■ 高等学校理工科数学类规划教材

大学数学

史俊贤 主编

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

■ 高等学校理工科数学类规划教材

大学数学

主　编　史俊贤

副主编　马　芳　边　颖

编　者　史俊贤　马　芳　边　颖　汪　妍
　　　　程晓生　于　巍　许爽爽

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

图书在版编目(CIP)数据

大学数学 / 史俊贤主编. —大连 ：大连理工大学出版社，2015.9

ISBN 978-7-5685-0100-2

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①史… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 204645 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023

发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn

大连美跃彩色印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　印张:14.75　字数:334 千字

2015 年 9 月第 1 版　2015 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑:于建辉　责任校对:周　欢

封面设计:季　强

ISBN 978-7-5685-0100-2　定　价:29.80 元

前　言

本书以“联系实际，加强计算，注重应用，提高素质”为特色，在概念的引入上，力求自然，通过实例来阐述其直观背景和现实意义；在基本理论上，力求直观，通俗易懂，着眼于培养学生的分析问题、解决问题的能力；在基本技能的培养上，注重基本运算能力和方法的训练。

本书在贯彻“以必须、够用为度”原则的基础上，力图体现下列特点：

(1)对于概念、定理、公式，尽可能从直观背景出发，提出问题，分析问题，水到渠成地得出结论。

(2)本着宏观不动，微观调整的原则，对传统内容适当删减，适当调整知识体系。

(3)各章节的例题和习题比较丰富，有利于打好基础，提高分析问题和解决问题的能力，并着重加强应用意识的培养。

全书共分7章，具体内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用与微分方程。

本书编者都是从事教学工作多年的一线教师，他们根据多年的教学经验，使用通俗易懂的语言，由浅入深地阐述了大学数学的有关知识。参加本书编写工作的有：史俊贤、马芳、边颖、汪妍、程晓生、于巍、许爽爽，全书由史俊贤统稿并最后定稿。

本书编写得到了许多同行和朋友的大力支持，在此一并表示衷心的感谢！

如果您有任何建议或意见，请通过以下方式与我们联系：

电话：0411-84708947

邮箱：jcjf@dutp.cn

编　者

2015年8月

目　录

第1章　函数与极限

高等数学是研究变量及函数关系的一门数学学科，用极限的方法去研究函数是高等数学的一种基本方法，也是高等数学区别于初等数学的一个显著标志.

本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质. 重点为极限的计算方法.

1.1　函数

1.1.1　集合

1. 集合

集合为具有某种属性的一些对象所组成的总体. 例如，一个班级的全体学生组成了一个集合；数2，4，6，8，10组成了一个集合；满足不等式$a<x<b$的x组成了一个集合等等. 集合里的各个对象称为这个集合的元素. 习惯上，我们经常用大写拉丁字母A,B,C等表示集合，而用小写拉丁字母a,b,c等表示元素. 如果a是集合A的元素，则记作$a\in A$，读作a属于A；如果a不是集合A的元素，则记作$a\notin A$，读作a不属于A.

集合的表示法通常有列举法和描述法. 如全体自然数可表示为$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$；而介于$a$和$b(a<b)$之间的数的全体可表示为$A=\{x\mid a<x<b\}$.

习惯上，全体自然数的集合记作$\mathbf{N}$；全体整数的集合记作$\mathbf{Z}$；全体有理数的集合记作$\mathbf{Q}$；全体实数的集合记作$\mathbf{R}$. 有时用$\mathbf{R}^+$表示全体正实数的集合，用$\mathbf{R}^-$表示全体负实数的集合.

2. 常用数集

常用数集除了自然数集$\mathbf{N}$、整数集$\mathbf{Z}$、有理数集$\mathbf{Q}$、实数集$\mathbf{R}$外，还有各类区间. 设$a,b\in\mathbf{R}$且$a<b$，则数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

称为开区间，记作(a,b)；数集

$$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为闭区间，记作$[a,b]$；数集

$$\{x\mid a\leqslant x<b\}\text{ 或 }\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

称为半开(闭)区间,记作$[a,b)$或$(a,b]$.

