$.

7.【分析】 本题属"∞^0"型未定式. 数列极限不能直接用洛必达法则. 如用,得先转化成连续变量的极限,利用 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x+\sin x}}$ 求得,但比较麻烦. 事实上,恒等变形后可转化为直接用幂指数运算法则的情形,即

$$\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n+\sin n}}=\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n+\sin n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[3\left(1+\frac{1}{3^n}+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{n}{n+\sin n}}=(3\cdot 1^0)^1=3.$$

8.【分析】

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2x^2}{x^5}=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-2x^3}{x^6}=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)+\ln(1-2x^3)-2x^3-\ln(1-2x^3)}{x^6}.$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)+\ln(1-2x^3)}{x^6}-\lim_{x\to0}\frac{2x^3+\ln(1-2x^3)}{x^6}=3-\lim_{x\to0}\frac{2x^3+\ln(1-2x^3)}{x^6}.$$

令 $2x^3=y$,则

$$\lim_{x\to0}\frac{2x^3+\ln(1-2x^3)}{x^6}=\lim_{y\to0}\frac{y+\ln(1-y)}{\left(\frac{y}{2}\right)^2}=4\lim_{y\to0}\frac{y+\ln(1-y)}{y^2}$$

$$=2\lim_{y\to0}\frac{1-\frac{1}{1-y}}{y}=-2\lim_{y\to0}\frac{1}{1-y}=-2.$$

故 $$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2x^2}{x^5}=3+2=5.$$

评注 若复习过泰勒公式,用泰勒公式求解是简单的.

由极限与无穷小的关系得

$$\ln(1-2x^3)+xf(x)=3x^6+o(x^6)\quad(x\to0)\qquad ⊛$$

用泰勒公式

$$\ln(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)$$

得 $$\ln(1-2x^3)=-2x^3-\frac{1}{2}(-2x^3)^2+o(x^6)$$

$$=-2x^3-2x^6+o(x^6)$$

代入 ⊛ 式得

$$-2x^3-2x^6+xf(x)=3x^6+o(x^6)$$

$$\frac{f(x)-2x^2}{x^5}=5+\frac{o(x^5)}{x^5}\quad(x\to0)$$

$\Rightarrow$ $$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-2x^2}{x^5}=5.$$

9.【分析】 $x-\ln x\cdot\sin x=x\left(1-\frac{\ln x}{x}\cdot\sin x\right)$,由于 $x\to+\infty$ 时,$\frac{\ln x}{x}\to0$,$\sin x$ 有界,故$\frac{\ln x}{x}\cdot\sin x\to0$,$x-\ln x\cdot\sin x\to+\infty$,于是$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan(x-\ln x\cdot\sin x)=\frac{\pi}{2}$.

10.【分析】 本题属“0^0”型未定式.利用基本极限 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$ 及重要极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 即得

$$\lim_{x\to0^+}x^{\sin x}=\lim_{x\to0^+}(x^x)^{\frac{\sin x}{x}}=1^1=1.$$

评注 $x^x=e^{x\ln x}$,$\lim\limits_{x\to0+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim\limits_{x\to0+}\frac{1/x}{-\frac{1}{x^2}}=0$

$\Rightarrow$ $$\lim_{x\to0+}x^x=e^0=1.$$

11.【分析一】 当 $x>0$ 时，$\left(\frac{2}{3}\right)^x<1$，于是有

$$0\leqslant\left(\frac{2^x+3^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\left[\frac{3^x\left(\frac{2^x}{3^x}+1\right)}{3}\right]^{\frac{1}{x}}<3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}},$$

而 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=0$，故由夹逼定理可知 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2^x+3^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=0$.

【分析二】 $\left(\frac{2^x+3^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2^x+3^x}{3}\right)}$

$$\lim_{x\to0+}\ln\left(\frac{2^x+3^x}{3}\right)=\ln\frac{2^0+3^0}{3}=\ln\frac{2}{3}<0$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2^x+3^x}{3}\right)=-\infty$$

因此 $$\lim_{x\to0+}\left(\frac{2^x+3^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0+}e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{2^x+3^x}{3}\right)}=0.$$

12.【分析】 利用洛必达法则可得

$$I\xlongequal{\text{记}}\lim_{x\to0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2\,dt}{\sqrt{a^2+t^2}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{b-\cos x}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

当 $a=0$ 时 $I=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{b-\cos x}\cdot\frac{1}{|x|}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{b-\cos x}=\begin{cases}0, & b\neq1,\\ \infty, & b=1,\end{cases}$

