

高等数学

在中学数学中的应用、1000 例

吕 凤 董笑咏 梁世安 主编

东北师范大学出版社

(吉)新登字 12 号

高 等 数 学
在中学数学中的应用 1000 例

GAODENG SHUXUE

ZAI ZHONGXUE SHUXUE ZHONG DE YINGYONG 1000 LI

主 编 吕 凤 董笑咏 梁也安

责任编辑:李殿国 封面设计:李冰彬 责任校对:吕 凤

东北师范大学出版社出版

东北师范大学出版社发行

(长春市斯大林大街 110 号)

东北师范大学计算机系制版

(邮政编码:130024)

通辽教育印刷厂印刷

开本:787×1092 毫米 1/32

1995 年 10 月第 1 版

印张:29.875

1995 年 10 月第 1 次印刷

字数:92 千

印数:0 001—3 000 册

ISBN 7 - 5602 - 1654 - 4/G · 778

定价(精装) 38.80 元

全书编委会名单

顾 问 金长泽

主 编 吕 凤 董笑咏 梁世安

副主编 (按姓氏笔画为序)

王大海 王世祥 叶 琳 李殿国

季秀云 赵秀云 侯学章 秦志耘

徐晓光 敬石心 潘 宁

编著者 (按姓氏笔画为序)

王大海 王世祥 王荣秋 叶 琳

刘国桐 吕 凤 关 科 李殿国

李 贞 朴红梅 季秀云 邹怀勤

吴捍强 赵秀云 段晋明 徐晓光

秦志耘 侯学章 梁世安 敬石心

董笑咏 潘 宁

各部分编委名单

数学分析部分

主 编 吕 凤 董笑咏 王大海 侯学章
李殿国 赵秀云

编著者 (按姓氏笔画为序)

王大海 叶 琳 吕 凤 李殿国
季秀云 侯学章 赵秀云 徐晓光
秦志耘 董笑咏 潘 宁

高等代数部分

主 编 吕 凤 董笑咏 秦志耘 潘 宁
编著者 (按姓氏笔画为序)

王大海 叶 琳 吕 凤 李 贞
季秀云 侯学章 赵秀云 秦志耘
董笑咏 潘 宁

几何部分

主 编 董笑咏 徐晓光 叶 琳 季秀云
赵秀云

编著者 (按姓氏笔画为序)
王大海 叶 琳 季秀云 赵秀云
侯学章 徐晓光 秦志耘 董笑咏
潘 宁

复变函数部分

主 编 梁世安 李殿国 王世祥 敬石心

编著者 (按姓氏笔画为序)
王世祥 李殿国 李 贞 刘国桐
邹怀勤 赵秀云 徐晓光 梁世安
敬石心

前 言

《高等数学在中学数学中的应用 1000 例》书共四部分。第一部分数学分析在中学数学中应用，第二部分高等代数在中学数学中应用，第三部分几何在中学数学中应用，第四部分复变函数在中学数学中应用。

高等教育不是空中楼阁，中等教育可谓是它的基础。无疑，初等数学与高等数学的本质联系是可想而知的。然而，高等数学如何渗透到中学的数学之中，使之内在的本质联系得以体现，这是许多从事师范数学教育工作者经常考虑的问题。

目前，多数中学数学教师已达到或即将达到“专业合格证书”的水平，他们希望用已学到的某些高等数学知识去指导自己讲授的中学数学教材，从而进一步提高专业素质和教学质量；同时也考虑到中学教师在职进修的需要，使他们通过本书的学习，在解决中学数学各种类型题时，除他们已熟知的初等方法外，还应掌握用高等数学方法解决中学数学问题，特别应掌握对一些用初等数学方法难以解决或即使能解决，但显得难、繁的中学数学问题，而用高等数学方法易于解决的一些数学方法，从而拓广了解题思路、技巧，提高了教师专业水平，促进中学数学教学。

本书所有例题，选自中学数学教材，中学数学习题集，中学数学竞赛试题及公开发行的面向中学的各种数学杂志中数学问题。概括有：因式分解、代数求值、等式证明、解代

数方程及方程组、不等式解法及证明、求函数的解析表达式、定义域及值域、求函数的最值及极值、函数作图、数列求和及极限、排列、组合及二项式定理、三角函数及反三角函数化简、平面几何中四点共圆、三点共线、三线共点、定值问题等围绕中学数学教学实际涵盖面广，层次、角度分明。

我们编写本书时，考虑到当前广大初中数学教师的专业现状，为了使他们阅读本书方便，我们采取了以高等数学内容为主线，将中学数学内容分类，按其所用高等数学知识编排成章节。每节分别有：

预备知识 将本节所需高等数学知识，以定理、定义形式给出。

应用例题 每道例题均有详解，多数例题有解法或证法，个别题后加“注”，进一步强调具有普遍规律性的数学方法。

这样编排既突出了中学数学内容，又集中地反映了所用高等数学知识，以便读者阅读本书时勿需再另查找高等数学，同时在文字叙述上力求通俗易懂，使本书具有可读性，便于广大中学教师；各类师范院校数学系青年教师、高年级学生；参加数学竞赛的中学生自学。

