

无穷的玩艺

数学的探索与旅行

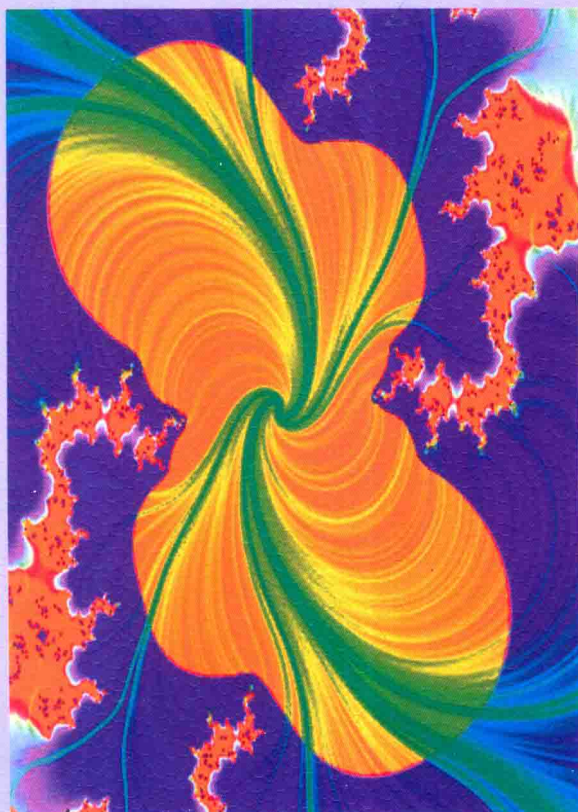
(匈)路沙·彼得◎著
朱梧楦 袁相碗 郑毓信◎译



02

(珍藏版)

数学科学文化理念传播丛书(第一辑)



Playing With Infinity
Mathematical Explorations and Excursions



大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

无穷的玩艺

数学的探索与旅行

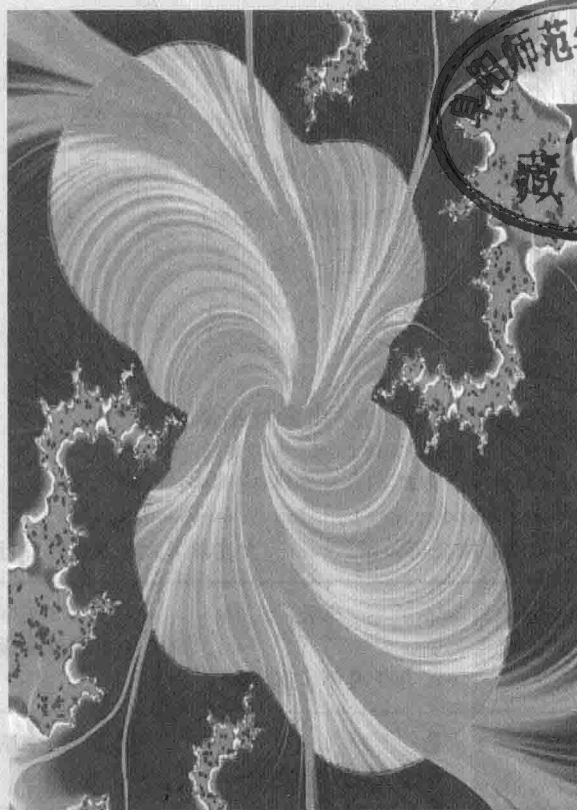
(匈)路沙·彼得◎著
朱梧檟袁相碗郑毓信◎译



02

(珍藏版)

数学科学文化理念传播丛书(第一辑)



Playing With Infinity
Mathematical Explorations and Excursions



大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

图书在版编目(CIP)数据

无穷的玩艺：数学的探索与旅行：珍藏版 / (匈) 彼得著；朱梧槿，袁相碗，郑毓信译. —2版. —大连：大连理工大学出版社，2016.1

(数学科学文化理念传播丛书)