上述三种区间又称为有限区间,a和b称为区间端点.此外,还有无限区间:

数集$\{x \mid x > a\}$,记作$(a,+\infty)$;

数集$\{x \mid x < a\}$,记作$(-\infty,a)$;

数集$\{x \mid x \geqslant a\}$,记作$[a,+\infty)$;

数集$\{x \mid x \leqslant a\}$,记作$(-\infty,a]$;

数集$\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$,记作$(-\infty,+\infty)$.

这里$+\infty$和$-\infty$是一个记号,分别读作正无穷大和负无穷大.

3. 邻域

当$\delta > 0$时,我们称开区间$(a-\delta,a+\delta)$为点a的δ邻域,记为$U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}.$$

点a称为邻域的中心,δ称为邻域的半径.

由于$-\delta < x-a < \delta$相当于$|x-a| < \delta$.因此,

$$U(a,\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}.$$

因为$|x-a|$表示点x与点a的距离,所以$U(a,\delta)$表示与a点距离小于δ的一切点x的全体,如图1-1(a)所示.

有时利用邻域需要把邻域的中心去掉,点a的δ邻域去掉中心a后,称为点a的去心δ邻域,如图1-1(b)所示.记作$\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

为了方便,把开区间$(a-\delta,a)$称为点a的左δ邻域,把开区间$(a,a+\delta)$称为点a的右δ邻域.

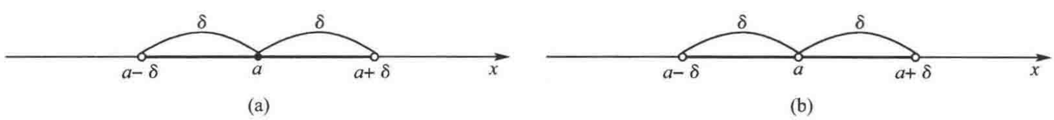


图 1-1

1.1.2 映射

定义 1.1 设A,B是两个非空集合,如果按照某一个确定的规则f,对于集合A中每一个元素,在集合B中都有唯一的元素与它对应,则称f是由集合A到集合B的映射.记作

$$f: A \to B.$$

如果A中的元素a,对应的是B中的元素b,记作$b = f(a)$,并称b为a的像,a为b的原像(图1-2).

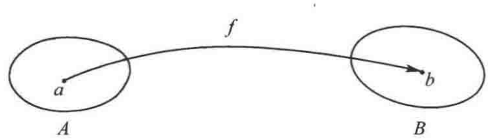


图 1-2

【例 1-1】　设 A 表示一个班级的全体学生，B 表示实数集合，对应规则 f 是某一确定时刻学生的身高，则 f 是由 A 到 B 的映射.

【例 1-2】　设 $A=\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$，$B=\{y \mid 0 \leqslant y \leqslant 8\}$，对应规则 f 是将集合 A 中的元素取立方，则 f 是由 A 到 B 的映射.

1.1.3　函数

定义 1.2　设数集 $D \subset \mathbf{R}$，则称映射 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为

$$y=f(x), x \in D,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

由函数的定义可知，函数是映射的一个特例. 因此，在函数的定义中，D 中的每一个数 x 按照对应法则 f，总有唯一确定的值 y 与之对应，称这个值为函数 f 在 x 处的函数值，记为 $f(x)$，即 $y=f(x)$. 与 x_0 对应的 y 值有时也记为 $f(x)\Big|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$. 习惯上，也称 y 是 x 的函数. 而函数值的全体所组成的数集称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y \mid y=f(x), x \in D\}.$$

以后，我们遇到用数学表达式表示的函数，如不说明定义域，函数的定义域就是使数学表达式有意义的实数全体. 若由实际问题所确定的函数，其定义域要由这个问题的实际意义来确定.

对于不同的函数，应该用不同的记号，如 $f(x)$，$g(x)$，$F(x)$，$G(x)$ 等等.