又当 $a\neq0$ 时

$$I=\frac{1}{|a|}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{b-\cos x}=\begin{cases}\frac{2}{|a|}, & b=1,\\ 0, & b\neq1,\end{cases}$$

故 $$\lim_{x\to0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2\,dt}{\sqrt{a^2+t^2}}=4\iff|a|=\frac{1}{2}\text{ 且 }b=1\iff a=\pm\frac{1}{2}\text{ 且 }b=1.$$

13.【分析】 初等函数(单一表达式)没有定义的点(附近有定义)是间断点；对分段函数的分界点，要用连续的定义予以讨论．对非分界点，就不同段而言，在各自的区间内可以按初等函数看待．

注意到 $x=0$ 为分界点．因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin3x}{x}=3\lim_{x\to0^-}\frac{\sin3x}{3x}=3,\quad\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(3+xe^{\frac{1}{x-1}}\right)=3,$$

又 $f(0)=3$，因此 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续．

此外，由于函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处无定义，因此 $x=1$ 为 $f(x)$ 的间断点．于是所给函数 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$．

三、计算题

1.【解】 (1) 属 $\frac{0}{0}$ 型．**方法** 1° 利用洛必达法则．

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+1}\cdot\frac{x\sin x}{e^{x^2}-1}\right)=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin x}{e^{x^2}-1}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x}{2xe^{x^2}}=\frac{1}{4}(1+1)=\frac{1}{2}.$

方法 2° 用等价无穷小因子替换 . 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x\sin x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

(2) 记 $p_n = \dfrac{t}{n} + \dfrac{t^2}{2n^2}$,则原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}(1+p_n)^{\frac{1}{p_n}\cdot p_n(-n)}$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}(-np_n) = -t$,因此,原式 $= e^{-t}$.

(3) 属 $\infty - \infty$ 型 . **方法** 1° 先通分,有

$$原式 = \lim_{x\to+\infty}\frac{ex^{1+x} - x(1+x)^x}{(1+x)^x e} = \lim_{x\to+\infty}\frac{ex - x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x e}$$

$$= \frac{1}{e^2}\lim_{x\to+\infty}\frac{e - e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{\frac{1}{x}} \xlongequal{t=\frac{1}{x}} \frac{1}{e^2}\lim_{t\to0+}\frac{e - e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}}{t}$$

$$= \frac{1}{e^2}\lim_{t\to0+}\left(-(1+t)^{\frac{1}{t}}\frac{\frac{t}{1+t} - \ln(1+t)}{t^2}\right) = -\frac{1}{e}\lim_{t\to0+}\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}$$

$$= -\frac{1}{e}\lim_{t\to0}\frac{-\ln(1+t)}{2t} = \frac{1}{2e}.$$

方法 2° 利用等价无穷小替换 .

$$原式 = \frac{1}{e}\lim_{x\to\infty}x\left[e\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x} - 1\right] \xlongequal{等价无穷小因子替换} \frac{1}{e}\lim_{x\to+\infty}x\ln\left[e\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]$$

$$= \frac{1}{e}\lim_{x\to+\infty}\frac{1 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \xlongequal{t=\frac{1}{x}} \frac{1}{e}\lim_{t\to0+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{e}\lim_{t\to0+}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t} = \frac{1}{2e}.$$

(4) 原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x - x^2\cos x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x - 1}{x^2} - \lim\limits_{x\to0}\cos x = -\dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{3}{2}$.

(5) 属 0^0 型 . 故原式 $= \lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\ln x}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}$,而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x} \xlongequal[\text{(洛必达法则)}]{\frac{\infty}{\infty}} -\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}}$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)} \xlongequal{\text{(洛必达法则)}} -\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = -1,$$

故原式 $= e^{-1}$.

(6) 属 ∞^0 型 . 原式 $= \lim\limits_{x\to0+}e^{\tan x\ln\frac{1}{\sqrt{x}}}$,而

$$\lim_{x\to0+}\tan x\ln\frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to0+}\frac{\ln\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t^2} \xlongequal[\text{(洛必达法则)}]{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2t^2} = 0,$$

故原式 $= e^0 = 1$.

(7) 原式 $= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} \xlongequal[\text{小因子替换)}]{\text{(等价无穷}} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x} = \dfrac{1}{2}$.