ISBN 978-7-5685-0150-7

I. ①无… II. ①彼… ②朱… ③袁… ④郑… III. ①数学—普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 233319 号

大连理工大学出版社出版

地址：大连市软件园路 80 号 邮政编码：116023

发行：0411-84708842 传真：0411-84701466 邮购：0411-84708943

E-mail: dutp@dutp.cn URL: <http://www.dutp.cn>

大连住友彩色印刷有限公司印刷

大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：188mm×260mm

印张：16.25

字数：228 千字

2008 年 4 月第 1 版

2016 年 1 月第 2 版

2016 年 1 月第 1 次印刷

责任编辑：刘新彦 王 伟

责任校对：田中原

封面设计：冀贵收

ISBN 978-7-5685-0150-7

定价：39.00 元



数学科学文化理念传播丛书·第一辑

编写委员会

丛书顾问 周·道本 王梓坤
胡国定 钟万勰 严士健
丛书主编 徐利智
执行主编 朱梧檠
委 员 (按姓氏笔画排序)
王 前 王光明 冯克勤 李文林
杜国平 肖奚安 罗增儒 郑毓信
徐沥泉 涂文豹 萧文强

总 序



一、数学科学的含义及其在 学科分类中的定位

20 世纪 50 年代初,我曾就读于东北人民大学(现吉林大学)数学系,记得在二年级时,曾有两位老师^①在课堂上不止一次地对大家说:“数学是科学中的女王,而哲学是女王中的女王。”

对于一个初涉高等学府的学子来说,很难认知其言真谛.当时只是朦胧地认为,其言大概是指学习数学这一学科非常值得,也非常重要.或者说与其他学科相比,数学可能是一门更加了不起的学问.到了高年级时,开始慢慢意识到,数学与那些研究特殊的物质运动形态的学科(诸如物理、化学和生物等)相比,似乎真的不在同一个层面上.因为数学的内容和方法不仅要渗透到其他任何一个学科中去,而且要是真的没有了数学,则就无法想像其他任何学科的存在和发展了.后来我终于知道了这样一件事,那就是美国学者道恩斯(Douen-ss)教授,曾从文艺复兴时期到 20 世纪中叶所出版的浩瀚书海中,精选了 16 部名著,并称其为“改变世界的书”.在这 16 部著作中,直接运用了数学工具的著作就有 10 部,其中有 5 部是属于自然科学范畴的,它们是:

- (1) 哥白尼(N. Copernicus)的《天体运行》(1543 年);
- (2) 哈维(William Harvery)的《血液循环》(1628 年);
- (3) 牛顿(I. Newton)的《自然哲学之数学原理》(1729 年);
- (4) 达尔文(E. Darwin)的《物种起源》(1859 年);

^① 此处的“两位老师”指的是著名数学家徐利治先生和著名数学家、计算机科学家王湘浩先生.当年徐利治先生正为我们开设“变分法”和“数学分析方法及例题选讲”,而王湘浩先生正为我们讲授“近世代数”和“高等几何”.

(5) 爱因斯坦(A. Einstein)的《相对论原理》(1916 年)。

另外 5 部是属于社会科学范畴的,它们是:

(6) 潘恩(T. Paine)的《常识》(1760 年);

(7) 史密斯(Adam Smith)的《国富论》(1776 年);

(8) 马尔萨斯(T. R. Malthus)的《人口论》(1789 年);

(9) 马克思(Karl Max)的《资本论》(1867 年);

(10) 马汉(R. Thomas Mahan)的《论制海权》(1867 年);

在道恩斯所精选的 16 部名著中,若论直接或间接地运用数学工具的,则就无一例外了。由此可以毫不夸张地说,数学乃是一切科学的基础、工具和精髓。

至此似已充分说明了如下事实:数学不能与物理、化学、生物、经济或地理等学科在同一层面上并列。特别是近 30 年来,先不说分支繁多的纯粹数学的发展之快,仅就顺应时代潮流而出现的计算数学、应用数学、统计数学、经济数学、生物数学、数学物理、计算物理、地质数学、计算机数学等如雨后春笋般地产生、存在和发展的事实,就已经使人们去重新思考过去那种将数学与物理、化学等学科并列在一个层面上的学科分类法的不妥之处了。这也是多年以来,人们之所以广泛采纳“数学科学”这个名词的现实背景。