在函数定义中，对于每一个 $x \in D$，都有唯一一个确定的值 y 与之对应，这样定义的函数称为单值函数. 如果给定一个法则，按照这个法则，对于每一个 $x \in D$，都有确定的 y 值与之对应，但这个 y 总是不唯一，我们称这种法则确定了一个多值函数. 对于多值函数，通常是限制 y 的范围而使之成为单值函数，再进行研究. 例如，函数 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 是多值函数，当 y 限制在 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 时，就成为单值函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，当 y 限制在 $-1 \leqslant y \leqslant 0$ 时，也成为单值函数 $y=-\sqrt{1-x^2}$.

以后，凡没有特别说明时，函数都是指单值函数.

【例 1-3】　常量 C 可以看作一个函数. 显然，对于任意的一个实数 x，都对应唯一的常数 C，这个函数也称为常数函数，其定义域是实数集 $\mathbf{R}$.

【例 1-4】　求函数 $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域.

解　这个函数的表达式是两项之和，所以当且仅当每一项都有意义时，函数才有意义. 第一项的定义域是 $D_1=\{x \mid -4 \leqslant x \leqslant 6\}$，第二项的定义域是 $D_2=\{x \mid -5<x<5\}$. 所以，函数 $f(x)$ 的定义域 $D=D_1 \cap D_2=\{x \mid -4 \leqslant x<5\}$，或写为区间 $[-4,5)$.

【例 1-5】　设函数 $f(x)=x^2-3x+4$，求 $f(0)$，$f(t^2)$，$f\left(\dfrac{1}{t}\right)$，$[f(t)]^2$，$\dfrac{1}{f(t)}$.

解

$$f(0)=0-3\times 0+4=4,$$
$$f(t^2)=(t^2)^2-3\times t^2+4=t^4-3t^2+4,$$

$$f\left(\frac{1}{t}\right)=\left(\frac{1}{t}\right)^2-3\,\frac{1}{t}+4=\frac{1-3t+4t^2}{t^2},$$

$$[f(t)]^2=(t^2-3t+4)^2,$$

$$\frac{1}{f(t)}=\frac{1}{t^2-3t+4}.$$

【例 1-6】 设 $f(x+3)=\dfrac{x+1}{x+2}$,求 $f(x)$.

解 令 $x+3=t$,则 $x=t-3$,

$$f(t)=\frac{(t-3)+1}{(t-3)+2}=\frac{t-2}{t-1}$$

即

$$f(x)=\frac{x-2}{x-1}.$$

1.1.4 函数的表示法

常用的函数表示法有三种:公式表示法、图形表示法和表格表示法. 图形表示法和表格表示法比较直观,是工程中常用的方法;公式表示法通常用在分析研究中.

通常我们把坐标平面上的点集

$$\{P(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x),x\in D$ 的图形.

【例 1-7】 某地的气象站用自动温度记录仪记载了该地在一昼夜间气温变化的情况,如图 1-3 所示.

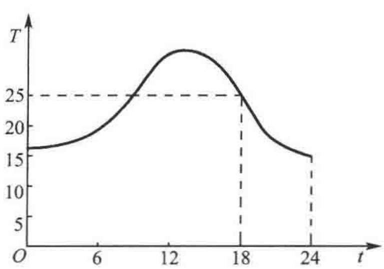


图 1-3

对[0, 24] 内的任意时间 t,都对应唯一的一个温度 T,T 是 t 的函数. 此函数是用图 1-3 中的曲线表示的,函数的定义域是[0,24](单位:h).

【例 1-8】 某城市一年中各月毛线的零售量(单位:百公斤) 见表 1-1.

表 1-1

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量 S	81	86	55	45	9	5	6	15	94	181	144	123

表 1-1 表示了某城市毛线零售量 S 随月份 t 变化的情况,S 是 t 的函数,此函数是用表格表示的. 它的定义域是{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}.

【例 1-9】　炼油厂要建造容积为 V_0 的圆柱形储油罐(图 1-4),试建立它的表面积与底半径之间的函数关系式.

