希尔伯特第十问题

胡久稔 编著

- 希尔伯特第十问题的提出
- 中国剩余定理与拉格朗日定理
- 斐波那契数列
- 丢番图集与丢番图函数
- 受囿量词定理
- 质数表示与著名数学问题

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

希尔伯特第十问题

胡久稔 编著

◎希尔伯特第十问题的提出
◎中国剩余定理与拉格朗日定一
◎斐波那契数列
◎丢番图集与丢番图函数
◎受囿量词定理
◎质数表示与著名数学问题

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

所谓希尔伯特第十问题，是1900年德国数学家希尔伯特在巴黎的国际数学家大会上提出的关于“丢番图方程解的判定问题”，也就是判定不定方程是否有解的方法问题. 这一问题虽已在1970年得到否定的解决，但是在数学中产生了十分深远的影响. 本书介绍了第十问题的内容和研究情况，阐述了它对于整个当代数学研究的促进作用，理论严整，论述生动.

本书适合数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

希尔伯特第十问题/胡久稔编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016.1

ISBN 978-7-5603-5649-5

Ⅰ.①希… Ⅱ.①胡… Ⅲ.①丢番图方程-方程解-判定 Ⅳ.①O156.7

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第241625号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张10.5 字数124千字
版 次 2016年1月第1版 2016年1月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5649-5
定 价 38.00元

◎序言

1900年，德国大数学家希尔伯特在巴黎的国际数学家大会上提出了23个数学问题，揭开了20世纪数学发展的一页，激励着有为的数学家们去思索，去探索，去拼搏！而第十问题就是其中精彩的一个.

人们知道，数学问题作为数学研究的对象，也是推动数学发展的动力，人们为了解决数学难题，要引入新概念，寻找新的工具，这方面的例子是不少的.

关于解一个特定的丢番图方程本是一个古老的数学问题，某些两个变元的二次方程，人们早就发现了它们的解法，而对两变元的三四次丢番图方程并未发现一般的解的方法，对特定的一个这样的丢番图方程，证明它是否有解，或当有解时求出它们的解，也不是一件容易的事.

然而，在20世纪60年代末，英国数学家贝克成功地对一类两变元丢番图方程给出了一个有效的方法，可求出它们的一切解，他成功地确定了一个仅依赖于次数n及多项式系数的上界B，使对任意解(x_0, y_0)有

$$\max\{|x_0|, |y_0|\} \leqslant B$$

由于贝克的这一出色工作，他获得了1970年的菲尔兹奖.

希氏第十问题的解决是集体的智慧，使人惊奇的是只用了一点数理逻辑和初等数论就解决了这一世界大难题. 美国数学家戴维斯，鲁宾逊和普特南作出了突出的贡献，而最终的一步是在1970年由苏联青年数学家马吉雅塞维奇完成的.

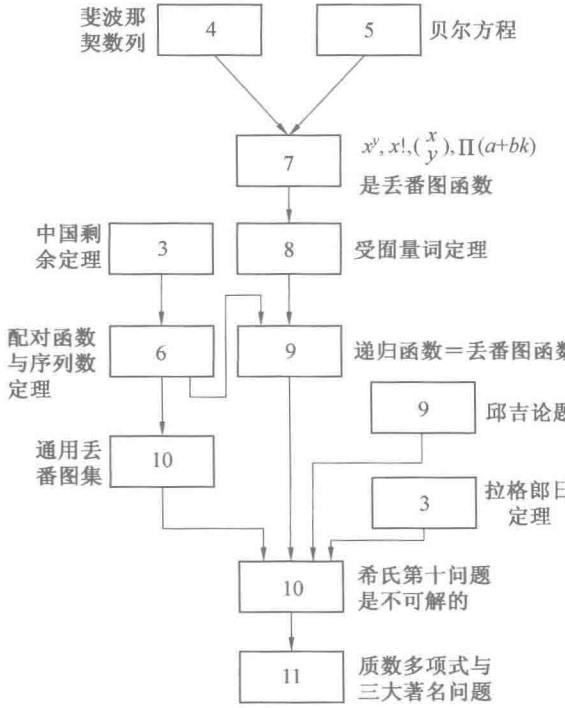
本书作为读者欣赏的一个数学问题，书中用到的知识力图自封，它不需要读者有什么特殊的数学修养. 为了便于读者阅读，我们还给了一个全书内容的联系图，以供参考.

在本书的写作过程中，曾和北京大学吴允曾教授多次交谈，并得到中国科学院软件所研究员杨东屏老师及南开大学徐书润副教授的帮助，趁此深深表示感谢.

由于水平所限，书中缺点和失误望读者指正.