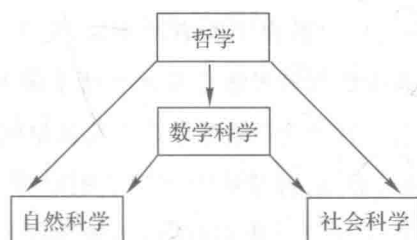
当然,我们还要进一步从数学之本质内涵上去弄明白上文所说之学科分类上所存在的问题,也只有这样才能使我们能在理性层面上对“数学科学”的含义达成共识。

当前,数学被定义为是从量的侧面去探索和研究客观世界的一门学问。对于数学的这样一种定义方式,目前已被学术界广泛接受。至于有如形式主义学派将数学定义为形式系统的科学,更有如形式主义者柯亨(Cohen)视数学为一种纯粹的在纸上的符号游戏,以及数学基础之其他流派所给出之诸如此类的数学定义,可谓均已进入历史博物馆,在当今学术界,充其量只能代表极少数专家学者之个人见解。既然大家公认数学是从量的侧面去探索和研究客观世界,而客观世界中之任何事物或对象又都是质与量的对立统一,因此没有量的侧面的事物或对象是不存在的。如此从数学之定义或数学之本质内涵出发,就必然导致数学与客观世界中的一切事物之存在和发展密

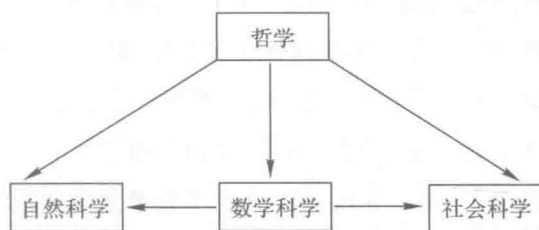
切相关,同时也决定了数学这一研究领域有其独特的普遍性、抽象性和应用上的极端广泛性,从而数学也就在更抽象的层面上与任何特殊的物质运动形式息息相关.由此可见数学与其他任何研究特殊的物质运动形态的学科相比,要高出一个层面.在此或许可以认为,这也就是本人少时所闻之“数学是科学中的女王”一语的某种肤浅的理解.

再说哲学乃是从自然、社会和思维三大领域,亦即从整个客观世界的存在及其存在方式中去探索科学世界之最普遍的规律性的学问,因而哲学是关于整个客观世界的根本性观点的体系,也是自然知识和社会知识的最高概括和总结.因此哲学又要比数学高出一个层面.

这样一来,学科分类之体系结构似应如下图所示:



如上直观示意图的最大优点是凸现了数学在科学中的女王地位,但也有矫枉过正与骤升两个层面之嫌.因此,也可将学科分类体系结构示意图改为下图所示:



如上示意图则在于明确显示了数学科学居中且与自然科学和社会科学相并列的地位,从而否定了过去那种将数学与物理、化学、生物、经济等学科相并列的病态学科分类法.至于数学在科学中之女王地位,就只能从居中角度去隐约认知了.关于学科分类体系结构之如上两个直观示意图,究竟哪一个更合理,在这里就不多议了,因为少

时耳闻之先入为主,往往会使一个人的思维方式发生偏差,因此留给本丛书的广大读者和同行专家们去置评了。

二、数学科学文化理念与 文化素质原则的内涵及价值

数学有两种品格,其一是工具品格,其二是文化品格。对于数学之工具品格而言,在此不必多议。由于数学在应用上的极端广泛性,因而在人类社会发展,那种挥之不去的短期效益思维模式必然导致数学之工具品格愈来愈突出和愈来愈受到重视。特别是在实用主义观点日益强化的思潮中,更会进一步向数学纯粹工具论的观点倾斜,所以数学之工具品格是不会被人们淡忘的。相反地,数学之另一种更为重要的文化品格,却已面临被人淡忘的境况。至少数学之文化品格在今天已经不为广大教育工作者所重视,更不为广大受教育者所知,几乎到了只有少数数学哲学专家才有所了解的地步。因此我们必须古识重提,并且认真议论一番数学之文化品格问题。