该书从选题到完稿，承蒙国家教委师范司金长泽司长的大力支持、并在百忙中审阅了初稿，提出了许多宝贵的意见和建议，对他为本书的问世与提高本书的质量所付出的辛勤劳动表示深切感谢。

我们编写本书尚属探索，缺点、甚至错误在所难免，恳请读者不吝赐教。

前三部分共十三章。第一章由侯学章、叶琳执笔，第二章由董笑咏、叶琳执笔，第三章由吕凤、董笑咏、徐晓光、赵秀云执笔，第四章由王大海、徐晓光、李殿国、赵秀云执笔，

第五章由秦志耘、叶琳执笔，第六章由潘宁、李殿国、季秀云执笔，第七章由秦志耘、侯学章执笔，第八章由吕凤、王大海执笔，第九章、第十章由董笑咏、秦志耘执笔，第十一章由秦志耘、季秀云执笔，第十二章由徐晓光、侯学章、王大海执笔，第十三章由叶琳、赵秀云执笔。第四部分中第十四、十五章由李殿国执笔，第十六章由梁世安执笔，第十七章由王世祥、敬石心执笔，第十八章由梁世安执笔。前三部分由吕凤、董笑咏统稿、定稿，第四部分由梁世安统稿、定稿。

编著者

一九九四年五月

目 录

数学分析部分

第一章 函数	(3)
§ 1.1 函数概念	(4)
§ 1.2 几种特殊函数	(23)
第二章 连续函数	(53)
§ 2.1 极限	(53)
§ 2.2 连续函数在讨论方程实根中的应用	(70)
第三章 可微函数	(77)
§ 3.1 导数在证明不等式中的应用	(77)
§ 3.2 导数在证明恒等式中的应用	(148)
§ 3.3 导数在因式分解、化简代数式、超越式中的应用	(160)
§ 3.4 导数在求值(极值、最值)中的应用	(169)
§ 3.5 导数在求函数值域中的应用	(182)
§ 3.6 导数在解方程中的应用	(186)
§ 3.7 微分在近似计算与误差估计中的应用	(200)
§ 3.8 利用导数作函数图象	(212)
第四章 可积函数	(223)
§ 4.1 积分在证明不等式中的应用	(223)
§ 4.2 积分在求数列通项中的应用	(242)
§ 4.3 积分在求和中的应用	(262)

§ 4.4	积分在求平面图形面积中的应用	(287)
§ 4.5	积分在求空间立体体积与表面面积中的应用	(308)
§ 4.6	积分在求曲线弧长中的应用	(322)

高等代数部分

第五章	集合及其运算	(331)
-----	--------------	-------

§ 5.1	容斥原理	(331)
§ 5.2	抽屉原理	(342)
§ 5.3	集合及运算在解题中的应用	(345)

第六章	多项式	(348)
-----	-----------	-------

§ 6.1	多项式在判别“整除性”中的应用	(348)
§ 6.2	多项式的可约性	(363)
§ 6.3	有理式的计算及等式的证明	(379)
§ 6.4	关于多项式根的讨论	(393)
§ 6.5	计算自然数 P 的方幂和与高阶等差级数	(400)
§ 6.6	多项式在几何与三角函数中的应用	(410)
§ 6.7	多项式在解高次方程组与不等式中的应用	(419)
§ 6.8	求多项式函数与值	(430)

第七章	行列式	(437)
-----	-----------	-------

§ 7.1	行列式在因式分解中的应用	(437)
§ 7.2	行列式在数列中的应用	(447)
§ 7.3	行列式在代数式及方程中的应用	(452)
§ 7.4	行列式在平面几何、三角中的应用	(461)
§ 7.5	行列式在解析几何中的应用	(468)
§ 7.6	范德蒙行列式在代数方程及方程组方面的应用	(471)

第八章	矩阵	(483)
-----	----------	-------

§ 8.1	矩阵在计算多项式的乘积中的应用	(483)
-------	-----------------------	-------

§ 8.2	矩阵在多项式整除及因式分解中的应用	(496)
§ 8.3	矩阵在求最大公因式中的应用	(505)
§ 8.4	矩阵在解二元高次方程中的应用	(517)
§ 8.5	矩阵在求递推式数列通项中的应用	(523)
第九章	欧氏空间	(534)
§ 9.1	欧氏空间中一些性质在初等几何中的应用	(534)
§ 9.2	向量内积在证明不等式中的应用	(538)
§ 9.3	欧氏空间理论在求极值中的应用	(544)
第十章	二次型	(552)
§ 10.1	化二次型为标准形	(552)
§ 10.2	实二次多项式的极值	(567)
§ 10.3	二次多项式的因式分解	(577)