解　设圆柱形储油罐的底半径为 r、高为 h、表面积为 S,则 $S=2\pi rh+2\pi r^2$. 由于储油罐的容积 V_0 一定,由 $V_0=\pi r^2 h$,得 $h=\dfrac{V_0}{\pi r^2}$,代入上面表面积公式,即得储油罐的表面积 S 与底半径 r 之间的函数关系式 $S=\dfrac{2V_0}{r}+2\pi r^2$,这个函数的定义域为 $0<r<+\infty$.

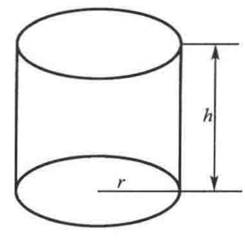


图 1-4

有时变量之间的函数关系较为复杂,需要用几个式子来表示. 例如,

$$y=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x-1, & x>0 \end{cases},$$

这是在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内的不同区间上用不同式子表示的一个函数,这种形式的函数,称为分段函数. 这个分段函数的图形如图 1-5 所示. 需要注意的是,此分段函数是用三个式子表示的函数,而不是三个函数. 同时,还需注意,在求函数值时,应该把自变量的值代入相应变化范围的式子中去计算.

【例 1-10】　已知函数 $f(x)=\begin{cases} -1-x^2, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1+x^2, & x>0 \end{cases}$,

(1) 求 $f(x)$ 的定义域；　　(2) 求 $f(0)$,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$,$f(1)$,$f(-2)$.

解　由函数的表达式可以看出,$f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

$$f(0)=0,$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4},$$
$$f(1)=1+1^2=2,$$
$$f(-2)=-1-(-2)^2=-5.$$

函数 $f(x)$ 的图形如图 1-6 所示.

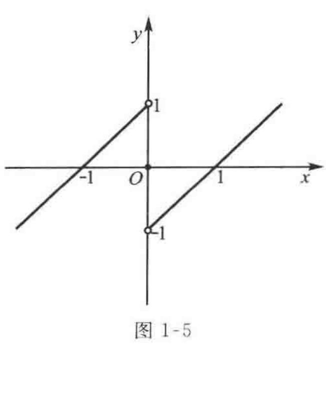


图 1-5

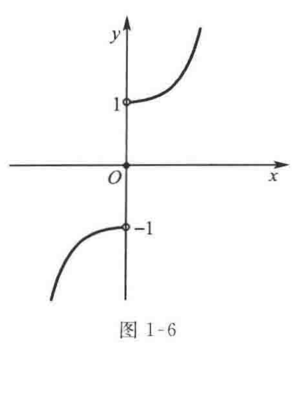


图 1-6

1.1.5 函数的特性

1. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有意义，若存在一个正数 M，使得对于区间 I 上任意一点 x，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界，或称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是有界函数. 如果不存在这样的正数 M，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上无界，或称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是无界函数.

显然，区间 I 上的有界函数 $f(x)$ 的图像位于以两条直线 $y=\pm M$ 为边界的带形区域内（M 是该函数的界）.

例如，函数 $y=\sin x$ 在其定义域内是一个有界函数，而函数 $y=x+3$ 在区间 $[2,7]$ 上也是一个有界函数，即存在 $M=10$，使对任意 $x\in[2,7]$，都有 $|x+3|\leqslant M$.

函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在定义域内是无界函数，因为不存在这样的正数 M，使得对于定义域上的所有 x，都有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 成立.

注意 有这样的情况：函数在其定义域上的某一部分是有界的，而在其定义域上的另一部分是无界的. 因此，一个函数是有界的还是无界的，必须指出相应的范围.

如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在定义域内是无界的，但在区间 $[1,2]$ 上是有界的.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于 I 上的任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；如果对于 I 上的任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

单调增加与单调减少的函数统称为单调函数. 使单调函数成立的区间 I 称为函数的单调区间.

单调增加的函数的图形在其单调区间内，从左向右是一条上升的曲线，而单调减少的函数的图形在其单调区间内，从左向右是一条下降的曲线（图 1-7 和图 1-8）.