(8) **方法** 1° 原式 $\xlongequal[(x<0)]{\sqrt{x^2}=-x} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(1-\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}\right) = -\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\left(\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}-1\right)$

$$\xlongequal[\text{因子替换}]{\text{等价无穷小}} -\lim_{x\to-\infty} x^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{100}{x^2}\right) = -50.$$

方法 2° 同前恒等变形,有

$$\text{原式} = \lim_{x\to-\infty} x^2\left(1-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}}{\dfrac{100}{x^2}}\cdot 100\right)$$

$$\xlongequal{t=\frac{100}{x^2}} 100\cdot\lim_{t\to0^+}\frac{1-\sqrt{1+t}}{t} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} 100\cdot\lim_{t\to0^+}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right) = -50.$$

方法 3° 用相消法. 原式 $= \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cdot100}{\sqrt{x^2+100}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}+1\right)} = -50.$

(9) 属 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.

$$w = \lim_{x\to\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}dt\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)'}{-e^{2x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2e^{x^2}\int_0^x e^{t^2}dt}{-e^{2x^2}}$$

$$= -2\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}} = -2\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = 0.$$

(10) 令 $x=\dfrac{1}{t}$,则

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\arctan\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{t\to0}\left(\frac{\arctan t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to0}e^{\frac{1}{t^2}\ln\frac{\arctan t}{t}}.$$

而

$$\lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}\ln\frac{\arctan t}{t} = \lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{\arctan t}{t}-1+1\right) = \lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}\left(\frac{\arctan t}{t}-1\right) = \lim_{t\to0}\frac{\arctan t-t}{t^3}$$

$$= \lim_{t\to0}\frac{\dfrac{1}{1+t^2}-1}{3t^2} = -\frac{1}{3},$$

所以原极限 $= e^{-\frac{1}{3}}$.

(11) 属 1^∞ 型极限. 原极限 $= e^A$,而

$$A = \lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}-1\right) = \lim_{x\to0}\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}-a-b-c}{x(a+b+c)}$$

$$= \frac{1}{a+b+c}\lim_{x\to0}\left(\frac{a^{x+1}-a}{x}+\frac{b^{x+1}-b}{x}+\frac{c^{x+1}-c}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{a+b+c}\left(a\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}+b\lim_{x\to0}\frac{b^x-1}{x}+c\lim_{x\to0}\frac{c^x-1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{a+b+c}\left(a\lim_{x\to0}\frac{x\ln a}{x}+b\lim_{x\to0}\frac{x\ln b}{x}+c\lim_{x\to0}\frac{x\ln c}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{a+b+c}(a\ln a+b\ln b+c\ln c) = \frac{\ln(a^ab^bc^c)}{a+b+c},$$

因此,原极限 $= (a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$.

(12) 被积函数中含有参数 x,把因子 e^{-x^2} 提到积分号外后,易见所求极限为"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式.应当想到洛必达法则,

$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x (1+t^2)e^{t^2}dt}{xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(1+x^2)e^{x^2}}{(1+2x^2)e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{1+2x^2} = \frac{1}{2}.$$

(13) 已知:设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} 0, & 0 < A < 1, \\ +\infty, & A > 1. \end{cases}$

又
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2} = \frac{a_1}{a_2},$$

于是
$$I \xlongequal{\text{记}} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x = \begin{cases} 0, & a_1 < a_2, \\ +\infty, & a_1 > a_2. \end{cases}$$

只需再求 $a_1 = a_2$ 的情形:

$$I = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_1x+b_2}\right)^x = \left(1+\frac{b_1-b_2}{a_1x+b_2}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{b_1-b_2}{a_1x+b_2}\right)},$$

而
$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{b_1-b_2}{a_1x+b_2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(b_1-b_2)}{a_1x+b_2} = \frac{b_1-b_2}{a_1},$$

故
$$I = e^{\frac{b_1-b_2}{a_1}}.$$

因此
$$\text{原极限} = \begin{cases} 0, & a_1 < a_2, \\ e^{\frac{b_1-b_2}{a_1}}, & a_1 = a_2, \\ +\infty, & a_1 > a_2. \end{cases}$$

(14) 注意 $\sin t \sim t, \ln(1+t) \sim t(t\to 0)$,于是 $\ln\left(1+\frac{k}{x}\right) \sim \frac{k}{x}$($k$ 为常数),$\sin\left[\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\right] \sim \ln\left(1+\frac{k}{x}\right) \sim \frac{k}{x}(x\to\infty)$.因此,先用求极限的四则运算法则,再利用等价无穷小因子替换可得

$$w = \lim_{x\to\infty} x\sin\left[\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right] - \lim_{x\to\infty} x\sin\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{3}{x} - \lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{1}{x} = 2.$$