几何部分

第十一章	向量代数	(595)
§ 11.1	向量的加(减)法与数乘向量	(595)
§ 11.2	向量间的线性关系与向量的分解	(604)
§ 11.3	线段的定比分点	(612)
§ 11.4	向量的数性积	(620)
§ 11.5	两个向量相互垂直的充要条件	(628)
§ 11.6	向量的向量积	(634)
§ 11.7	向量的混合积	(640)
第十二章	二次曲线(面)的不变量	(651)
§ 12.1	二次曲线方程的分类与化简	(651)
§ 12.2	二次曲线的渐近线	(659)
§ 12.3	二次曲面的不变量	(670)
§ 12.4	主直径坐标变换法	(681)

第十三章 高等几何	(691)
§ 13.1 平行射影与中心射影在初等几何中的应用	(691)
§ 13.2 仿射变换在证明有关三角形的仿射性质命题中的应用	(697)
§ 13.3 仿射变换在解决有关椭圆仿射性质的问题中的应用	(701)
§ 13.4 直交比、调和比在初等几何证题中的应用	(706)
§ 13.5 笛沙格定理与巴卜斯定理在初等几何中的应用	(713)
§ 13.6 笛沙格定理与截面作图	(718)

复变函数部分

第十四章 复数的基础知识	(727)
§ 14.1 实数	(727)
§ 14.2 从实数到复数	(730)
§ 14.3 例题	(737)
§ 14.4 1 的立方根	(740)
§ 14.5 共轭复数	(742)
§ 14.6 复数的绝对值 (模)	(745)
§ 14.7 复数的极坐标表示	(747)
§ 14.8 根式与乘、除法	(750)
§ 14.9 棣美佛定理	(753)
§ 14.10 复数的 n 次根	(757)
第十五章 复数在代数学中的应用	(764)
§ 15.1 复数与数组	(764)
§ 15.2 复数与数列	(766)
§ 15.3 复数与不等式	(768)

✓ § 15.4	复数与方程	(781)
▷ § 15.5	复数与组合数的求和	(800)
✓ § 15.6	复数与多项式整除	(805)
§ 15.7	复数与多项式因式分解	(815)
第十六章	复数在几何学中的应用	(817)
§ 16.1	复数和、差的几何表示	(817)
§ 16.2	复数积商的几何表示, 旋转	(827)
✓ § 16.3	复数与重心, 正三角形的条件	(834)
§ 16.4	复数与平行、垂直、相似、共圆等条件	(847)
▷ § 16.5	直线与圆的复数表示	(854)
§ 16.6	复数与向量的夹角	(859)
✓ § 16.7	复数与三角形面积	(862)
§ 16.8	复数与共线共点等条件	(869)
§ 16.9	复数与几何学中的极大极小值	(879)
§ 16.10	复数与几何轨迹	(886)
第十七章	复数在三角学中的应用	(897)
§ 17.1	复数与和角公式	(897)
§ 17.2	复数与倍角公式	(901)
§ 17.3	复数与三角函数幂的公式	(907)
§ 17.4	复数与三角级数部分和	(909)
§ 17.5	复数与三角恒等式	(916)
▷ § 17.6	复数与反三角函数	(919)
第十八章	映射	(921)
§ 18.1	线性映射	(921)
§ 18.2	初等函数 $w = z^2$ 及 $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$	(928)
	参考文献	(935)

数学分析部分

賤學代辭代

第一章 函 数

客观世界的一切事物都处于不间断的运动之中,事物的运动是永恒的。尽管事物运动的形态千差万别,它们的运动方式千姿百态,但是它们却有一个共同的属性,那就是同一事物在其运动过程中各种量(常量和变量)都是遵循着互相依赖、互相制约着的规律。人们把量与量之间的相依规律抽象出来,这就是函数。换句话说,函数就是客观世界中量与量之间相依规律的一种数学抽象。

函数不仅是高等数学研究的主要对象,而且也是初、高中《代数》研究的主要对象。

例如,初中《代数》的有理数四则运算,其实质就是两个有理数到有理数集,且满足某些运算律的映射(或函数)。代数式是初中《代数》的主要内容,其实质就是以字母为自变数的函数。求方程 $f(x)=0$ 的根就是求函数 $f(x)$ 的零点。至于初中《代数》的正比函数、反比例函数、一次函数和二次函数它们就是函数。高中《代数》用了较长篇幅讲了幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等基本初等函数。数列是定义在自然数集 N 上的函数,不等式、线性方程组、一元多项式、 n 次方程等都是函数或函数的特殊情况,由此可见,函数确实为初、高中《代数》研究的主要对象,因此,函数是中学数学教材的一个极为重要的概念。正确理解和掌握函数概念是十分重要的。

基本初等函数(幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数)经过有限次初等运算——代数运算(加、减、乘、除、整数次的乘方、开方)和有限次初等超越函数运算(无理数次乘方、对数化、三角运算、反三角运算等)所构成的复合函数,统称为初等函数。根据求函数值所需的运算性质,将初等函数分类如下: