

JIEGOU YOUHUA SHEJI FANGFA YU GONGCHENG YINGYONG

结构优化设计方法 与工程应用

白新理 马文亮 著



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

JIEGOU YOUHUA SHEJI FANGFA YU GONGCHENG YINGYONG

结构优化设计方法 与工程应用

白新理 马文亮 著



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书主要阐述结构优化设计的基本概念、理论、常用优化方法及渡槽优化设计工程实例。主要内容包括优化设计概述、一维搜索方法、无约束优化方法、约束优化方法、多目标问题和混合离散变量优化方法、结构优化设计灵敏度分析、基于遗传算法的结构优化设计、简单构件优化设计、渡槽槽身结构优化设计等。

本书可供结构相关专业的教师和工程技术人员参考，也可作为理工科院校工程力学专业及相关专业高年级本科生、研究生的教材。

图书在版编目 (CIP) 数据

结构优化设计方法与工程应用/白新理, 马文亮著. —北京: 中国电力出版社, 2015. 12
ISBN 978-7-5123-8592-4

I. ①结… II. ①白…②马… III. ①工程结构—结构设计 IV. ①TU318

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 283546 号

中国电力出版社出版发行

北京市东城区北京站西街 19 号 100005 <http://www.cepp.sgcc.com.cn>

责任编辑: 王晓蕾 联系电话: 010-63412610

责任印制: 蔺义舟 责任校对: 闫秀英

汇鑫印务有限公司印刷·各地新华书店经售

2015 年 12 月第 1 版·第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16·12.25 印张·278 千字

定价: 48.00 元

敬告读者

本书封底贴有防伪标签, 刮开涂层可查询真伪

本书如有印装质量问题, 我社发行部负责退换

版权专有 翻印必究

前 言

本书是作者 20 多年从事结构优化设计教学与科研实践的总结。全书共分 10 章：第 1 章介绍结构优化的基本概念；第 2~4 章分别介绍传统的一维搜索方法、无约束优化方法和约束优化方法；第 5、6 章分别介绍多目标问题的优化方法和混合离散变量优化方法；第 7 章介绍结构优化设计灵敏度分析；第 8 章介绍近年来比较热门的基于遗传算法的结构优化设计方法；第 9 章介绍几个简单构件的优化设计数学模型的建立；第 10 章介绍渡槽槽身结构优化设计的工程应用实例。最后，在附录中列出了作者为考核各种算法所使用的 20 个程序测试函数，以及结构优化设计所涉及的数学基础知识。

本书强调方法的基本思想与几何解释，便于读者掌握和工程应用。本书可供结构相关专业教师或工程技术人员参考，也可作为工程力学专业或土木、水利、机械等相近专业的高年级本科生、研究生的教材。

本书由马文亮撰写第 4~7 章、第 9 章，其余章节由白新理撰写。最后由白新理教授统稿。

本书的部分内容参考了许多文献资料，在此向有关作者、编者一并深表谢意。

由于作者水平有限，书中错误在所难免，恳请读者不吝赐教。

著 者

2015 年 7 月

目 录

前言	
绪论	1
第 1 章 结构优化设计概述	4
1.1 优化设计问题示例	4
1.2 优化设计问题的数学模型	8
1.3 优化设计问题的几何描述	11
1.4 优化设计问题的基本解法	13
习题	16
第 2 章 一维搜索方法	17
2.1 概述	17
2.2 确定初始单谷区间的进退法	18
2.3 一维搜索方法的分类	21
2.4 区间消去法	21
2.5 函数逼近法	26
习题	30
第 3 章 无约束优化方法	32
3.1 概述	32
3.2 梯度法	33
3.3 牛顿法	37
3.4 共轭方向法及共轭梯度法	42
3.5 变尺度法	48
3.6 坐标轮换法	56
3.7 鲍威尔法	59
习题	66
第 4 章 约束优化方法	68
4.1 概述	68
4.2 约束坐标轮换法	71
4.3 内点惩罚函数法	73
4.4 外点惩罚函数法	78
4.5 混合惩罚函数法	85
4.6 序列二次规划法	85

习题	87
第 5 章 多目标问题的优化方法简介	89
5.1 多目标优化问题及其解	89
5.2 主要目标法	91
5.3 统一目标法	91
5.4 分层序列法及宽容分层序列法	94
第 6 章 混合离散变量的优化设计方法	97
6.1 概述	97
6.2 混合离散变量优化设计问题的数学模型及解法	97
6.3 离散变量的网格法	100
6.4 离散性惩罚函数法	101
6.5 混合离散变量的直接搜索与查点法	104
第 7 章 结构优化设计灵敏度分析	107
7.1 差分法	107
7.2 半解析法	109
7.3 灵敏度分析的解析法	110
第 8 章 基于遗传算法的结构优化设计	116
8.1 遗传算法概述	116
8.2 标准遗传算法	119
8.3 简单函数优化的实例	124
8.4 遗传算法的改进	127
8.5 程序设计	128
第 9 章 简单结构的优化设计	136
9.1 中心受压组合 H 形钢柱优化设计	136
9.2 矩形截面钢筋混凝土简支梁的优化设计	138
9.3 中心受压钢筋混凝土矩形截面柱的优化设计	140
9.4 地下埋管结构优化设计	142
第 10 章 渡槽槽身结构优化设计	146
10.1 渡槽槽身结构的设计原则	146
10.2 槽身结构荷载及荷载组合	147
10.3 槽身结构分析模型	148
10.4 U 形薄壳渡槽结构优化设计	150
10.5 矩形渡槽槽身结构优化设计	153
附录 A 程序测试函数	160
附录 B 优化设计的数学基础	165
B.1 矩阵	165

目 录

B. 2	向量	169
B. 3	多元函数	171
B. 4	凸集、凸函数与凸规划	177
B. 5	等式约束优化问题的极值条件	179
B. 6	不等式约束优化问题的极值条件	180
参考文献		185



绪 论

优化设计是 20 世纪 60 年代初发展起来的一门新学科，也是一项新技术和新的设计方法。它是将最优化原理和计算技术应用于设计领域，为工程设计提供一种重要的科学设计方法。利用这种方法，人们就可以从众多的设计方案中寻找出最佳设计方案，从而大大提高设计的效率和质量。在绪论中仅对结构优化设计的特点、发展概况以及本书的主要内容作一简要介绍。

1. 结构优化设计的特点

结构优化设计是相对于传统的结构设计而言的。

传统的结构设计的步骤是，设计者根据设计要求和实践经验，参考类似的工程设计（类比法），通过判断给出设计方案；然后进行强度、刚度、稳定性等各方面的计算校核，以证实设计方案的可行性。

如果条件允许，设计者可以对多个方案进行分析比较，从而对结构布局、材料选择、构件尺寸、构件外形等进行修改，以便得到更为合理的方案。在传统的结构设计中，力学分析只是起到一种校核的服务作用。由于时间和设计者经验的限制，确定的最终方案往往不是理想的最优方案，而仅仅是一个可行方案。

整个传统设计过程就是人工试凑和定性分析比较的过程，主要的工作是性能的重复分析，对于每次参数的修改，仅仅凭借经验或直观判断，并不是根据某种理论精确计算出来的。实践证明，按照传统设计方法作出的设计方案，大部分都有改进提高的余地。传统设计方法只是被动地重复分析结构的性能，而不是主动地设计结构的参数。从这个意义上讲，它没有真正体现“设计”的含义。

结构优化设计与传统的结构设计采用的是相同的基本理论，使用的是相同的基本公式，遵守的是相同的设计规范。二者的设计过程也基本相同。不同的是，后者的安全性、经济性没有衡量的标准，而前者是在一个明确的特定指标（如结构的重量最轻、体积最小、造价最低等）下来说明结构的经济性与安全性。

作为一项设计不仅要求方案可行、合理，而且应该是某些指标达到最优的理想方案。设计中的优化思想在古代就有所体现。例如，我国宋代建筑师李诫在其著作《营造法式》一书中曾指出：圆木做成矩形截面梁的高宽比应为三比二。这一结论与抗弯梁理论推导的结果十分接近。根据梁弯曲理论，最佳截面尺寸应使梁截面抗弯截面系数 W 最大。设截面宽为 b ，高为 h ，则要求

$$W = \frac{bh^2}{6} \rightarrow \max$$

若圆木直径为 d ，有 $d^2 = b^2 + h^2$ ，则

$$W = \frac{b}{6}(d^2 - b^2), \quad \frac{dW}{db} = \frac{1}{6}(d^2 - 3b^2) = 0$$

即当 $b = \frac{d}{\sqrt{3}}$ 时， W 取极大值 $\left(\frac{d^2W}{db^2} = -b < 0\right)$ ，而 $h = \sqrt{\frac{2}{3}}d$ ，则有 $\frac{h}{b} = \sqrt{2} \approx 1.414$ 。这与

$\frac{h}{b} = \frac{3}{2} = 1.5$ 很相近。

对于简单的优化问题，用古典的微分方法求极值即可得到最优解。但一般工程优化问题并非如此简单，需要采用数学理论并借助电子计算机才能完成。因此直到 20 世纪 60 年代以后，由于电子计算机和计算技术迅速发展，优化设计才有条件日益发展起来。

传统的结构设计中，所有参与计算的量都是以常量出现；而结构优化设计中，参与计算的量部分是常量、部分是以变量出现，从而形成全部的结构设计方案域。在此设计方案域中，方案个数少则数千数万，多则数亿数百亿，其中一部分是满足规范要求的方案，称为可行设计方案，其余是不可行设计方案。对于方案个数多的设计问题，即使使用电子计算机也不可能将设计方案一一进行计算，我们要利用数学手段和计算机工具，从设计方案中搜索出不但可行而且最好的方案，这个设计方案称为优化设计方案。结构优化设计把力学概念和最优化技术进行了有机的结合。实践证明，结构优化设计能缩短设计周期、节省人力、提高结构设计的质量和水平，经济效益和社会效益十分显著。

2. 优化设计发展概况

在第二次世界大战期间，由于军事上的需要产生了运筹学，运筹学提供了许多用古典微分法和变分法所不能解决的最优化方法。20 世纪 50 年代发展起来的数学规划理论形成了应用数学的一个分支，为优化设计奠定了理论基础。20 世纪 60 年代，电子计算机和计算技术的发展为优化设计提供了强有力的工具和手段，使工程技术人员能够从大量繁琐的计算工作中解放出来，把主要精力转到优化方案选择的方向上来。优化技术成功地运用于结构设计，虽然历史较短，但进展迅速，近年来在土木建筑、机械、水利工程、航空航天等结构设计方面都获得应用并取得一定成果，相关的论文篇数激增。

最早人们对结构构件进行了优化设计，进而又对简单结构进行了尝试。现在，人们对于大型的、复杂的土木建筑、机械、水利工程、航空航天等结构也进行了优化设计，并已经有了相当可喜的结果。

在国外，结构优化设计发展较早、较快。例如，美国贝尔（Bell）飞机公司曾采用优化方法解决 450 个设计变量的大型结构优化问题。在对一个机翼的设计中，取得了减轻质量达 35% 的效果。

波音（Boeing）公司也在 747 机身的设计中，采用优化设计方法，从而减轻了质量，缩短了生产周期，降低了成本。

在国内，某煤矿机械厂在出口的成套设备的液压支架结构设计中，使用了优化设计的

方法,使得产品的材料成本降低了 25%左右。首批出口的数百套设备,仅材料成本就节约了 500 万元人民币。我国南方某供水改造工程中,渡槽的设计使用了优化方法,仅钢筋混凝土、预应力钢绞线的材料成本就降低了 800 万元人民币。南水北调中线工程总干渠中,某渡槽的设计使用了优化方法,将原矩形断面改为 U 形断面,仅钢筋混凝土、预应力钢绞线的材料成本就比原设计方案降低了 3000 多万元人民币。由此可见结构优化设计所带来的经济效益。

近年来发展起来的计算机辅助设计 (CAD),在引入优化设计方法后,使得在设计过程中既能够不断选择设计参数并评选出最优设计方案,又可以加快设计速度,缩短设计周期。另外,把优化设计方法与计算机辅助设计结合起来,使设计过程完全自动化,已成为设计方法的一个重要发展趋势。

3. 本书的主要内容

结构优化设计包括两方面的内容:一是建立优化设计问题的数学模型,二是选择恰当的优化方法与程序。由于结构优化设计是应用数学方法寻求结构设计的最优方案,所以首先要根据实际的结构设计问题建立相应的数学模型,即用数学形式来描述实际设计问题。在建立数学模型时需要应用专业知识确定结构设计的限制条件和所追求的目标,确立各设计变量之间的相互关系等。结构优化设计问题的数学模型可以是解析式、试验数据或经验公式。虽然它们给出的形式不同,但都要反映设计变量之间的数量关系。

数学模型一旦建立,结构优化设计问题就变成一个数学求解问题。应用数学规划方法的理论,根据数学模型的特点,可以选择适当的优化方法,进而可以选取或自行编制计算机程序,以计算机作为工具求得最佳设计参数。

本书将着重介绍传统优化方法(数学规划理论)和智能优化方法(遗传算法)的基本概念、技术术语与基本方法,并通过实例介绍用这些方法解决结构优化设计问题的过程。全书共分 10 章:第 1 章介绍结构优化设计的基本概念;第 2~4 章分别介绍传统的一维搜索方法、无约束优化方法和约束优化方法;第 5、6 章分别介绍多目标问题的优化方法和混合离散变量优化方法;第 7 章介绍结构优化设计灵敏度分析;第 8 章介绍近年来比较热门的基于遗传算法的结构优化设计方法;第 9 章介绍几个简单构件的优化设计数学模型的建立;第 10 章介绍渡槽槽身结构优化设计的工程应用实例。最后,在附录中列出了作者为考核各种算法所使用的 20 个程序测试函数,以及结构优化设计所涉及的数学基础知识。

第 1 章

结构优化设计概述

最优化就是追求最好的结果或最优目标，从所有可能方案中选择最合理的一种方案。

最优化设计就是从所有可能设计方案中选择最合理的一种设计方案。

为了对优化设计有一具体的认识，首先在第 1.1 节中给出几个最优化设计的例子，然后再分析优化设计的数学模型、几何描述和基本解法。

1.1 优化设计问题示例

1.1.1 无盖水箱的优化设计

1. 问题及要求

边长为 a 的正方形钢板，设计制成正方形无盖水箱，如图 1-1 所示。在四个角处剪去相等的正方形，如何剪可以使水箱的容积最大？

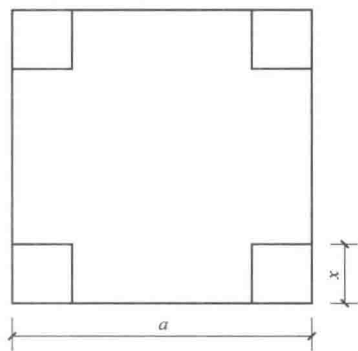


图 1-1 正方形板

设剪去的正方形的边长为 x ，则得到的无盖水箱的容积为

$$V(x) = (a - 2x)^2 x$$

其中的 a 为正方形钢板的边长，对于给定的问题，其值是确定的，在优化设计过程中是保持不变的。而剪去的正方形的边长 x 则是一个待确定的量，在优化设计过程中是要改变的。优化设计的目的就是调整 x 的大小，以取得最大的水箱容积。

2. 用解析法求解

对于简单优化问题，可以用解析法进行求解。令

$$V'(x) = (a - 2x)(a - 6x) = 0$$

解出两个驻点

$$x = \frac{a}{2} \text{ 和 } x = \frac{a}{6}$$

第一个驻点 $x = \frac{a}{2}$ 没有实际意义。第二个驻点 $x = \frac{a}{6}$ 由于

$$V''\left(x = \frac{a}{6}\right) = -4a < 0$$

所以是极大点。代入容积的表达式，得

$$V^* = \frac{2}{27}a^3$$

于是得出结论：每个角剪去边长为 $x^* = \frac{a}{6}$ 的正方形，可使所制成的水箱的容积最大。以上各量的符号加上了右上标“*”，表示该量为最优值（或最优解）。

1.1.2 人字形支架的优化设计

1. 问题及要求

图 1-2 所示的人字形支架由两个钢管构成，其顶点受外力 $2F = 3 \times 10^5 \text{ N}$ 。已知人字形支架跨度 $2B = 152 \text{ cm}$ ，钢管壁厚 $T = 0.25 \text{ cm}$ ，钢管材料的弹性模量 $E = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$ ，材料密度 $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，许用压应力 $[\sigma] = 420 \text{ MPa}$ 。求在钢管压应力 σ 不超过许用压应力 $[\sigma]$ 和失稳临界应力 $[\sigma]_{st}$ 的条件下，人字形支架的高 h 和钢管平均直径 D ，使钢管总质量 m 为最小。

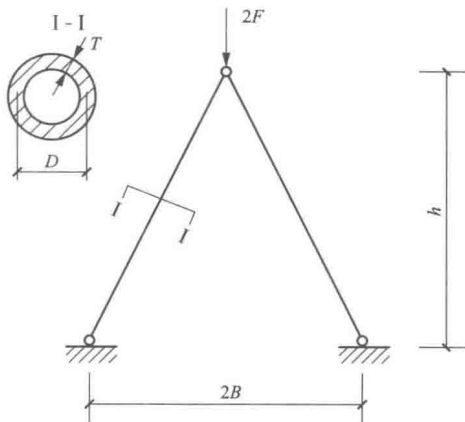


图 1-2 人字形支架

根据以上所述，可以把人字形支架的优化设计问题归结为

求 $\mathbf{X} = [D \ h]^T$ ，使结构质量

$$m(\mathbf{X}) \rightarrow \min$$

满足强度约束条件

$$\sigma(\mathbf{X}) \leq [\sigma]$$

和稳定约束条件

$$\sigma(\mathbf{X}) \leq [\sigma]_{st}$$

2. 强度、稳定条件

钢管所受压力为

$$F_N = \frac{FL}{h} = \frac{F(B^2 + h^2)^{1/2}}{h}$$

由材料力学可知，压杆失稳的临界压力为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

式中 I ——钢管截面惯性矩；

A ——钢管截面面积 (r, R 为截面内、外半径, $D = R + r$)。

$$I = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) = \frac{A}{8}(T^2 + D^2)$$

$$A = \pi(R^2 - r^2) = \pi TD$$

钢管所受的压应力为

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{F(B^2 + h^2)^{1/2}}{\pi TDh}$$

钢管的临界压应力为

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E(T^2 + D^2)}{8(B^2 + h^2)}$$

因此, 相应的强度约束条件和稳定约束条件分别可以写成

$$\begin{aligned} \frac{F(B^2 + h^2)^{1/2}}{\pi TDh} &\leq [\sigma] \\ \frac{F(B^2 + h^2)^{1/2}}{\pi TDh} &\leq \frac{\pi^2 E(T^2 + D^2)}{8(B^2 + h^2)} \end{aligned}$$

3. 用解析法求解

假定使人字形支架总质量

$$m(D, h) = 2\rho AL = 2\pi\rho TD(B^2 + h^2)^{1/2}$$

为最小的最优解, 刚好满足强度条件, 即有

$$\sigma(D, h) = [\sigma]$$

从而可以将设计变量 D 用设计变量 h 表示

$$D = \frac{F(B^2 + h^2)^{1/2}}{\pi T[\sigma]h}$$

将 D 代入目标函数 $m(D, h)$ 中, 得

$$m(h) = \frac{2\rho F}{[\sigma]} \times \frac{B^2 + h^2}{h}$$

根据极值必要条件

$$\frac{dm}{dh} = \frac{2\rho F}{[\sigma]} \times \frac{d}{dh} \left(\frac{B^2 + h^2}{h} \right) = \frac{2\rho F}{[\sigma]} \left(1 - \frac{B^2}{h^2} \right) = 0$$

得

$$h^* = B = 152/2\text{cm} = 76\text{cm}$$

$$D^* = \frac{\sqrt{2}F}{\pi T[\sigma]} = 6.43\text{cm}$$

$$m^* = \frac{4\rho FB}{[\sigma]} = 8.47\text{kg}$$

把所得参数代入稳定条件, 可以证明

$$\sigma(D^*, h^*) < \sigma_{cr}(D^*, h^*)$$

即稳定约束条件得到满足。所以, D^* 、 h^* 这两个参数是既满足强度约束条件和稳定约束条件, 又使结构最轻的最佳设计参数。

4. 作图法

在设计平面 $D-h$ 上画出代表 $\sigma(D, h) = [\sigma]$ 和 $\sigma(D, h) = \sigma_{cr}(D, h)$ 的两条曲线, 如图 1-3 所示。两曲线将设计平面分成两部分, 其中不带阴影线一侧的区域是同时满足强度

约束条件和稳定约束条件的区域，称为可行域。然后再画出若干条结构质量的等值线

$$m(D, h) = c_i$$

其中 c_i 为一系列常数。从图中可以看出，等值线在可行域内部无中心，故此约束优化问题的极值点处于可行域边界与等值线的切点处，从而找到极值点 \mathbf{X}^* 的坐标

$$D^* = 6.43\text{cm 和 } h^* = 76\text{cm}$$

通过 \mathbf{X}^* 的等值线就是最小结构质量，其值为

$$m^* = 8.47\text{kg}$$

最优点 \mathbf{X}^* 处于强度曲线上，说明此时强度条件刚好满足，而稳定条件不但满足且有一定裕量。

这表明强度约束条件为起作用约束，它影响极值点的位置，稳定约束条件为不起作用约束，它不影响极值点的位置。

5. 讨论

若将许用压应力 $[\sigma]$ 由 420MPa 提高到 703MPa，这时强度约束条件发生变化，因而可行域也发生变化，如图 1-3 所示。若仍按上述解析法进行求解，还假定最优点刚好满足强度条件，得

$$h^* = B = 76\text{cm}$$

$$D^* = \frac{\sqrt{2}F}{\pi T[\sigma]} = 3.84\text{cm}$$

$$m^* = \frac{4\rho FB}{[\sigma]} = 5.06\text{kg}$$

当在 $D-h$ 设计平面上标出此点时，可以看出它位于等值线

$$m(D, h) = 5.06\text{kg}$$

与强度曲线

$$\sigma(D, h) = 703\text{MPa}$$

的切点 \mathbf{X}_1 处。但是， \mathbf{X}_1 点位于可行域之外，它不满足稳定条件。将 \mathbf{X}_1 点处的 D 和 h 的上述数值代入稳定条件也可以证明这一点。因此，这表明 \mathbf{X}_1 不是最优点。

用作图法可找出最优点位于强度曲线和稳定曲线的交点 \mathbf{X}_1^* 处。它的坐标值就是最优参数，其值为

$$h_1^* = 51.3\text{cm}$$

$$D_1^* = 4.75\text{cm}$$

通过 \mathbf{X}_1^* 的等值线即为最小结构质量，其值为

$$m_1^* = 5.45\text{kg}$$

通过 \mathbf{X}_1^* 点的位置是由强度曲线和稳定曲线的交点所决定的，所以强度约束条件和稳定约束条件都得到满足，且二者都是起作用的约束条件。最优点仍处于可行域边界与等值线的

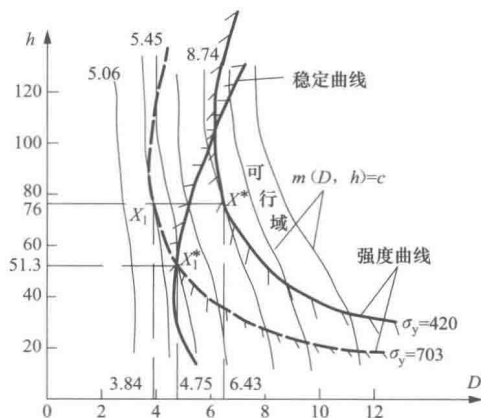


图 1-3 人字形支架优化设计图解

切点位置。

从上面的讨论可知，对于具有不等式约束条件的优化问题，需要判断哪些约束是起作用的，哪些约束是不起作用的，这对求解优化问题是很关键的。

1.2 优化设计问题的数学模型

本节对一般优化设计问题的基本概念作概括性的说明，以便突出其数学的实质，方便后续各章优化方法的讨论和学习。

1.2.1 设计变量

一个设计方案可以用一组基本参数的值来表示。这些基本参数可以是构件长度、截面尺寸、某些点的坐标值等几何量，也可以是重量、惯性矩、力或矩等物理量，还可以是应力、变形、固有频率、效率等代表工作性能的导出量。但是，对某个具体的优化设计问题，并不是要求对所有的的基本参数都用优化方法进行修改调整。有些参数可以根据已有的经验预先取为定值。这样的参数称为**设计常数**或**设计常量**，如无盖水箱问题中的边长 a ，人字形支架问题中的跨度 B 和钢管壁厚 T 。而除此之外的基本参数，则需要在优化设计过程中不断进行修改、调整，一直处于变化的状态，这些基本参数称作**设计变量**，又叫做**优化参数**。如无盖水箱问题中剪去的正方形的边长 x ，人字形支架问题中的高度 h 和钢管平均直径 D 。

设计变量的全体实际上是一组变量，可用一个列向量表示

$$\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$$

称作**设计变量向量**。向量中分量的次序完全是任意的，可以根据使用的方便任意选取。如人字形支架问题中的 D 和 h 无先后次序。

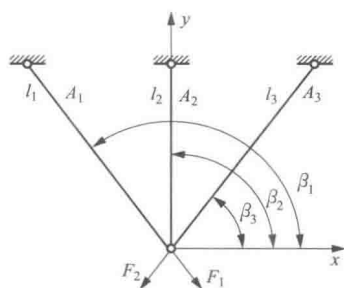


图 1-4 三杆桁架

再例如三杆桁架，如图 1-4 所示。若 β_1 、 β_2 、 β_3 、 l_1 、 l_2 、 l_3 为预定参数（设计常量），则设计变量就是各杆的横截面面积 A_1 、 A_2 、 A_3 ，记为

$$\mathbf{X} = [A_1 \ A_2 \ A_3]^T$$

或

$$\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$$

设计变量的个数，就是所求解的优化设计问题的**维数**。

一旦规定了这样一种向量的组成，则其中任意一个特定的向量都可以说是一个“设计”。由 n 个设计变量为坐标所组成的实空间称作**设计空间**。一个“设计”，可用设计空间中的一点表示，此点可看成是设计变量向量的端点（始点取在坐标原点），称作**设计点**。

1.2.2 目标函数

在所有的可行设计中，有些设计比另一些要“好”些，所谓“好”是指这个“较好”的设计比“较差”的设计必定具备某些更好的性质。倘若这性质可以表示成设计变量的一个可计算函数，则我们就可以考虑优化这个函数，以得到“更好”的设计。一般地，优化设计时判别设计方案优劣标准的数学表达式称为**目标函数**。用它评价设计方案的好坏，

所以它又被称作**评价函数**，记作 $F(\mathbf{X})$ ，用来强调它对设计变量的依赖性。目标函数可以是结构重量、体积、功耗、产量、成本或其他性能指标（如变形，应力等）和经济指标等。

建立目标函数是整个优化设计过程中比较重要的一个环节。但在某些设计问题中，可能存在两个或两个以上需要优化的指标，这类问题称为**多目标函数优化问题**。例如，设计一台机器，期望得到最低的造价和最少的维修费用。

目标函数是 n 维变量的函数，它的函数图像只能在 $n+1$ 维空间中描述出来。为了在 n 维设计空间中反映目标函数的变化情况，常用**目标函数等值面**的方法。目标函数的等值面，其数学表达式为

$$F(\mathbf{X}) = c_i$$

其中 c_i 为一组常数，代表一族 n 维超曲面。如在二维设计空间中 $F(x_1, x_2) = c$ ，代表 x_1-x_2 设计平面上的一族曲线。

1.2.3 约束条件

设计空间是所有设计方案的集合，但这些设计方案有些是工程上所不能接受的（例如面积取负值等）。如果一个设计满足所有对它提出的要求，就称为可行（或可接受）设计，反之则称为不可行（或不可接受）设计。

一个可行设计必须满足某些设计限制条件，这些限制条件称作**约束条件**，简称**约束**。在工程问题中，根据约束的性质可以把它们区分成**性能约束**和**侧面约束**两大类。针对性能要求而提出的限制条件称作性能约束。例如，结构必须满足强度、刚度或稳定性等要求，桁架的变形（如某点处的位移）不超过给定值。不是针对性能要求，只是对设计变量的取值范围加以限制的约束称为侧面约束。例如，允许选择的尺寸范围，桁架的高度在其上下限范围之间的要求就属于侧面约束。侧面约束也称作**边界约束**或**几何约束**。

约束又可按其数学表达式分**等式约束**和**不等式约束**两种类型。等式约束

$$h(\mathbf{X}) = 0$$

要求设计点在 n 维设计空间的约束曲面上。不等式约束

$$g(\mathbf{X}) \leq 0$$

要求设计点在设计空间中约束曲面 $g(\mathbf{X})=0$ 的一侧（包括曲面本身）。所以，约束是对设计点在设计空间中活动范围所加的限制。凡满足所有约束条件的设计点，它在设计空间中的活动范围称作**可行域**。如满足不等式约束

$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

的设计点活动范围，它是由 m 个约束曲面

$$g_j(\mathbf{X}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

所形成的 n 维子空间（包括边界）。满足两个或更多个 $g_j(\mathbf{X}) \leq 0$ 点的集合称作**交集**。等式约束 $h(\mathbf{X})=0$ 可看成是同时满足 $h(\mathbf{X}) \leq 0$ 和 $h(\mathbf{X}) \geq 0$ 两个不等式约束，代表 $h(\mathbf{X})=0$ 曲面。

约束函数有的可以表示成显式形式，即反映设计变量之间明显的函数关系，如前面讲的人字形支架问题中的强度约束和稳定约束，这类约束称作**显式约束**。有的只能表示成隐式形式，例如结构的性能约束函数（变形、应力、频率等），需要通过有限元法或动力学计算求得，这类约束称作**隐式约束**。

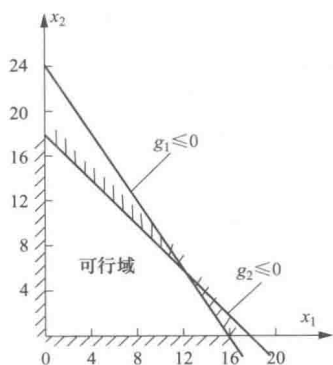


图 1-5 可行域

【例 1-1】 画出满足下列约束的可行域：

$$g_1(\mathbf{X}) = 3x_1 - 2x_2 - 48 \leq 0$$

$$g_2(\mathbf{X}) = x_1 + x_2 - 18 \leq 0$$

$$g_3(\mathbf{X}) = -x_1 \leq 0$$

$$g_4(\mathbf{X}) = -x_2 \leq 0$$

【解】 将 g_1, g_2, g_3, g_4 四式取为等式，可画出四条直线，所围出的区域即为可行域（有阴影线的一侧为不可行域），如图 1-5 所示。

1.2.4 优化问题的数学模型

优化问题的数学模型是实际优化设计问题的数学抽象。

在明确设计变量、目标函数、约束条件之后，优化设计问题就可以表示成一般数学形式如下：

求设计变量向量

$$\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T \quad (1-1)$$

使目标函数

$$F(\mathbf{X}) \rightarrow \min \quad \text{或} \quad \max \quad (1-2)$$

满足约束条件（或写为 s. t.）

$$g_u(\mathbf{X}) \leq 0 \quad (u = 1, 2, \dots, m) \quad (1-3)$$

$$h_v(\mathbf{X}) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, p) \quad (1-4)$$

在实际优化问题中，对目标函数一般有两种要求形式：目标函数极小化 $F(\mathbf{X}) \rightarrow \min$ 或目标函数极大化 $F(\mathbf{X}) \rightarrow \max$ 。由于求 $F(\mathbf{X})$ 的极大化与求 $-F(\mathbf{X})$ 的极小化等价，所以本书后面各章优化问题的数学表达一律采用目标函数极小化形式。

1.2.5 最优化问题的分类

(1) **无约束与有约束最优化问题。** 有约束条件的优化设计问题称为**约束最优化问题**；如果对设计变量不加任何限制，目标函数的极值就是问题的最优解，这样的优化设计问题称为**无约束最优化问题**。工程中的优化设计问题大多数为约束最优化问题。在前面讲过的例题中，无盖水箱的优化设计可以看作是无约束最优化问题；而人字形支架的设计则属于约束最优化问题。如果是等式约束，则约束数目 m 必须小于设计变量的个数 n 。当 $m = n$ 时，问题的解是唯一的，因而也就谈不上优化设计了；如果 $m > n$ ，则优化问题无解。

(2) **确定性和不确定性最优化问题。** 在确定性最优化设计中，每个设计变量的值是确定的。而在随机（或概率）最优化问题中，某些变量的取值是不确定的。实验统计结果显示，这些不确定变量的取值服从一定的概率分布。这种考虑了模糊性不确定因素的最优化问题称为**模糊优化设计**。

(3) **线形与非线性最优化问题。** 如果目标函数和所有约束函数都是线性函数，则这种最优化问题称为**线性规划**；如果目标函数或约束函数中的任意一个是设计变量的非线性函数，则称为**非线性规划**。