胡久稔

1987年2月



本书内容逻辑联系图(图中数字为章号)

目　录

希尔伯特第十问题的提出

第1章

我们都知道，从古希腊时代，人们就对不定方程的整数解感兴趣，人们先从一个几何学上的定理：一个直角三角形，站在两直角边上的正方形的面积之和恰等于站在斜边上的正方形的面积. 这就是毕达哥拉斯定理，又称商高定理.

上述定理用代数的语言说是方便而直观的，即令 a，b 为直角三角形的两角边，c 为斜边，则

$$a^2+b^2=c^2$$

人们自然想到，变元 x，y，z 取正整数的不定方程

$$x^2+y^2=z^2 \qquad ①$$

它的解本身就包含有美的享受，而且是毕氏几何定理的“数”的体现. 人们对式① 的整数解的直观概念可追溯得更早，古巴比伦人在公元前两千多年就发现

了 3,4,5 是它的一组解,并且聪慧地用绳索分别对 3,4,5 等分再对折以制造出一个直角(图1.1),这对测量土地是十分必要的.

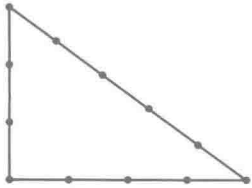


图 1.1

方程 ① 的一个解(3,4,5),我国商高也早已发现,并在两千年前的一部数学著作《周髀算经》中有记载,而后,在我国另一本名著《九章算术》中又列出了几组解

$$(5,12,13)$$
$$(7,24,25)$$
$$(8,15,17)$$
$$(20,21,29)$$

在古希腊,毕达哥拉斯学派发现,当 m 是奇数时,$\left(m,\frac{1}{2}(m^2-1),\frac{1}{2}(m^2+1)\right)$ 是方程 ① 的一组解,但在那个时代,都没能给出 ① 的完全的整数解.

到了 3 世纪,有一位著名的希腊数学家叫丢番图(约 246 ～ 330),在它写的一本《算术》书中,最先讨论了方程 ① 的整数解,他得出

$$x=2mn$$
$$y=m^2-n^2$$
$$z=m^2+n^2$$

其中，m，n 互质，$m > n$.

到了17世纪，丢番图的书被法国数学家费马所注意，他深入地研究了这类方程（以后我们称之为丢番图方程），并得到一个为后世所惊奇的定理：

方程

$$x^n + y^n = z^n$$

当 $n > 2$ 时，无非零的正整数解.

自然，这是一个特殊的丢番图方程，费马自称已证明了这一定理，但后人并未发现他的证明，不但如此，在近二百多年来，无数数学家经过艰辛地拼搏，也未能完全解决它，即既不能证明它，又不能举出一个反例而推翻它. 于是，人们已把它称之为费马猜想或费马大定理. 关于这一问题的最好结果是由德国数学家法尔廷斯给出的. 他指出，如果这一丢番图方程有解，则只有有限多个解，这自然已是一惊人的突破，他把人们在茫茫无限中的考虑变成有限中的论证.

到了20世纪初，一位著名的德国数学家希尔伯特，在1900年于巴黎召开的国际数学家大会上，他总结并提出了二十三个数学问题，提醒数学家们要搞清楚这些问题，他没有把费马猜想作为一个问题提出，而把比它更广的所谓丢番图方程的可解性作为第十个问题而列出，他说：

“10. 任意丢番图方程的判定.

设给了一个具有任意多个未知数的整系数丢番图方程，要求给出一个方法（verfahren），使得借助于它，通过有穷次运算可以判定该方程有无整数解.”

这里的方法（verfahren）就是英文的算法（algorithm），而算法的概念我们是并不陌生的，其实

这个词是很古老的，远在古希腊时代，人们就知道如何求两个数的最大公约数，这就是欧几里得算法，又称辗转相除法. 还有，如任给一个自然数判定它是否是一个质数，也存在着一个方法(算法)，这就是筛法，称为埃拉托斯散筛法. 这就是说，任给一个自然数，在有限步内总能通过这一筛子，以判定这个数是已被筛掉还是在筛子里.

虽然，人们很早就有了算法的朴素的概念，但在20世纪30年代以前，对算法概念是不精确的，人们只是把用以能行地解决一类相似问题的方法叫作算法，而所谓“能行”是指按照一定的规则，能在有穷步中机械地得到结果.

希尔伯特第十问题问世以来，人们尚未给算法以精确化，数学问题的可解与不可解究竟是什么含意，人们还不得而知，人们在一片黑暗中渡过这三十年的岁月，企图寻找这一问题有算法的数学家们都一个个碰壁，第十问题毫无进展，我们后来才明白，解决这一问题的时机尚不成熟，人们面对着困难，在思索，在前进，这就促进了数学的发展!

数理逻辑有关基础知识

第2章

为了读者阅读方便，我们对后面的一些章节中会用到的某些逻辑知识加以介绍，我们不去很严格地论述，只是为以后作准备.

2.1 命题及其联结词

（一）命题. 什么是命题呢？在日常生活中，我们常常说一些具有判断的句子，这样表示判断的句子就称为命题.

命题是有真假的，在我们以后的讨论中，命题只取真假两个值. 我们一般用T表示真值，用F表示假值，有时为了直观和应用的方便，用“1”表示真值，用“0”表示假值.

下面我们举一些例子，说明命题及其真假.

(1)$1+2\neq 3$.

(2) 月亮从西方升起.

(3)$x+y=5$.

(4) 小林光一是日本的棋圣.

(5)2020 年，一个战胜世界象棋冠军的计算机程序会出现.

(6) 希尔伯特是法国人.

我们看到，(1) 是个命题，它取假值 F.(2) 也是一个命题，也取值为 F.(3) 不是一个命题，因为变量 x,y 以不同的值代入，它有时取真值，有时取假值.(4) 是一个真命题，因为当今日本的围棋棋圣是小林光一，过些时候，如果棋圣易人，则该命题取假值.(5) 是一个命题，但现在尚不能知道它是真还是假的，可是，到 2020 年就会给出真或者假的假定.(6) 是一个命题，它取假值，因为希尔伯特是德国人.

上面都是一些简单形式的命题(除了(3))，还有一些很难判断真假的命题，因而成为大难题，如：

(7) 一个大偶数总可表示成两个质数之和(哥德巴赫猜想).

(8) 斐波那契数列中有无限多个质数.

它们都是命题，但人们还不知其真假.

(二) 命题联结词.

令 P,Q 是两个命题，则用 $\neg$(非，还用 $-$，$\sim$ 表示)，$\wedge$(与，还用 $\&$ 表示)，$\vee$(或)，$\rightarrow$(蕴涵)，$\leftrightarrow$(等值) 联结词可产生如下新的命题

$$\neg P, P\wedge Q(P\&Q), P\vee Q, P\rightarrow Q, P\leftrightarrow Q$$

它们的含意是这样的：

$\neg P$，当 P 为真时，$\neg P$ 为假；P 为假时，$\neg P$ 为真.

$P \wedge Q$，只当 P 与 Q 都是真时才为真，否则为假，符号 $\wedge$ 的其他通用符号是“&”，“·”.

$P \vee Q$，P 或者 Q 有一个真则 $P \vee Q$ 为真，否则为假，符号 $\vee$ 常用“+”来替代.

$P \rightarrow Q$，它称为蕴涵式，$P \rightarrow Q$ 为真，只当 P 为假或者 Q 为真. 这里 P 称为蕴涵式的前件，Q 称为其后件. 常用的蕴涵符号还有“⊃”.

$P \leftrightarrow Q$，它取值为真，当 P，Q 取相同的真值或假值，事实上，$P \leftrightarrow Q$ 和 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ 取相同的值，这一点下面还会说明.

自然，命题联结词还有一些，上面这些是最常用的，例如舍弗提出的舍弗“|”，是一个重要而有用的联结词，在计算机的 MOS 电路中，大量地应用这一元件，舍弗“|”的定义是

$$P \mid Q = \neg (P \wedge Q)$$

2.2　命题形式的变换

像初等代数中的某些代数式间的恒等变换，在命题逻辑中也是同样发生的，命题演算的本质就是要像代数的式子，方便地进行恒等变换. 例如，在代数中，有

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

等，这里代数恒等式的含意是，对 x，y 的任意代入（自然要预先给定一个数域），等号左边的值和右边的值相

等.

由于命题变量只取真、假值，所以，我们对基本的命题联结词及其更复杂的表达式可以用赋值的方法，“计算”出它们的值(T 或者 F)，这称为真值表. 用这种方法，列出下列命题联结词的真值表是十分清楚的：

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

我们给出舍弗“|”及另一个模“2”和的真值表，后者是计算机运算功能最基本的“细胞”，模“2”和是如

下定义的

$$P \oplus Q = \neg (P \leftrightarrow Q)$$

不难用真值表验证

$$P \oplus Q = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)^{①}$$

P	Q	$P \mid Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

P	Q	$P \oplus Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

我们可以利用真值表证明逻辑表达式间是否相等，即证明命题表达式间是否等价.

例 1　试证明：

(1) $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$;

(2) $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$.

(1),(2) 对应下面两个真值表：

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

① 我们一般可定义运算符号的优先次序为：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，这样可省略括号为 $\neg P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q$.