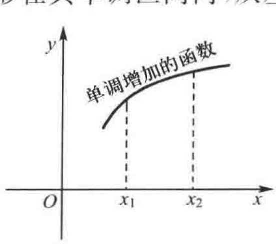


图 1-7

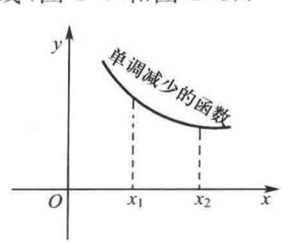


图 1-8

例如，$y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是单调增加的函数.

注意　一个函数在某一区间内是单调增加的，而在另一个区间内是单调减少的，或者在某个区间内既不单调增加，也不单调减少，即是一个非单调函数.

例如，$y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的，而在 $(-1,1)$ 内是非单调函数.

又如，$y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对任一 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；如果对任一 $x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

例如，$y=x^2$，$y=\cos x$ 都是偶函数；$y=x^3$，$y=\sin x$ 都是奇函数；而 $y=x^2+\sin x$ 既不是奇函数，也不是偶函数，即是一个非奇非偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称(图 1-9 和图 1-10).

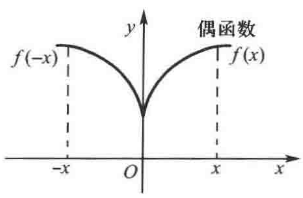


图 1-9

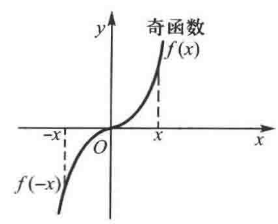


图 1-10

【例 1-11】　判断函数 $y=x^4-2x^2$ 的奇偶性.

解　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 因为 $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$，所以 $y=x^4-2x^2$ 是偶函数.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在常数 $l>0$，使得对于任意 $x\in D$，有 $(x\pm l)\in D$，且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，l 称为周期. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 的周期为 2π，函数 $\tan x$，$\cot x$ 的周期为 π.

【例 1-12】　若函数 $f(x)$ 以 ω 为周期，试证函数 $y=f(ax)\ (a>0)$ 以 $\frac{\omega}{a}$ 为周期.

证明　令 $F(x)=f(ax)$，我们只需证明 $F\left(x+\frac{\omega}{a}\right)=F(x)$ 即可.

因为 $F\left(x+\frac{\omega}{a}\right)=f\left[a\left(x+\frac{\omega}{a}\right)\right]=f(ax+\omega)$，令 $t=ax$，则

$$f(ax+\omega)=f(t+\omega)=f(t),\quad 即\ f(ax+\omega)=f(ax),$$

所以

$$F\left(x+\frac{\omega}{a}\right)=F(x).$$

即 $f(ax)$ 以$\frac{\omega}{a}$ 为周期.

例如,$\sin 3x$ 的周期是$\frac{2\pi}{3}$,$\cos\frac{1}{2}x$ 的周期是 4π.

1.1.6 反函数

设函数 $f:D\to f(D)$ 是单映射,则它存在逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$,称映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数.

例如,函数 $y=2x+8$ 对于任何 y 值都有唯一的 x 值(即 $x=\frac{1}{2}y-4$) 与之对应,因此,函数 $y=2x+8$ 存在反函数 $x=\frac{1}{2}y-4$.

考查函数 $y=x^2$:定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$. 对于任意 $y\in(0,+\infty)$,有两个不同的 x 值(即 $\pm\sqrt{y}$) 都以 y 为对应值,因此,对于 $x\in(-\infty,+\infty)$,不存在 $y=x^2$ 的反函数. 但是,如果我们把定义域限制在$[0,+\infty)$,则对任意一个 $y\in[0,+\infty)$,就只有唯一的 $x=\sqrt{y}$ 以 y 为对应值,因此,存在反函数 $x=\sqrt{y}$. 同样,若把定义域限制在$(-\infty,0]$,则有反函数 $x=-\sqrt{y}$.

图 1-11 示出了函数 $y=x^2$ 在$[0,+\infty)$ 和$(-\infty,0]$ 上的两个反函数.

习惯上,人们总是将自变量用 x 表示,因变量用 y 表示. 因此,$y=f(x)$,$x\in D$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$,$x\in f(D)$.