(15) 注意立方和公式 $1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$,则

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4n^3} - \frac{n}{4}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\frac{(n+1)^2-n^2}{n} = \frac{1}{2}.$$

(16) 注意 $2\times\frac{x}{2^n} = \frac{x}{2^{n-1}}$,为利用倍角公式化简 x_n,两边同乘 $\sin\frac{x}{2^n}$,得

$$\begin{aligned} x_n\cdot\sin\frac{x}{2^n} &= \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-1}} \\ &= \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin\frac{x}{2^{n-2}} = \cdots = \left(\frac{1}{2}\right)^n\sin x. \end{aligned}$$

从而 $x\neq 0$ 时,$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n\sin x\Big/\sin\frac{x}{2^n}$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n x}{\sin\frac{1}{2^n}x}\cdot\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x}{x}$;

$x=0$ 时,$x_n = 1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

(17) 分别求左、右极限:

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{x^x - 1}{x\ln x} \xlongequal{\text{等价无穷小因子替换}} \lim_{x\to 1+0} \frac{\ln[(x^x-1)+1]}{x\ln x} = \lim_{x\to 1+0}\frac{x\ln x}{x\ln x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}\frac{\sin(1-x)+\cos(1-x)-1}{1-x} = \lim_{x\to 1-0}\frac{\sin(1-x)}{1-x} + \lim_{x\to 1-0}\frac{-\frac{1}{2}(1-x)^2}{1-x} = 1,$$

因此 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

2.【解】 (Ⅰ)注意:$x > \ln(1+x) \quad (x>0)$,于是

$x_{n+1} - x_n = \ln(1+x_n) - x_n < 0 \qquad (n = 1,2,3,\cdots) \quad \Rightarrow \{x_n\}\downarrow$ 有下界0⇒∃ 极限

$$\lim_{n\to\infty} x_n \xlongequal{\text{记为}} a. \quad (a \geqslant 0)$$

$\Rightarrow \quad a = \ln(1+a)$.又 $a>0$ 时 $a > \ln(1+a)$,故 $a = 0$.

(Ⅱ)原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n\ln(1+x_n)}{x_n - \ln(1+x_n)} \xlongequal[\text{函数极限}]{\text{数列极限转化为}} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x-\ln(1+x)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{1-\dfrac{1}{1+x}} = 2.$$

3.【解】 当 $0<a<1$ 时 $0 < x_n < a^n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$;当 $a = 1$ 时 $x_n = \dfrac{1}{2^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n} = 0$;

当 $a > 1$ 时 $0 < x_n < \dfrac{a^n}{a^{n-1}a^n} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}\right)^{n-1} = 0$.

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

4.【解】 由题设知

$$0 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x + ax}{x^3} + b\right) = b + \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x + ax}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow \qquad b = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x + ax}{x^3}. \tag{*}$$

利用(*),一方面有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x + ax}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x + ax}{x^3}\cdot x^2 = 0,$$

另一方面,直接计算又有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x + ax}{x} = 3 + a,$$

这表明 $3 + a = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a = -3$.

将 $a = -3$ 代入(*)式,即得

$$-b = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x - 3x}{x^3} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x - 3}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x - 1}{x^2} = -\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = -\frac{9}{2}.$$

故 $b = \dfrac{9}{2}$.综合得 $a = -3, b = \dfrac{9}{2}$.

5.【解】 (Ⅰ)这是初等函数,它在定义域($x^2 \neq 1$)上连续.因此,$x \neq \pm 1$ 时均连续.$x = \pm 1$ 时,

$$\lim_{x\to 1+0}(1+x)\arctan\frac{1}{1-x^2} = 2\times\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi,$$

$$\lim_{x\to 1-0}(1+x)\arctan\frac{1}{1-x^2}=2\times\left(+\frac{\pi}{2}\right)=\pi,$$

故 $x=1$ 是第一类间断点(跳跃的).又 $\lim\limits_{x\to -1+0}y=0$, $\lim\limits_{x\to -1-0}y=0$,故 $x=-1$ 也是第一类间断点(可去).

(Ⅱ)先求极限函数.注意 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0(|x|<1)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0(|x|>1)$,

$$\Rightarrow\qquad y=\begin{cases}-1-x, & |x|<1,\\ -x, & |x|=1,\\ 1-x, & |x|>1.\end{cases}$$

$x\neq\pm 1$ 时,$|x|<1$ 与 $|x|>1$ 分别与某初等函数相同,故连续.

$x=\pm 1$ 时均是第一类间断点(跳跃间断点).因左、右极限均 ∃,不相等.

(Ⅲ)在区间 $(0,+\infty)$,$[-1,0)$ 上函数 y 分别与某初等函数相同,因而连续.在 $x=0$ 处 y 无定义,而

$$\lim_{x\to 0+}y=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0-}y=\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1,$$

$\Rightarrow x=0$ 是第一类间断点(可去间断点).

(Ⅳ)$f(x)=e^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\ln(1+x)}$ 是初等函数,在 $(0,2\pi)$ 内 $f(x)$ 有定义处均连续.仅在 $\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 无定义处及 $\tan(x-\frac{\pi}{4})=0$ 处 $f(x)$ 不连续.

在 $(0,2\pi)$ 内,$\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 无定义的点是:$x=\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$; $\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ 的点是:$x=\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi$.因此 $f(x)$ 的间断点是:$x=\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$.

为判断间断点类型,考察间断点处的极限:$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{5}{4}\pi+0}f(x)=+\infty$,则 $x=\frac{\pi}{4},\frac{5}{4}\pi$ 是第二类间断点(无穷型的).又 $\lim\limits_{x\to\frac{3}{4}\pi}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to\frac{7}{4}\pi}f(x)=1$,则 $x=\frac{3}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi$ 是第一类间断点(可去型的).

(Ⅴ)**方法** 1° 先求 $f[g(x)]$ 表达式.

$$f[g(x)]=\begin{cases}g^2(x), & g(x)\leqslant 1,\\ 2-g(x), & g(x)>1\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 2-(x+4), & x>1\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ -2-x, & x>1.\end{cases}$$

当 $x>1$,$x<1$ 时,$f[g(x)]$ 分别与某初等函数相同,因而连续.当 $x=1$ 时,分别求左、右极限

$$\lim_{x\to 1+0}f[g(x)]=\lim_{x\to 1+0}(-2-x)=-3,\quad \lim_{x\to 1-0}f[g(x)]=\lim_{x\to 1-0}x^2=1,$$

故 $x=1$ 为第一类间断点(跳跃间断点).

方法 2° 不必求出 $f[g(x)]$ 的表达式,用连续性运算法则来讨论.当 $x\neq 1$ 时 $g(x)$ 连续,$f(u)$ 处处连续.(因为 $f(u)=\begin{cases}u^2, & u\leqslant 1,\\ 2-u, & u\geqslant 1\end{cases}$ 在 $(-\infty,1]$ 与 $[1,+\infty)$ 分别与某初等函数相同,故连续,因而 $f(u)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续).因此,当 $x\neq 1$ 时由连续函数的复合函数的连续性 $\Rightarrow f[g(x)]$ 连续.

$x=1$ 处分别求左、右极限

$$\lim_{x\to 1+0}f[g(x)]=\lim_{x\to 1+0}f(x+4)=\lim_{x\to 1+0}[2-(x+4)]=-3,$$

$$\lim_{x\to 1-0} f[g(x)] = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} x^2 = 1,$$

故 $x=1$ 为第一类间断点(跳跃间断点).

四、证明题

1.【证明】 令 $f(x)=x(2-x)$;则 $x_{n+1}=f(x_n)$. 易知

$$f'(x)=2(1-x)>0,\quad x\in(0,1).$$

因 $0<x_0<1 \Rightarrow x_1=x_0(2-x_0)=1-(x_0-1)^2\in(0,1)$.

若 $x_n\in(0,1) \Rightarrow x_{n+1}=x_n(2-x_n)\in(0,1)$.

又 $x_1-x_0=x_0(1-x_0)>0 \Rightarrow \{x_n\}$ 单调上升且有界 $\Rightarrow$ $\exists$ 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

由递归方程得 $a=a(2-a)$. 显然 $a>0 \Rightarrow a=1$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

2.【证明】 令 $x_n=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(n+n-1)}=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right)}$

$$=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{n}\right)},$$

取对数化乘积为和差

$$y_n=\ln x_n=\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{\text{积分和的极限}}\int_0^1\ln(1+x)\,dx=\int_0^1\ln(1+x)\,d(x+1)$$

$$=(x+1)\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x+1}{1+x}dx=2\ln2-1=\ln4-1,$$

故 $\quad \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}e^{y_n}=e^{\ln4-1}=\dfrac{4}{e}$.

3.【证明】 (Ⅰ)考察极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{f^*(x)-g^*(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)\left[1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]}{f^*(x)\left[1-\dfrac{g^*(x)}{f^*(x)}\right]}=\lim_{x\to a}\frac{1-\dfrac{g(x)}{f(x)}}{1-\dfrac{g^*(x)}{f^*(x)}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1-\dfrac{1}{r}}{1-\dfrac{1}{r}}, & r\neq 0,\\[2ex] \dfrac{1-0}{1-0}, & \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty\end{cases}=1.$$

或
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{f^*(x)-g^*(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}-1\right]}{g^*(x)\left[\dfrac{f^*(x)}{g^*(x)}-1\right]}=1\cdot\frac{0-1}{0-1}=1\,(r=0).$$

因此,$f(x)-g(x)\sim f^*(x)-g^*(x)\ (x\to a)$.

(Ⅱ) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln f(x)}{\ln f^*(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln\left[\dfrac{f(x)}{f^*(x)}\cdot f^*(x)\right]}{\ln f^*(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln\dfrac{f(x)}{f^*(x)}}{\ln f^*(x)}+1=0+1=1,$

其中 $\lim\limits_{x\to a}\ln\dfrac{f(x)}{f^*(x)}=\ln1=0,\quad \lim\limits_{x\to a}\ln f^*(x)=-\infty$.

再证 $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g^*(x)\frac{\ln f(x)}{\ln f^*(x)}\ln f^*(x)}$

$= e^{\lim\limits_{x\to a} g^*(x)\ln f^*(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{g^*(x)\ln f^*(x)} = \lim\limits_{x\to a} f^*(x)^{g^*(x)}$.

4.【分析】 只需证明：$\dfrac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 内某两个函数值的中间值.

【证明】 依题设 n 个函数值 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ 中一定有最小和最大的，不妨设

$$\min\{f(x_1),\cdots,f(x_n)\} = f(x_1), \quad \max\{f(x_1),\cdots,f(x_n)\} = f(x_n),$$

则
$$f(x_1) \leqslant \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i) \leqslant f(x_n).$$

记 $\eta = \dfrac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$，若 $\eta = f(x_1)$，则 $\exists \xi = x_1 \in (a,b)$，$f(\xi) = \eta$；若 $\eta = f(x_n)$，则 $\exists \xi = x_n \in (a,b)$，$f(\xi) = \eta$.

若 $f(x_1) < \eta < f(x_n)$，由【定理 1.18】，$\exists \xi$ 在 x_1 与 x_n 之间，即 $\xi \in (a,b)$，$f(\xi) = \eta$.

5.【分析与证明】 反证法. 若在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 处处不为零，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上或恒正或恒负. 不失一般性，设 $f(x) > 0, x \in [a,b]$，则 $\exists x_0 \in [a,b]$，$f(x_0) = \min\limits_{[a,b]} f(x) > 0$. 由题设，对此 x_0，$\exists y \in [a,b]$，使得

$$f(y) = |f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x_0)| = \frac{1}{2}f(x_0) < f(x_0),$$

与 $f(x_0)$ 是最小值矛盾. 因此，$\exists \xi \in [a,b]$，使 $f(\xi) = 0$.

6.【证明】 因 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A > \dfrac{A}{2}$，由极限的不等式性质可知，$\exists X$，当 $x > X$ 时 $f(x) > \dfrac{A}{2}$，则 $x > X$ 时有

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^X f(t)\,dt + \int_X^x f(t)\,dt \geqslant \int_0^X f(t)\,dt + \frac{A}{2}(x - X),$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt = +\infty$.

> **评注** 若 $A > 0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt = +\infty$. 类似可知，若 $A < 0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt = -\infty$.

7.【证明】 先作变量替换：

$$\int_0^1 f(nx)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^1 f(nx)\,d(nx) \xlongequal{nx=t} \frac{1}{n}\int_0^n f(t)\,dt.$$

这是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型数列极限. 将它转化为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型函数极限，便可用洛必达法则求之，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A.$$

> **评注** 事实上，若 $A = 0$，则题中的结论仍成立. 因为只要当 $x > X$ 时，$f(x), g(x)$ 可导，$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$（或 $-\infty$，或 ∞），又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$，就有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.