重点难点疑点问答及水平反馈丛书

修订本

# 高二数学

## （代　　数）

主编：崔孟明　编著：徐望根　俞绍康　姚　楷

三环出版社

重点难点疑点问答与水平反馈丛书

# 高二数学

## （代　数）

编著：徐望根　俞绍康　姚　楷

三环出版社

（琼）新登字 03 号

重点难点疑点问答与水平反馈丛书
高二数学（代数）
徐望根　俞绍康　姚　楷　编著
海南（三环）出版社出版
（海口市滨海大道花园新村 20 号　邮编：570001）
责任编辑：刘文武　朱作霖　　封面设计：张　戈
国家教委图书馆工作委员会装备用书
河北乐亭县印刷厂印刷
787×1092mm　　32 开本　　8.875 印张　190 千字
1991 年 2 月第 1 版　　1995 年 6 月第 4 次印刷
ISBN 7—80564—331—8/G・201　　定价：7.1 元
★凡我社出版物如有印装问题，请直接与承印厂调换

# 《重点难点疑点问答与水平反馈丛书》编委会

# 前　言

学生学习，既要学习科学知识，又要通过学习知识培养良好的品德素质，提高分析问题和解决问题的能力。能力的核心是思维能力。设疑解疑是发展思维、提高能力的重要途径。

学生在学习过程中，只有掌握基础知识、基本概念和基本技能，才能顺利解疑，提高学习效果。由于学生各自的基础不同，对应该掌握的知识理解深度不同，因而需要帮助他们加深对重点、难点知识的理解。为此，我们组织了北京市及全国重点中学的特、高级教师和教学研究人员编写了这套《重点难点疑点问答与水平反馈丛书》，它包括语文、数学、物理、化学和英语等主要学科，与中学各科教材相对应。

该丛书有如下特点：

**一、全面贯彻“依纲扣本”的原则**。该丛书自 1991 年出版问世以来，曾连续再版四次，深受读者欢迎。但由于出版时间较长，教材改动比较频繁，使这套书远远不能满足读者的需要。鉴此，我们组织作者在原书基础上依据新版《教学大纲》和新教材进行了全面修订，力图做到与教学进程相对应，从而更好地满足读者的需要。

**二、有较高的理论水平**。该丛书是作者总结多年的教学经验和教研成果，广泛吸收和借鉴国内外先进的教育理论，针对青少年的性格特点和学习心理而精心编写出来的，具有较高的理论指导意义。

**三、针对性强**。该丛书针对学生在学习过程中可能遇到

的重点、难点、疑点知识，进行多层次、多角度地解析，以使学生深入浅出融汇贯通，举一反三。

**四、及时水平反馈**。反馈是提高学习积极性，促进求知欲的有力手段。学习知识的反馈，越及时越好。因此，在解析每一个知识点之后，都附有水平反馈练习，以检验学习效果，使读者做到心中有数。

**五、开拓知识视野**。该丛书的内容，略高于课本知识，选用与课本有关的知识，课堂内外结合，使读者提高兴趣，增长知识，扩大视野。

该丛书在编写时，得到海南省教委的大力支持和关怀，并给以具体指导，在此表示衷心感谢。

在编写过程中，虽经努力，但由于时间和水平所限，难免有不足之处，敬请广大读者和同行不吝赐教。

编者

1994年10月

# 目 录

# 第一章　不等式

## 一、不等式证明依据集锦

1. 不等式的基本性质

（1）实数大小比较的等价关系（不等式基本性质的出发点）：

$a>b \Leftrightarrow a-b>0$

$a=b \Leftrightarrow a-b=0$

$a<b \Leftrightarrow a-b<0$.

（2）对称性：$a>b \Leftrightarrow b<a$.

（3）传递性：$a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$.

（4）单调性：

加法单调性：$a>b \Rightarrow a+c>b+c$；

乘法单调性：$a>b$，$c>0 \Rightarrow ac>bc$

$a>b$，$c<0 \Rightarrow ac<bc$

（5）移项法则：不等式中任何一项可以把它的符号变成相反的符号后，从一边移到另一边．

（6）运算法则：

相加法则：$a>b$，$c>d \Rightarrow a+c>b+d$；

相减法则：$a>b$，$c<d \Rightarrow a-c>b-d$；

相乘法则：$a>b>0$，$c>d>0 \Rightarrow ac>bd$；

相除法则：$a>b>0$，$0<c<d \Rightarrow \frac{a}{b}>\frac{b}{d}$；

乘方法则：$a>b>0$，$n\in N$，$n>1\Rightarrow a^n>b^n$；

开方法则：$a>b>0$，$n\in N$，$n>1\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

2. 和差积商绝对值的基本性质

（1）$|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$；

（2）$|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$；

（3）$|ab|=|a|\cdot|b|$；

（4）$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ $(b\neq0)$

3. 基本不等式

（1）$a^2\geqslant0$，或 $(a-b)^2\geqslant0$；

（2）$a^2+b^2\geqslant2ab$，$a^2+b^2=2ab\Leftrightarrow a=b$；

（3）$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ $(a>0,\ b>0)$，

$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}\Leftrightarrow a=b$；

（4）$ab>0\Rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant2$

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2\Leftrightarrow a=b$；

（5）$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$，

$\frac{a^2+b^2}{2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=ab\Leftrightarrow a=b$；

（6）$a^3+b^3+c^3\geqslant3abc$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$，

$a^3+b^3+c^3=3abc\Leftrightarrow a=b=c$；

（7）$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$，

$\frac{a+b+c}{3}=\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow a=b=c$.