由于 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的关系是 x 与 y 互换,易见,函数与其反函数的图形是关于直线 $y=x$ 对称的,如图 1-12 所示.

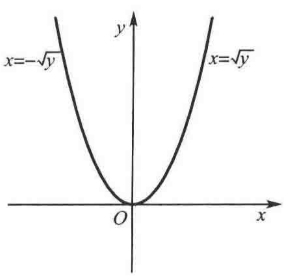


图 1-11

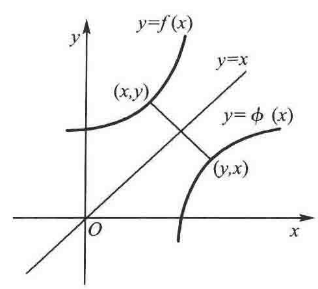


图 1-12

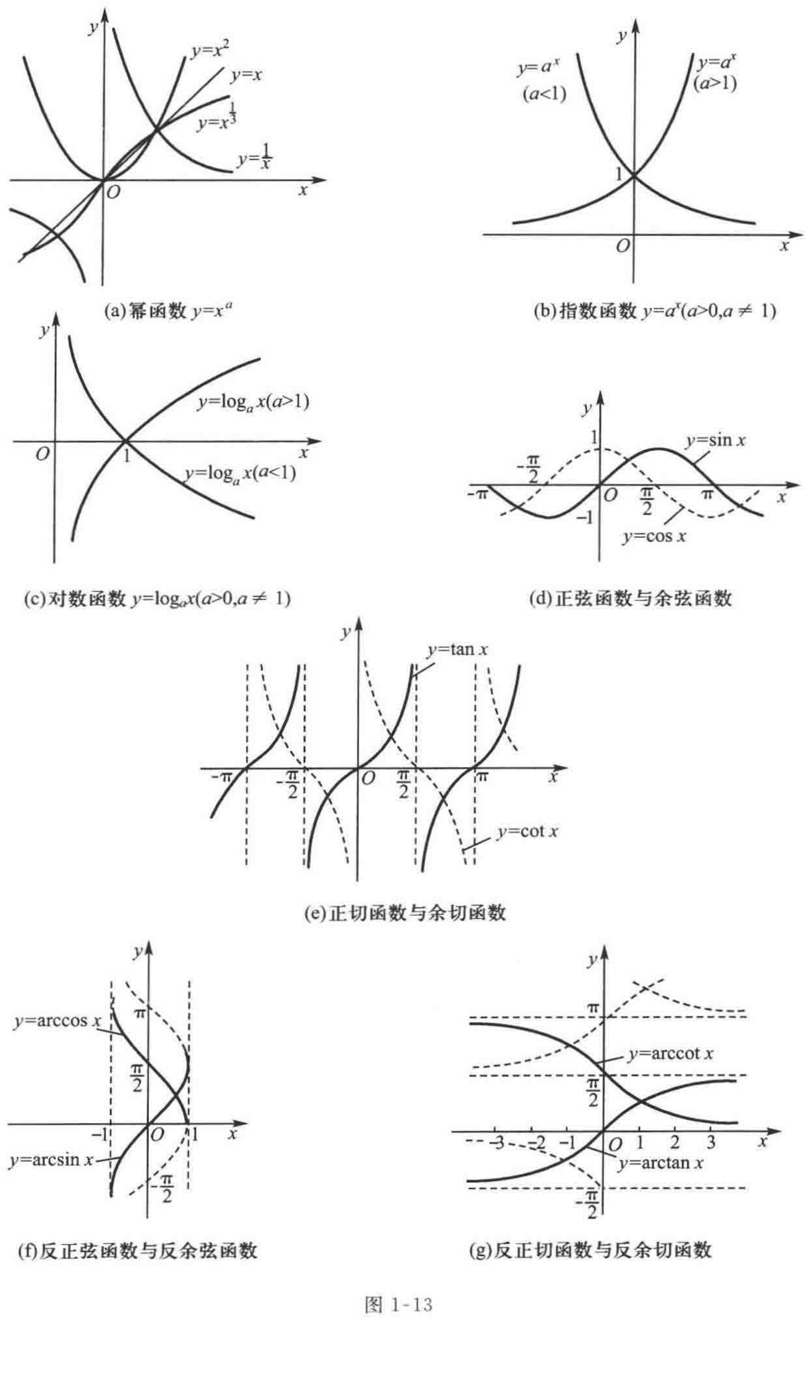
【例 1-13】 求 $y=4x+8$ 的反函数.

解 由已知函数解出 x,得 $x=\frac{1}{4}y-2$,将 x,y 互换,得 $y=\frac{1}{4}x-2$,所以 $y=4x+8$ 的反函数为 $y=\frac{1}{4}x-2$.

1.1.7　复合函数与初等函数

1. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等五类函数统称为基本初等函数，它们的图形如图 1-13 所示.



(a) 幂函数 $y=x^a$　(b) 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$

(c) 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$　(d) 正弦函数与余弦函数

(e) 正切函数与余切函数

(f) 反正弦函数与反余弦函数　(g) 反正切函数与反余切函数

图 1-13

2. 复合函数

我们先来看一个例子，设 $y=u^2$，$u=3x+2$，则对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $u=3x+2\in(-\infty,+\infty)$；又由 $y=u^2$，定义域 $u\in(-\infty,+\infty)$，有 $y=(3x+2)^2\in(0,+\infty)$，即 y 通过中间媒介 u 成为 x 的函数，称 $y=(3x+2)^2$ 是由 $y=u^2$，$u=3x+2$ 复合而成的复合函数. 一般地，我们有下面的定义.

定义 1.3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D，函数 $u=\varphi(x)$，$x\in I$，其值域为 R_φ，且 $R_\varphi\cap D$ 为非空集合，那么函数 $y=f[\varphi(x)]$ 称为由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，u 称为中间变量.

关于复合函数，需要说明两点：

(1) 要构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，其关键是要求 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集是非空集合. 所以，并不是任意两个函数都能组合在一起构成一个复合函数.

例如，$y=\sqrt{u}$，定义域 $D=[0,+\infty)$；$u=1-x^2$，值域 $R_\varphi=(-\infty,1]$. 由于 $R_\varphi\cap D$ 为非空集合，所以 $y=f(u)=\sqrt{1-x^2}$ 是复合函数.

又如，$y=\sqrt{u}$，定义域 $D=[0,+\infty)$；$u=-5-x^2$，值域 $R_\varphi=(-\infty,-5]$. 由于 $R_\varphi\cap D$ 为空集，所以 $y=\sqrt{u}$，$u=-5-x^2$ 不能构成复合函数.

(2) 复合函数可以由两个以上的函数构成，所以，它的中间变量可以多于一个. 例如，$y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$，构成复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$，u 与 v 都是中间变量.

利用复合函数的概念，可以把一个复合函数分解为几个简单的函数，此时应将复合函数由外向里逐层分解. 所谓简单函数是指基本初等函数及由其四则运算构成的函数.

【例 1-14】 将函数 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=5x-4$ 构成一个复合函数，并求出这一复合函数的定义域.

解 将 $v=5x-4$，$u=\ln v$ 逐次代入 $y=\sqrt{u}$ 中，得到这三个函数所构成的复合函数 $y=\sqrt{\ln(5x-4)}$. 由 $\ln(5x-4)\geqslant 0$，得 $x\geqslant 1$，所以此复合函数的定义域是 $[1,+\infty)$.

【例 1-15】 把函数 $y=e^{\sqrt{x+1}}$ 分解成几个简单函数.

解 函数 $y=e^{\sqrt{x+1}}$ 分解成简单函数 $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x+1$.

3. 初等函数

定义 1.4 由常数及基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的函数复合步骤所构成并可以用一个式子表示的函数，称为初等函数.

不是初等函数的函数称为非初等函数.

例如，$y=\sqrt{x-2}$，$y=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$，$y=\sqrt{4-x^2}+\sin\dfrac{1}{1+x^2}$ 等都是初等函数. 显然，分段函数不是初等函数.

习题 1-1

1. 用集合符号写出下列集合：