普通高等教育“十二五”规划教材

普通高等学校数学教学丛书

线性代数

主　编　高志强　庞彦军

副主编　路瑞华　吴慧莲

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

普通高等学校数学教学丛书

线 性 代 数

主　编　高志强　庞彦军
副主编　路瑞华　吴慧莲

科 学 出 版 社
北 京

内容简介

本书采用学生易于接受的方式科学、系统地介绍线性代数的基本内容，强调适用性和通用性，兼顾先进性．本书起点低、坡度适中、简洁明了、适于自习．全书涵盖考研的数学考试大纲有关线性代数的所有内容．每章配有 A 型和 B 型习题，书后附有习题参考答案、基于软件 MATLAB 的线性代数实验及 2006~2015 年硕士研究生入学考试部分线性代数试题．本书不在理论的细枝末节上过分追求，注重线性代数的思想、理论原理、使用条件、使用方法和结论分析方法的论述，有利于培养学生的综合素质和能力．

本书可作为高等院校理工、经管、医药、农林等专业的大学生教材，也可作为自学考试、硕士研究生入学考试的参考用书．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/高志强，庞彦军主编．—北京：科学出版社，2016. 1
普通高等教育“十二五”规划教材．普通高等学校数学教学丛书
ISBN 978-7-03-046734-8

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①高…　②庞…　Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材
Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 322611 号

责任编辑：王胡权／责任校对：彭　涛
责任印制：徐晓晨／封面设计：迷底书装

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2016 年 1 月第　一　版　开本：720 × 1000 1/16
2016 年 3 月第二次印刷　印张：18 1/4
字数：367 900

定价：34.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

线性代数是普通高校非数学类专业大学生的一门重要数学基础课程, 也是理工类硕士研究生入学考试必考的一门数学课程. 本书是根据教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会颁布的《工科类本科数学基础课教学基本要求 (修订稿)》和教育部的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求编写的, 可作为高校理、工、农、医、经、管等学科门类各专业及其他相关专业开设线性代数课程的教材或教学参考书. 本书有以下主要特色.

一、线性方程组是线性代数的核心, 围绕着 "线性方程组的解" 这条主线, 科学地安排讲授体系

线性代数课程的教学内容主要有: 行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组求解、相似矩阵、二次型、线性空间及线性映射 (变换) 等, 内容看上去比较分散. 不像高等数学课程那样主线明确: 研究函数的导数、微分和积分, 其实线性代数课程的主线也是明确的: 研究线性方程组的解. 这也是古典代数学研究的主要问题——解方程和线性方程组.

本书的章节脉络是: 围绕着 "线性方程组的解" 这条主线, 展开线性代数的一系列内容. 第一章先讲 n 元线性方程组的解法, 由中学有关线性方程组知识中的消元法, 总结出高斯消元法和用阶梯形方程组判别线性方程组的解的方法. 并从中引出了矩阵的概念和矩阵的初等变换及阶梯形矩阵的概念. 为了探讨线性方程组的解与方程组的系数和常数项的关系, 从剖析二元、三元线性方程组入手, 引入了 2 阶、3 阶行列式的概念, 进而推广有了 n 阶行列式的概念. 通过研究 n 阶行列式的性质, 得出了含有 n 个方程的 n 元线性方程组解的判定定理——克拉默法则. 因此, 本书第二章介绍行列式及其相关知识. 在高斯消元法中, 为了简便起见, 引入了增广矩阵, 把方程组的初等变换与增广矩阵的初等变换对应起来, 阶梯形方程组与阶梯形矩阵相对应. 为了进一步探讨线性方程组的解与增广矩阵的关系, 第三章介绍矩阵的简单知识, 包括矩阵的基本运算、初等变换及矩阵的秩的概念, 并用矩阵的秩来判定线性方程组解的情况以及利用逆矩阵解线性方程组的方法. 并从逆矩阵的解法中得出了克拉默法则的又一种简洁证明方法.

对于线性方程组, 仅仅会判定解的存在性还远远不够, 还要能求出其全部解, 进而了解解集的结构. 由齐次线性方程组的解 (解向量) 对于向量的加法、数乘运算所得结果仍是其解, 抽象出线性 (向量) 空间的概念. 本书的第四章首先探讨向量的线性运算 (线性表示) 和向量组的线性相关性以及极大线性无关组. 从这些概念和结论中抽象出线性 (向量) 空间的概念. 从线性 (向量) 空间出发得出齐次线性方

程组的解空间 ($\mathbb{R}^n$ 的一个子空间) 的结构, 进而解决了一般线性方程组的解集的结构.

矩阵是数学的一个重要概念之一, 是代数学的一个主要研究对象, 也是数学研究和应用的一个主要工具. 矩阵的特征值与特征向量理论是矩阵理论的重要组成部分, 是线性方程组的解的一个应用, 其在数学、力学、信息等方面都有着十分广泛的应用. 本书在第五章介绍矩阵的特征值与特征向量、相似矩阵、矩阵相似对角化等有关知识.

二次型理论是线性代数理论进一步的深入发展, 是线性代数内容不可或缺的内容之一, 是相似矩阵理论的一个应用. 也可以可看成是用线性代数理论解非线性问题的一种应用. 本书第六章讨论了二次型的有关内容: 化二次型为标准形及二次型的正定性等问题.

为了更进一步了解一般线性空间的结构——这也是近现代代数学的主要研究内容 (代数系统的结构及其映射), 第七章简单介绍线性空间及线性 (映射) 变换.

二、力求做到深入浅出, 注重基本概念的实际背景的引入, 内容简洁完整. 体现在以下五个方面

(一) 低起点: 读者只需要简单的中学知识即可. 内容与中学解线性方程组衔接, 随章节内容逐步深入.

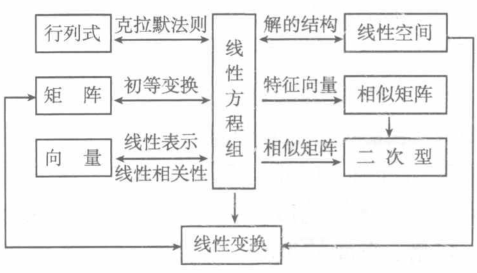
(二) 由简单到复杂: 由最简单的问题引入、抽象出概念及结论, 再应用到一般问题中.

(三) 由实际到抽象: 先由实际背景提出问题、讨论问题到解决问题的方式展开教材内容, 致力于使工科学生更容易理解其内容.

(四) 注重应用能力的培养: 介绍数学软件 MATLAB 处理线性代数的计算问题, 把使用现代计算机软件解决问题的能力贯穿于编写教材的全过程.

(五) 有较多的典型例题和习题: 针对不同学生对本课程的不同要求, 配备不同层次的例题及习题. 每章后的 A 组题是体现基本要求的习题; B 组题是针对基本内容提升、扩展及综合运用性质的习题; 上机实验习题用以拓展学生计算机计算能力. 我们将 2006~2015 年的研究生入学考试《高等数学》(数学一) 涉及线性代数部分的真题及答案编入到书后附录II.

三、内容体系的内在联系可以用下述框图表示



此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

本书不仅能帮助学生全面、系统的理解主要内容, 并能使学生巩固、加深、提高所学知识. 既便于学生复习自学, 也利于考生备考全国硕士研究生入学考试.

参加本书编写的人员都具有多年从事公共数学基础课程教学研究和教学实践的经历, 其中庞彦军教授、高志强副教授多年从事研究生入学统一考试数学考前辅导, 有丰富的考研辅导经验, 对课程内容和基本要求有较深的理解. 本书不仅适合普通高等院校理工类、经管类本科专业的学生使用, 还可以作为教师的教学参考书和考研辅导用书. 书中带 * 号的章节作为学生自学或教师选讲内容.

本书由主编设计编写大纲, 编者共同完成. 各章编写分工如下: 第一、七章由高志强编写, 第二、五、六章由高志强、吴慧莲编写, 第三、四章由高志强、路瑞华编写, 附录 I 及书中的图表由康淑卫编写. 附录 II 由吴慧莲编写, 最后由高志强、庞彦军对整书进行了修定和统稿. 张志海教授、王小胜教授对本书的编写提出了很多宝贵的意见和建议, 在此表示感谢!

本书的编写得到了科学出版社的大力支持, 在此一并致谢!

限于编者水平, 书中难免有不足和疏漏, 敬请广大读者批评指正.

编　者

2015 年 10 月

目　　录

第一章　线性方程组 ······ 1
第一节　线性方程组的一般概念 ······ 1
第二节　高斯消元法 ······ 2
第三节　线性方程组解的情况及其判定 ······ 12
第四节　数域 ······ 19
习题一 A ······ 20
习题一 B ······ 23
上机实验习题 ······ 24
第二章　行列式 ······ 25
第一节　2 阶与 3 阶行列式 ······ 25
第二节　n 阶行列式的定义 ······ 29
第三节　行列式的性质 ······ 36
第四节　行列式按一行 (列) 展开 ······ 43
第五节　克拉默法则 ······ 54
*第六节　行列式按 k 行展开 ······ 58
习题二 A ······ 60
习题二 B ······ 65
上机实验习题 ······ 66
第三章　矩阵 ······ 67
第一节　矩阵举例 ······ 67
第二节　矩阵的运算 ······ 72
第三节　逆矩阵 ······ 86
第四节　分块矩阵 ······ 93
第五节　矩阵的初等变换与初等矩阵 ······ 101
第六节　矩阵的秩 ······ 110
习题三 A ······ 120
习题三 B ······ 124
上机实验习题 ······ 124
第四章　向量组的线性相关性 ······ 126
第一节　向量组及其线性组合 ······ 126
第二节　向量组的线性相关性 ······ 132

第三节 向量组的秩及其极大无关组 …… 138
第四节 向量空间 …… 142
第五节 线性方程组解的结构 …… 148
第六节 欧氏空间 …… 156
习题四 A …… 163
习题四 B …… 167
上机实验习题 …… 169
第五章 相似矩阵 …… 170
第一节 特征值与特征向量 …… 170
第二节 相似矩阵与矩阵可对角化的条件 …… 177
第三节 实对称矩阵的对角化 …… 184
习题五 A …… 188
习题五 B …… 190
上机实验习题 …… 192
第六章 二次型 …… 193
第一节 二次型及其矩阵表示 …… 193
第二节 二次型的标准形 …… 196
第三节 化二次型为标准形的配方法和初等变换法 …… 198
第四节 正定二次型 …… 202
习题六 A …… 205
习题六 B …… 207
上机实验习题 …… 209
***第七章 线性空间与线性变换简介** …… 210
第一节 线性空间的基本概念 …… 210
第二节 线性空间的基与坐标 …… 214
第三节 线性变换 …… 219
习题七 A …… 226
习题七 B …… 228
参考文献 …… 230
***附录 I 基于软件 MATLAB 的线性代数实验** …… 231
第一节 MATLAB 的安装与界面 …… 231
第二节 MATLAB 基本用法 …… 235
第三节 MATLAB 的矩阵运算 …… 239
附录 II 2006～2015 年硕士研究生入学考试《高等数学》试题线性代数部分 (数一) …… 253
附录 III 部分习题参考答案 …… 265

第一章　线性方程组

客观世界的数量关系中最简单的是线性关系，它描述的是一个变量依赖于另一个变量均匀变化的关系. 而非线性关系也往往用线性关系来近似，如函数的微分就是用自变量增量的线性关系来近似函数值的增量. 处理这些线性关系往往归结为线性代数问题. 线性方程组求解是线性代数中一个最古老的内容，而现代的很多科学技术问题，最终往往也归结为解线性方程组. 关于线性方程组，已经有完整的理论和计算方法.

在线性代数中，线性方程 (组) 是一个重要的工具，也是线性代数的基本内容. 本章主要介绍线性方程组的概念、高斯消元法以及用消元法来判断线性方程组解的情况和计算一般解的方法.

第一节　线性方程组的一般概念

引例: 三国时期的数学家张丘建在其著作《张丘建算经》中有这样一道题 “中国百鸡问题”: 今有鸡翁一，值钱伍; 鸡母一，值钱三; 鸡雏三，值钱一. 凡百钱买鸡百只，问鸡翁、母、雏各几何?

设有公鸡 x 只，母鸡 y 只，小鸡 z 只，则由题意，得下列线性方程组

$$\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=100, \\ 5x+3y+\dfrac{1}{3}z=100. \end{cases}$$

这是由两个三元一次方程组成的方程组.

一般地，由 m 个 n 元一次方程组成的方程组称为**n元线性方程组**，其一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ a_{12}x_2+\cdots+\ a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+\ a_{22}x_2+\cdots+\ a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{mn}$ 是系数，$b_1,b_2,\cdots,b_m$ 是常数项，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是未知量.

对于 n 元线性方程组 (1.1.1)，若未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别取数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$

后, 使 (1.1.1) 中的每个方程都成为恒等式, 则称 n 维有序数组

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{1.1.2}$$

是 n 元线性方程组 (1.1.1) 的一个**解**, 解 (1.1.2) 也可写为 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}}$. 方程组 (1.1.1) 的所有解组成的集合称为这个方程组的**解集**. 若两个线性方程组有相同的解集, 就称两个方程组是**同解**的.

对于线性方程组, 主要研究下列三个问题:

(1) 线性方程组是否有解?

(2) 若线性方程组有解, 其解有多少个? 如何求其解?

(3) 若线性方程组有解, 其解的一般形式如何? 或其解集的结构如何? 对于实际问题, 还需要检验其每一个解是否符合实际问题的需要?

本章给出线性方程组的统一的、标准化的解法, 进而讨论线性方程组的解的判定法及解的一般形式.

第二节　高斯消元法

中学数学里已经讲过解二元、三元线性方程组的基本方法——**消元法**, 现在用消元法来解 n 元线性方程组. 消元法的基本思路是消元, 即利用方程之间的运算把方程组中的一部分方程变成未知量较少的方程. 为了使消元有规律可循, 也为了计算机编程方便, 我们通过下面的例题来说明如何消元 (实质上就是恒等变形).

例 1.2.1　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11, \\ 6x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

解　为了方便起见, 把方程组 (1.2.1) 中的方程编上号码①、②、③、④,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, & ① \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11, & ② \\ 6x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 2, & ③ \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5. & ④ \end{cases}$$

为了避免下一步出现分数运算, 将上面方程组中的方程①和②互换 (记为① $\leftrightarrow$ ②), 并注意到方程③中未知量的系数与常数项有公因子 2, 把方程③乘以 $\dfrac{1}{2}$(记为 $\dfrac{1}{2}$ ③), 得

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}③]{①\leftrightarrow②}\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=11, & ① \\ 2x_1-x_2+x_3=6, & ② \\ 3x_1+5x_2+x_3=1, & ③ \\ -x_1+3x_2+3x_3=5. & ④ \end{cases}$$

把方程①的 $-2, -3, 1$ 倍分别加到方程②、③、④上 (记为②$-2$①、③$-3$①、④ $+$ ①), 可以把方程②、③、④中的 x_1 的系数化为 0, 即把未知量 x_1 消去了,

$$\xrightarrow[④+①]{\substack{②-2①\\③-3①}}\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=11, & ① \\ -5x_2-7x_3=-16, & ② \\ -x_2-11x_3=-32, & ③ \\ 5x_2+7x_3=16 & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{④+②}\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=11, & ① \\ -5x_2-7x_3=-16, & ② \\ -x_2-11x_3=-32, & ③ \\ 0=0 & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{②\leftrightarrow③}\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=11, & ① \\ -x_2-11x_3=-32, & ② \\ -5x_2-7x_3=-16, & ③ \\ 0=0 & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{③-5②}\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=11, & ① \\ -x_2-11x_3=-32, & ② \\ 48x_3=144, & ③ \\ 0=0. & ④ \end{cases} \tag{1.2.2}$$

方程组 (1.2.2) 称为**阶梯形方程组**.

在方程组 (1.2.2) 中, 由方程③解得 $x_3=3$, 代入方程②, 得 $x_2=-1$, 再把 $x_3=3, x_2=-1$ 代入方程①, 得 $x_1=1$, 于是方程组 (1.2.2) 有唯一解为 $(1,-1,3)^{\mathrm{T}}$. 所以原方程组 (1.2.1) 有唯一解 $(1,-1,3)^{\mathrm{T}}$. 这就是中学学的消元法, 下面的定理 1.2.1 将证明方程组 (1.2.1) 与方程组 (1.2.2) 同解.

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

从例 1.2.1 的解题过程中看出, 所谓的消元法就是把方程组中的一部分方程依次变为未知量较少的方程, 最终化为阶梯形方程组. 在这个变换过程中, 反复应用了以下三种变换来简化方程组:

(1) 互换两个方程的位置;

(2) 用一个非零数乘某一个方程;

(3) 把某一个方程的 k 倍加到另外一个方程上.

这三种变换称为线性方程组的**初等变换**.

用消元法解线性方程组就是对方程组进行一系列的初等变换, 把原方程组简化为阶梯形方程组, 通过解阶梯形方程组的解 (从最后一个非 "0=0" 的方程向上逐次回代), 从而求得原方程组的解.

下面来证明经过初等变换所得的方程组与原方程组是同解的.

定理 1.2.1 *初等变换把线性方程组 (Ⅰ) 转化为线性方程组 (Ⅱ), 则方程组 (Ⅰ) 与方程组 (Ⅱ) 同解.*

证明 仅就初等变换 (3) 来证明, 设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n=b_j, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{Ⅰ}$$

经过初等变换 ⓘ + kⓙ 得到方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{i1}+ka_{j1})x_1+(a_{i2}+ka_{j2})x_2+\cdots+(a_{in}+ka_{jn})x_n=b_i+kb_j, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n=b_j, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{Ⅱ}$$

设 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 (Ⅰ) 的一个解, 则有下列恒等式组

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = b_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{j1}c_1 + a_{j2}c_2 + \cdots + a_{jn}c_n = b_j, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m, \end{cases} \tag{1.2.3}$$

将 (1.2.3) 式中的第 j 个恒等式的 k 倍加到第 i 个恒等式上, 得到下列恒等式组

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{i1} + ka_{j1})c_1 + (a_{i2} + ka_{j2})c_2 + \cdots + (a_{in} + ka_{jn})c_n = b_i + kb_j, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{j1}c_1 + a_{j2}c_2 + \cdots + a_{jn}c_n = b_j, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = b_m, \end{cases} \tag{1.2.4}$$

(1.2.4) 式表明 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 (Ⅱ) 的一个解. 这就证明了方程组 (Ⅰ) 的每个解都是方程组 (Ⅱ) 的解.

方程组 (Ⅱ) 经过初等变换 ⓘ $-k$ⓙ 得到方程组 (Ⅰ), 由上面的证明同样可知方程组 (Ⅱ) 的每个解都是方程组 (Ⅰ) 的解. 所以方程组 (Ⅰ) 与方程组 (Ⅱ) 同解.

同理可证经过初等变换 (1) 和 (2) 也不改变方程组的解. □

这就是可以用经过多次初等变换所得的阶梯形方程组代替原方程组来求解线性方程组的理论根据.

从例 1.2.1 的解题过程中看到, 对方程组作初等变换时, 只是对未知量的系数和常数项作运算. 因此为简便起见, 把方程组 (1.2.1) 中的每个方程的未知量系数及常数项按次序分别写成一行, 得到如下一张表:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 11 \\ 6 & 10 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}. \tag{1.2.5}$$

上表中的每一行对应一个方程. (1.2.5) 式的表称为例 1.2.1 的线性方程组的**增广矩阵**. 在例 1.2.1 的解题过程中, 对方程组进行的一系列初等变换的过程可以用对增

广矩阵的行的相应变换表示出来.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 11 \\ 6 & 10 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}③]{①\leftrightarrow②} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[④+①]{\substack{②-2①\\③-3①}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & -5 & -7 & -16 \\ 0 & -1 & -11 & -32 \\ 0 & 5 & 7 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{④+②} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & -5 & -7 & -16 \\ 0 & -1 & -11 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{②\leftrightarrow③} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -11 & -32 \\ 0 & -5 & -7 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③-5②} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -11 & -32 \\ 0 & 0 & 48 & 144 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2.6}$$

矩阵 (1.2.6) 对应的线性方程组是

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11, \\ -x_2 - 11x_3 = -32, \\ 48x_3 = 144, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

这和消元法化方程组为阶梯形方程组是一样的. 这样书写方程组简便, 计算过程不容易出错. 为了说明每个方程组都可以通过其增广矩阵的行的变换化为阶梯形方程组. 先给 "矩阵" 下一个定义.

定义 1.2.1　由 $m \times n$ 个数排成一个 m 行 n 列的表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列**矩阵**, 简称 $m \times n$ 矩阵, 通常用大写字母 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \cdots$ 表示, 有时也记为

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}, \quad \boldsymbol{A} = (a_{ij}) \quad 或 \quad \boldsymbol{A}_{m \times n}.$$

这 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 称为矩阵的**元素**, i 是元素 a_{ij} 的**行标**, j 是元素 a_{ij} 的**列标**. a_{ij} 表示矩阵的第 i 行第 j 列的元素, 称为 (i, j)**元**.

元素为实数的矩阵称为**实矩阵**, 元素为复数的矩阵称为**复矩阵**. 本书中的矩阵除特别说明外, 指的都是实矩阵. 实际生活中的许多问题都可以用矩阵来刻画, 如学生成绩表、会计报表、统计表等.

在 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中, 若 $m = n$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为**方阵**.

当两个矩阵的行数相等、列数也相等时, 称它们为**同型矩阵**. 若矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 与矩阵 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 是同型矩阵, 即同为 $m \times n$ 矩阵, 且它们的对应元素相等, 即

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n),$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**, 记为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}.$$

元素都为 0 的矩阵称为**零矩阵**, 记为 O. 注意不同型的零矩阵是不同的.

注　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等, 其实质就是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同一个矩阵.

给定一个线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.2.7}$$

把未知量的系数保持其相对位置不变写成一个 $m \times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为方程组 (1.2.7) 的**系数矩阵**. 称 $m \times (n+1)$ 矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

为方程组 (1.2.7) 的**增广矩阵**. 显然线性方程组由其系数和常数项确定, 即由其增广矩阵完全确定, 至于未知量用什么字母表示, 不是实质性的问题.

在例 1.2.1 中, 利用其增广矩阵求方程组的解时, 对增广矩阵反复施行了三种变换: 互换两行, 非零数 k 乘某一行, 某一行的 k 倍加到另外一行上. 有下面的定义.

定义 1.2.2 下列三种变换称为矩阵的初等行变换:

(1) **互换** 互换两行的位置; 例如, 互换第 i 行和第 j 行, 记为 $r_i \leftrightarrow r_j$;

(2) **倍乘** 用一个非零数 k 乘某一行; 例如, 数 k 乘第 i 行, 记为 kr_i;

(3) **倍加** 把某一行的 k 倍加到另外一行上. 例如, 第 j 行的 k 倍加到第 i 行上, 记为 $r_i + kr_j$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **行等价**.

例 1.2.1 的方程组化为的阶梯形方程组 (1.2.2) 对应的矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & -11 & -32 \\ 0 & 0 & 48 & 144 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

称为行阶梯形矩阵.

定义 1.2.3 一个矩阵 $\boldsymbol{G}$, 若满足

(1) $\boldsymbol{G}$ 的零行 (元素全为 0 的行) 在下方;

(2) $\boldsymbol{G}$ 的每个非零行 (如果有非零行) 的第一个不为 0 的元素称为这一行的首**非零元**, 设 $\boldsymbol{G}$ 有 r 个非零行, 且首非零元 $a_{ij_i}(i = 1, 2, \cdots, r)$ 的列标 $j_1, j_2, \cdots, j_r$ 满足

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r.$$

则称 G 为行阶梯形矩阵. 例如

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&3&1\\0&0&1&2&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&-2&3&1\\0&0&3&0&-2\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

都是行阶梯形矩阵.

性质 1.2.1　行阶梯形矩阵的非零行的个数小于等于矩阵的列数.

此性质的证明留给读者.

运用矩阵的初等行变换把线性方程组 (1.2.1) 的增广矩阵化为行阶梯形矩阵 (1.2.6) 后, 可以用矩阵 (1.2.6) 表示的阶梯形方程组求解. 也可以对行阶梯形矩阵 (1.2.6) 继续作初等行变换, 化为一种更简单的行阶梯形矩阵, 进而能从这个矩阵中直接得到方程组的解, 而不用回代. 具体做法如下:

$$\begin{pmatrix}1&2&4&11\\0&-1&-11&-32\\0&0&48&144\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{48}r_3]{-1r_2}\begin{pmatrix}1&2&4&11\\0&1&11&32\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-11r_3]{r_1-4r_3}\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}. \tag{1.2.8}$$

最后这个矩阵 (1.2.8) 对应的线性方程组为

$$\begin{cases}x_1=1,\\x_2=-1,\\x_3=3,\\0=0.\end{cases}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com