4. 几个著名的不等式

(1) 设 $a_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，且

$a_1a_2a_3\cdots a_n=1$,

则有 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\geqslant n$.

这就是说，如果 n 个正数的积为 1，那么这 n 个正数的和不小于 n.

(2) 平均不等式

设 $a_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，记

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\text{（算术平均值）}$$

$$G_n=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},\text{（几何平均值）}$$

$$H_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},\text{（调和平均值）}$$

则有 $A_n\geqslant G_n\geqslant H_a$.

这就是说，n 个正数的算术平均值不小于这 n 个正数的几何平均值，n 个正数的几何平均值不小于这 n 个正数的调和平均值.

(3) 柯西一布尼亚可夫斯基不等式

设 $a_i$，$bi\in R$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right),$$

当且仅当 $a_i=kb_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 时等号成立.

在上面集锦中，我们对课本上没有提到过的或没有证明过的不等式加以证明.

例 1 设 $a>0$，$b>0$，$c>0$，试证

(1) $a^2+b^3+c^3\geqslant 3abc$，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立；

(2) $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立．

证：(1) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$= (a+b)^3+c^3-3abc(a+b)-3abc$

$= (a+b+c)[(a+b)^2-c(a+b)+c^2]-3ab(a+b+c)$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$= (a+b+c)\cdot\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

$\geqslant 0$,

($\because a>0$，$b>0$，$c>0$，$a+b+c>0$)

$\therefore a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$,

当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立．

(2) $\because a>0$，$b>0$，$c>0$,

$\because \sqrt[3]{a}>0$，$\sqrt[3]{b}>0$，$\sqrt[3]{c}>0$.

由（1）知，有

$a+b+c-3\sqrt[3]{abc}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})[(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^2+(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c})^2+(\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a})^2] \geqslant 0$,

$\therefore$ $a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$,

即 $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$,

当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立．

例 2　已知 $a_i>0$ $(i=1, 2, \cdots n)$，且 $a_1a_2\cdots a_n=1$，求证 $a_1+a_2+\cdots+a_n \geqslant n$.（$n \geqslant 2$，$n \in N$）

证：(1) 当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，有 $a_i=1$ ($i=1, 2, \cdots, n$)，且 $a_1a_2\cdots a_n=1 \Leftrightarrow a_1+a_2+\cdots+a_n=n$.

(2) 由 (1) 知，只须证当 $a_i$ 不全相等时，有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n>n.$$

用数学归纳法证明：

1) 当 $n=2$ 时，因为 $a_1\neq a_2$ $a_1>0$，$a_2>0$，且 $a_1a_2=1$，所以 $a_1\neq 1$，$\sqrt{a_1}\neq\frac{1}{\sqrt{a_i}}$，故有

$$a_1+a_2-2=a_1+\frac{1}{a_1}-2=\left(\sqrt{a_1}-\frac{1}{\sqrt{a_1}}\right)^2>0,$$

$\therefore a_1+a_2>2$.

2) 假设当 $n=k$ ($k\geqslant 2$，$k\in N$) 时，结论成立，即对不全等的 k 个正数结论成立，欲证对不全等的 $k+1$ 个正数，结论也成立，即证：

$$a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}=1 \Rightarrow a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}>k+1.$$

不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_k\leqslant a_{k+1}$，因为它们不全相等，必有 $a_1<1$，$a_{k+1}>1$，令 $y_1=a_1a_{k+1}$，因为 $y_1a_2a_3\cdots a_k=a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}=1$，所以由（归纳）假设，有

$$y_1+a_2+a_3+\cdots+a_k\geqslant k,$$

即 $$a_1a_{k+1}+a_2+a_3+\cdots+a_k\geqslant k,$$

$$a_2+a_3+\cdots+a_k\geqslant k-a_1a_{k+1},$$

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k+a_{k+1}\geqslant k-a_1a_{k+1}+a_1+a_{k+1},$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}\geqslant (k+1)+(1-a_1)(a_{k+1}-1).$$

$\because a_1<1$，$a_{k+1}>1$，

$\therefore 1-a_1>0$，$a_{k+1}-1>0$，$(1-a_1)(a_{k+1}-1)>0$，

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}>k+1$.

由 1)、2) 知，对 $n\geqslant2$，$n\in N$，有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n>n.$$

再由 (1)、(2) 知，对 $n\geqslant2$，$n\in N$，原结论成立.

例 3　设 $a_i>0$，$(i=1, 2, \cdots, n)$，试证：平均不等式 $A_n\geqslant G_n\geqslant H_n$.

(1) 先证 $An\geqslant G_n$.

$$\therefore \quad \frac{x_1}{G_n}\cdot\frac{x_2}{G_n}\cdot\cdots\cdot\frac{x_n}{G_n}=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{(G_n)^n}=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_1x_2\cdots x_n}=1,$$

$\therefore$ 由例 2 得

$$\frac{x_1}{G_n}+\frac{x_2}{G_n}+\cdots+\frac{x_n}{G_n}\geqslant n,$$

即 $$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant G_n,$$

$$A_n\geqslant G_a.$$

(2) 后证 $G_n\geqslant H_n$.

由 (1) 知，有

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\geqslant\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}},\ (a_i>0)$$

$$\therefore\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

即　$G_n\geqslant H_n$.

例 4　设 $a_i$，$b_i\in R$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 且 bi 不全为零，试证柯西一布尼亚可夫斯基不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right),$$

当且仅当 $a_i=kb_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时等号成立．

证：记 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$，$B=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2$，

$C=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$，

对任意实数 t，有

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_it)^2\geqslant 0,$$

即 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\right)t^2+2\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)t+\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant 0$，

即 $Bt^2+2Ct+A\geqslant 0$.

∵ $b_i$ 不全为零，∴ $B>0$.

∴ $\triangle=4C^2-4AB\leqslant 0$，

即 $C^2\leqslant AB$. 故原不等式成立．

又因为 $B>0$，故有

$C^2=AB\Leftrightarrow\triangle=0\Leftrightarrow Bt^2+2ct+A=0$ 有重根 $t=-k\Leftrightarrow Bk^2-2Ck+A=0\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-b_ik)^2=0\Leftrightarrow a_i=kb_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$．

故当且仅当 $a_i=kb_i$ 时，等号成立。

## 【单元知识训练】

1. 设 $a>b>0$，试证

$$a+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b}\geqslant 4.$$

2. 设 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，试证

$\sin x+\cos x+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x+\sec x+\csc x>6$.

3. 已知，$x$，$y$，$z$ 为正数，且 $x+y+z=1$，试证

$$(1-x)(1-y)(1-z)\leqslant\frac{8}{27}.$$

4. 已知 $x$，$y$，$z$ 为正数，且 $xyz=1$，试证

$$yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)\geqslant 6.$$

5. 已知 $a_i>0$，$b_i>0$，$(i=1,2,\cdots,n)$，试证

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2}$$

$$\leqslant\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2}+\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2}.$$

## 【参考答案】

1. $\because a>b>0$，$\therefore a-b>0$，

$$a+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b}$$

$$=(a-b)+b+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b}$$

$$\geqslant 4\sqrt{(a-b)\cdot b\cdot\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{b}}=4,$$

$$\therefore\ a+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b}\leqslant 4.$$

当且仅当 $a-b=b=\frac{1}{a-b}=\frac{1}{b}$，即 $b=1$，$a=2$ 时等号成立．

2. $\because x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$\because \sin x>0$，$\cos x>0$，$\operatorname{tg} x>0$，$\operatorname{ctg} x>0$，$\sec x>0$，$\csc x>0$，且它们不全相等，

$\therefore \quad \dfrac{\sin x+\cos x+\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x+\sec x+\csc x}{6}$

$>\sqrt[6]{\sin x \cos x \operatorname{tg}x \operatorname{ctg}x \sec x \csc x}=1,$

即 $\sin x+\cos x+\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x+\sec x+\csc x>6.$

3. $\because x>0$，$y>0$，$z>0$，又 $x+y+z=1$，

$\therefore 0<x<1$，$0<y<1$，$0<z<1$，

$1-x>0$，$1-y>0$，$1-z>0$，

$\therefore \sqrt[3]{(1-x)(1-y)(1-z)}$

$\leqslant \dfrac{(1-z)+(1-y)+(1-z)}{3}$

$=\dfrac{3-(x+y+z)}{3}=\dfrac{3-1}{3}=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore (1-x)(1-y)(1-2)\leqslant \dfrac{8}{27}.$

4. $yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)$

$=\dfrac{yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)}{xyz}\ (\because xyz=1)$

$=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z}$

$\geqslant 6\sqrt[6]{\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{z}{x}\cdot\dfrac{z}{y}\cdot\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{x}{z}\cdot\dfrac{y}{z}}=6.$

$\therefore yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)\geqslant 6.$

5. 利用柯一布不等式，有

$(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2$

$=[a_1(a_1+b_1)+b_1(a_1+b_1)]+[a_2(a_2+b_2)+b_2(a_2+b_2)]+\cdots+[a_n(a_n+b_n)+b_n(a_n+b)]$

$=[a_1(a_1+b_1)+a_2(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)]+[b_1(a_1+b_1)+b_2(a_2+b_2)+\cdots+b_n(a_n+b_n)]$

$\leqslant (a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)^{\frac{1}{2}}[(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\cdots+$