所谓古识重提指的是:古希腊大哲学家柏拉图(Plato)曾经创办了一所哲学学校,并在校门口张榜声明,不懂几何学的人,不要进入他的学校就读。这并不是因为学校所设置的课程需要以几何知识基础才能学习,相反地,柏拉图哲学学校里所设置的课程都是关于社会学、政治学和伦理学一类课程,所探讨的问题也都是关于社会、政治和道德方面的问题。因此,诸如此类的课程与论题并不需要直接以几何知识或几何定理作为其学习或研究的工具。由此可见,柏拉图之所以要求他的弟子先行通晓几何学,绝非着眼于数学之工具品格,而是立足于数学之文化品格。因为柏拉图深知数学之文化理念和文化素质原则的重要意义。他充分认识到立足于数学之文化品格的数学训练,对于陶冶一个人的情操,锻炼一个人的思维能力,直至提升一个人的综合素质水平,都有非凡的功效。所以柏拉图认为,不经过严格数学训练的人是难以深入讨论他所设置的课程和议题的。

前文指出,数学之文化品格已被人们淡忘,那么上述柏拉图立足于数学之文化品格的高智慧故事,是否也被人们彻底淡忘甚或摒弃了呢?这倒并非如此。在当今社会中,仍有高智慧的有识之士,在某

些高等学府的教学计划中,深入贯彻上述柏拉图的高智慧古识.列举两个典型事例如下:

例1,大家知道,从事律师职业的人在英国社会中颇受尊重.据悉,英国律师在大学里要修毕多门高等数学课程,这既不是因为英国的法律条文一定要用微积分去计算,也不是因为英国的法律课程要以高深的数学知识为基础,而只是出于这样一种认识,那就是只有通过严格的数学训练,才能使之具有坚定不移而又客观公正的品格,并使之形成一种严格而精确的思维习惯,从而对他取得事业的成功大有帮助.这就是说,他们充分认识到了数学的学习与训练,绝非实用主义的单纯传授知识,而深知数学之文化理念和文化素质原则,在造就一流人才中的决定性作用.

例2,闻名世界的美国西点军校建校将近两个世纪,培养了大批高级军事指挥员,许多美国名将也毕业于西点军校.在军校的教学计划中,学员们除了要选修一些在实战中能发挥重要作用的数学课程(如运筹学、优化技术和可靠性方法等)之外,规定学员还要必修多门与实战不能直接挂钩的高深的数学课.据我所知,本丛书主编徐利治先生多年前访美时,西点军校研究生院曾两次邀请他去做“数学方法论”方面的讲演.西点军校之所以要学员们必修这些数学课程,当然也是立足于数学之文化品格.也就是说,他们充分认识到,只有经过严格的数学训练,才能使学员们在军事行动中,能把那种特殊的活力与高度的灵活性互相结合起来,才能使学员们具有把握军事行动的能力和适应性,从而为他们驰骋于疆场打下坚实的基础.

然而总体来说,如上述及的学生或学员,当他们后来真正成为哲学大师、著名律师或运筹帷幄的将帅时,早已把学生时代所学到的那些非实用性的数学知识忘得一干二净了.但那种铭刻于头脑中的数学精神和数学文化理念,却会长期地在他们的事业中发挥着重要作用.亦就是说,他们当年所受到的数学训练,一直会在他们的生存方式和思维方式中潜在地起着根本性的作用,并且受用终身.这就是数学之文化品格、文化理念与文化素质原则之深远意义和至高的价值所在.

三、《数学科学文化理念传播丛书》

出版的意义与价值

有现象表明,教育界和学术界的某些思维方式正在深陷纯粹实用主义的泥潭,而且急功近利、短平快的病态心理正在病入膏肓。因此,推出一套旨在倡导和重视数学之文化品格、文化理念和文化素质的丛书,一定会在扫除纯粹实用主义和诊治急功近利病态心理的过程中起到一定的作用,这就是出版本丛书的意义和价值所在。

那么究竟有些什么现象足以说明纯粹实用主义思想已经很严重了呢?如果要详细地回答这一问题,至少可以写出一本小册子来。在此只能举例一二,点到为止。

现在计算机专业的大学一、二年级学生,普遍不愿意学习逻辑演算与集合论课程,认为相关内容与计算机专业没有什么用。那么我们的教育管理部门和相关专业人士又是如何认知的呢?据我所知,南京大学早年不仅要给计算机专业本科生开设这两门课程,而且还要开设递归论和模型论课程。然而随着思维模式的不断转移,不仅递归论和模型论早已停开,而且逻辑演算与集合论课程的学时数也在逐步缩减。现在国内坚持开设这两门课的高校已经很少了,大部分高校只在离散数学课程中,给学生讲很少一点逻辑演算与集合论知识。其实,相关知识对于培养计算机专业的高科技人才来说是至关重要的,即使不谈这是最起码的专业文化素养,难道不明白我们所学之程序设计语言是靠逻辑设计出来的?而且柯特(E. P. Codd)博士创立关系数据库,以及许华兹(J. T. Schwartz)教授开发的集合论程序设计语言 SETL,可谓全都依靠数理逻辑与集合论知识的积累。但却很少有专业教师能从历史的角度并依此为例去教育学生,甚至还有极个别的专家教授,竟然主张把“计算机科学理论”这门硕士研究生学位课取消,认为这门课相对于毕业后去公司就业的学生太空洞,这真是令人瞠目结舌。特别是对于那些初涉高等学府的学子来说,其严重性更在于他们的知识水平还不了解什么有用或什么无用的情况下,就大言这些有用或那些无用的实用主义想法。好像在他们的思想深处根本不知道高等学府是培养高科技人才基地,竟把高等学府视为

专门培训录入、操作与编程的技工学校。因此必须让教育者和受教育者明白,用多少学多少的教学模式只能适用于某种技能的培训,对于培养高科技人才来说,此类纯粹实用主义的教学模式是十分可悲的。不仅误人子弟,如果任其误入歧途继续陷落下去,必将直接危害国家和社会的发展前程。

另外,现在有些现象甚至某些评审规定,所反映出来的心态和思潮就是短平快和急功近利,这样的软环境对于原创性研究人才的培养弊多利少。杨福家院士说:^①

“费尔马大定理是数学上一大难题,360多年都没有人解决,现在一位英国数学家解决了,他花了9年时间解决了,其间没有写过一篇论文。我们现在的规章制度能允许一个人9年不出文章吗?”

“要拿诺贝尔奖,都要攻克很难的问题,不是灵机一动就能出来的,不是短平快和急功近利就能够解决问题的,这是异常艰苦的长期劳动。”

据悉,居里夫人一生只发表了7篇文章,却两次获得诺贝尔奖。现在晋升副教授职称,都要求在一定年限内,在一定级别杂志上发表一定数量的文章,还要求有什么奖之类的,在这样的软环境里,按照居里夫人一生中发表文章的数量计算,岂不只能当个老讲师。

清华大学是我国著名的高等学府,1952年,全国高校进行院系调整,在调整中清华大学变成了工科大学。直到改革开放后,清华大学才开始恢复理科并重建文科。我国各层领导开始认识到世界一流大学均以知识创新为本,并立足于综合、研究和开放,从而开始重视发展文理科。11年前,清华人立志要奠定世界一流大学的基础,为此而成立清华高等研究中心。经周光召院士推荐,并征得杨振宁先生同意,聘请美国纽约州立大学石溪分校聂华桐教授出任高等中心主任。5年后接受上海《科学》杂志编辑采访,面对清华大学软环境建设和我国人才环境的现状,聂华桐先生明确指出:^②

“中国现在推动基础学科的一些办法,我的感觉是失之于心太

① 王德仁等,杨福家院士“一吐为快——中国教育5问”,扬子晚报,2001年10月11日A8版。

② 刘冬梅,营造有利于基础科技人才成长的环境——访清华大学高等研究中心主任聂华桐,科学,Vol. 154, No. 5, 2002年。

急,出一流成果,靠的是人,不是百年树人吗?培养一流科技人才,即使不需百年,却也绝不是短短几年就能完成的.现行的一些奖励、评审办法急功近利,凑篇数和追指标的风气,绝不是真心献身科学者之福,也不是达到一流境界的灵方.一个作家,您能说 he 发表成百上千篇作品,就能称得上是伟大文学家了吗?画家也是一样,真正的杰出画家也只凭少数有创意的作品奠定他们的地位.文学家、艺术家和科学家都一样,质是关键,而不是量.”

“创造有利于学术发展的软环境,这是发展成为一流大学的当务之急.”

面对那些急功近利和短平快的不良心态及思潮,前述杨福家院士和聂华桐先生的一番论述,可谓十分切中时弊,也十分切合实际.

大连理工大学出版社能在审时度势的前提下,毅然决定立足于数学文化品格编辑出版《数学科学文化理念传播丛书》,不仅意义重大,而且胆识非凡.特别是大连理工大学出版社的刘新彦和梁锋等不辞辛劳地为丛书的出版而奔忙,实是智慧之举.还有 88 岁高龄的著名数学家徐利治先生依然思维敏捷,不仅大力支持丛书的出版,而且出任丛书主编,并为此而费神思考和指导工作,由此而充分显示徐利治先生在治学模式中的奉献精神 and 远见卓识.

序言中有些内容取材于“数学科学与现代文明”^①一文,但对文字结构做了调整,文字内容做了补充,对文字表达也做了改写.

朱梧楨

2008 年 4 月 6 日于南京

① 1996 年 10 月,南京航空航天大学校庆期间,名誉校长钱伟长先生应邀出席庆典,理学院名誉院长徐利治先生应邀在理学院讲学,老友朱剑英先生时任校长,他虽为著名的机械电子工程专家,但从小喜爱数学,曾通读《古今数学思想》巨著,而且精通模糊数学,又是将模糊数学应用于多变量生产过程控制的第一人.校庆期间钱伟长先生约请大家通力合作,撰写“数学科学与现代文明”一文,并发表在上海大学主办的《自然杂志》上.当时我们就觉得这个题目分量很重,要写好这个题目并非轻而易举之事.因此,我们(徐利治、朱剑英、朱梧楨)曾多次在一起研讨此事,分头查找相关文献,并列提纲细节,最后由朱梧楨执笔撰写,并在撰写过程中,不定期会面讨论和修改补充,终于完稿,由徐利治、朱剑英、朱梧楨共同署名,分为(上)、(下)两篇,作为特约专稿送交《自然杂志》编辑部,先后发表在《自然杂志》1997,19(1):5-10 与 1997,19(2):65-71.

序 言

本书不是为数学家,而是为文学家、艺术家和社会工作者而写的。由于我在艺术中得益匪浅,我现在愿意奉上数学作为一种报偿,并想由此而能使大家看到数学和艺术之间有着许多共同之处。我之所以喜爱数学,不只是因为它在技术上有广泛的应用,而主要是因为数学是一门美妙的学科。人们在数学中纳入了游戏的素材和内容,而且我们能在其中找到最有趣味的关于无穷的游戏。数学能为世界提供这样一些与观念和无穷相关的富有意义的东西(这不同于乏味的乘法表),同时我们在数学中又能自始至终地看到人类创造力的痕迹。

虽然这是一本通俗读物,但这并不意味着该书对于有关题材的处理是肤浅的。恰恰相反,在概念的表述中,我力图做到彻底的明晰性和精确性,从而即使是数学家也可从中得到新的启发;对于教师来讲,则尤为如此。书中所省略的只是那些使人十分容易感到厌烦的系统性的论证,即那些纯粹技术性的东西(本书的目的并不在于讲授数学技巧),但有兴趣的学生也可从这本书中获得关于整个数学的一个总的印象。在开始写作本书时,我并没有打算让它包含如此之多的内容,但在写作过程中,内容却不断地得到扩充,只是可省略的题材大为减少。如果书中包括了某些过去曾被认为是乏味的题材,则我所做的正是如下的一种工作,即当我偶然地面对着几件搁置已久的老式家具,我拂去其上的灰尘而使之重放光彩。

读者可能会感到书中某些部分的陈述过于素朴,但我并不介意。因与简单事实相联系的素朴观点,往往能使人感到发明的乐趣。

我将在“前言”中告诉读者本书的由来,其中提到的作家就是 M. Benedek。我曾为解释微积分而写信给他,正是他提出了可将这些

信件的内容发展成一本书的建议。

我并没有事前直接参阅过任何书籍,当然我早在许多别的书中学到了很多,但已经无法准确地一一说出它们的出处.就在我写作本书的当时,也并没有在我面前摆上任何参考的书籍,但一些比喻却不时地自动浮现在我的脑海之中,甚至还能记得一些比喻的来源.例如,Rademacher 和 Toeplitz 合写的那部出色的著作,或如 Beke 关于分析的精湛介绍,几乎在我的头脑中形成了一种格式,以致在写作中除掉按照这种格式之外,简直别无他法了.就这一点而言,我特别受惠于 L. Kalmar,他既是我同时代的人,又是我的数学导师,我所写的一切都和他的思想有着不可分割的联系.这里应特别提到“巧克力糖”的例子,本书中关于无穷级数的讨论,正是借助了这一源自于他的例子进行的.此外,关于对数表的建立过程的分析也完全是他的思想.

在本书中,我还将提到那些曾在我任教期间与我合作过的学生,我想只需提到他们的姓氏,他们就能猜到我说的谁了.另外,我必须感谢我的学生 Kato,当时她刚刚结束中学的学业,就给本书的写作以很大的帮助——正是依靠她的协助,我才能做到以一个有天赋的学生的眼光来看待书中的材料.

对我的最重要的帮助来自那些对数学不感兴趣的人们,我的好朋友 B. Lay 是一位剧作家,并深信自己没有数学头脑,他曾逐章阅读了本书的初稿,而且每一章的内容都要在他感到满意之后才能定稿.如果没有他的帮助,本书也许永远不会写成.

P. Csillag 以数学家的眼光对全书进行了审查,并在百忙之中抽时间浏览了全书手稿.我之所以确信书中没有什么错误,应归功于他们.

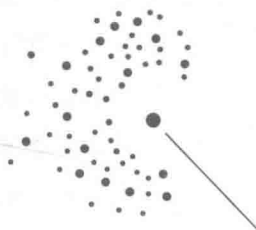
作者

1943 年秋于布达佩斯

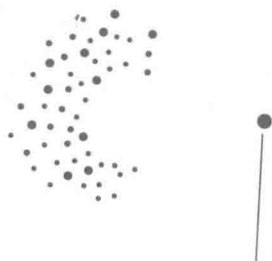
前 言

我有一位好朋友，他是一位作家，在很久以前的一次谈话中曾向我抱怨说，在他所受的教育中有一个很重要的方面被忽视了，那就是他不懂得数学。在他从事本职工作，即进行写作时，感到这是一种欠缺。他记得在学校的数学课上所学到的坐标系，并已将它应用于比喻和想象，他相信在数学中一定还有很多这种可以应用的题材。然而，由于数学知识的缺乏，使他无法从这一丰富的源泉中吸取营养，以致在表达能力方面显得十分贫乏。而且他认为这一缺陷已无法弥补，因为他相信自己永远也不能真正深入到数学的核心中去了。

我常常回忆起这次谈话，促使我产生了一种想法，感到在这方面是有工作可做的。因为在我看来，数学中最主要的成分始终是思想方法，而这确实是人类共同的思想源泉，即使作家或艺术家们也可从中吸取营养。我在学生时代所经历的一件事，也许可以看成是这方面的一个例子。当时我和一些同学正在朗读肖伯纳的一个剧本，我们当时曾读到这样一个情节，剧中的勇士问女主角，她借以征服和支配那些最难以驾驭的人的秘密究竟是什么？女主角沉思了片刻，然后回答说：也许在于以下的事实，就是她和任何一个人都不特别接近。这时正在朗读的那个同学突然叫喊起来：“我们今天所学的数学问题不也是这样的吗？”他所说的数学问题是这样的，即能否由某一点集外的一个点如此地趋近这一点集，以使它同时趋近于点集中的每一个点？对于这一问题的回答是肯定的，只要点集外的那个点与整个点集具有足够远的距离，如下图所示。



从这样的点出发是不可能的,因当它接近点集中的某些点的同时,它必定在离开点集中的其他一些点.



从这样的点出发是可以的.

对于那位作家所说的另外一些话,即如他永远也不能真正深入数学的核心中,又如他说他永远也不能理解微商的概念等,对此我是不大相信的.我尝试着把这一概念的确立过程分解为一些尽可能简单而又明显的步骤,然后逐步地对它进行解释,结果意外地使我认识到对于一个外行来说,即使是最简单的公式也可能显得十分困难.而且数学家们甚至都无法想象出其中的困难程度.就像一个教师无法理解一个小孩可以几十次地去拼读 C-a-t,竟始终没能看出这就是 Cat(猫),而且它比“猫”具有更多的内涵.

以往的经验促使我进一步去思考,过去我总认为人们之所以对数学有如此之多的误解,完全是因为缺乏好的通俗读物.例如,关于微分学的通俗读物,公众对此显然是有兴趣的,对此只要看人们是怎样急切地去阅读任何可能得到的此类读物,但却没有任何一位真正的数学家曾写过这样的书.我所希望的是这样的专家,他能确切地知道能把问题简化到怎样的程度而又不致造成误解;他也懂得此处所需要的并不是给一粒苦药丸(对于大多数人来说,数学的确是一种带有苦味的回忆)包上一层令人喜爱的甜味的外壳.他应能恰如其分地揭示其中的关键之处,也应了解数学创造的乐趣,他还应能按读者的可接受程度去进行写作.但是我现在还真有点怀疑,像这种真正的通俗读物是否仍是不可理解的.

数学家最本质的特点也许是乐于承受前进道路上的艰辛. Euclid 曾对一位对数学感兴趣的君王说:“在数学中是没有专为君王铺设的道路的.”这就是说,即使对于君王来说,也无法使得数学变得容易一

些,你不能走马观花地去阅读数学书籍,数学中的那些不可避免的抽象性确实包含着某种“自讨苦吃”的成分,而数学家们就是以“自讨苦吃”为乐趣的.上述结论对一般人来说也是适用的.因为,即使对于最简单的通俗读物来说,也只有那些能在一定程度上承受数学重担,并能不厌其烦地去弄清各个公式的详尽内容的人才能真正弄懂.

但是,现在的这本书却并不是为这些人写的.本书将采用不用任何公式的办法来讲授数学,并将着重讨论数学的思想方法.我不知道这一努力能否取得成功.由于不使用公式,使我丧失了一种基本的数学工具,然而对于形式的重要性,无论是作家或数学家都是清楚地认识到的.例如,只要设想一下,若不使用十四行诗的形式,那么又如何能使人们去欣赏和领略十四行诗的意境呢?但我却仍然想尝试一下,因为我相信,即使放弃了公式,数学的某些实质性的东西仍然可以得到保存.

但是我希望读者不要采取如下的“捷径”,就是将某些章节留待以后去阅读,或者只是肤浅地浏览一下.须知数学大厦只能一砖一瓦地建造,其中没有一步是可以省略的.虽然这一点在这本书中,可能还不像那些过于追求严格化而直至令人厌烦的书中那样突出,但读者还是必须遵循书中所包含的一点很少的要求,即应认真地去研究图形,还应切实地去进行那些并不困难的作图和计算.我将保证不会提出更多的要求而使读者厌烦.

书中无需用到任何中学数学课上所讲授的内容,我将从计数开始,而最终将到达讲授数理逻辑这一现代数学的分支为止.