



装备科技译著出版基金

动态系统最优估计

(第2版)

Optimal Estimation of Dynamic Systems

(Second Edition)

【英】John L.Crassidis John L.Junkins 著

左斌 吴亮 李静 译



CRC Press
Taylor & Francis Group



国防工业出版社
National Defense Industry Press



装备科技译著出版基金

动态系统最优估计(第2版)

Optimal Estimation of Dynamic Systems(Second Edition)

[英] John L. Crassidis · John L. Junkins 著

左斌 吴亮 李静 译



国防工业出版社

· 北京 ·



CRC Press
Taylor & Francis Group

著作权合同登记 图字:军-2013-117号

图书在版编目(CIP)数据

动态系统最优估计:第2版/(英)克瑞斯迪斯
(Crassidis, J. L.), (英)琼金斯(Junkins, J. L.)著;
左斌, 吴亮, 李静译. —北京:国防工业出版社,
2016.1

书名原文:Optimal Estimation of Dynamic
Systems (Second Edition)

ISBN 978-7-118-10455-4

I. ①动… II. ①克… ②琼… ③左… ④吴… ⑤李
… III. ①动态系统-估计-最佳化理论 IV. ①N94

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第263067号

Optimal Estimation of Dynamic Systems(Second Edition)/by John L. Crassidis, John L. Junkins/ISBN:
978-1-4398-3985-0

Copyright © 2012 by Taylor & Francis Group.

Authorized translation from English language edition published by CRC Press, part of Taylor & Francis
Group LLC.

仅限中国大陆销售。

All rights Reserved.

Copies of this book sold without a Taylor & Francis sticker on the cover are unauthorized and illegal.
本书封面贴有 Taylor & Francis 公司防伪标签,无标签者不得销售。

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710 × 1000 1/16 印张 37 1/4 字数 735 千字

2016年1月第1版第1次印刷 印数 1—1500 册 定价 156.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

前 言

本书面向工程师、科研工作者和应用数学的研究者,介绍了估计理论的基础知识,是在2004年著作第1版基础上的再版,也是1978年出版的一本关于估计理论的著作(由本书第二作者编写)的延伸。本书在以前内容的基础上进一步拓展,加入了包括领域内新的理论成果在内的发展动向和更新内容,增加了一章关于高级序贯状态估计的内容,以及一些新的示例和练习。本书适合高年级本科生和研究生阅读,也十分适合作为该领域专业人士的自修书籍。编写本书是为了帮助初学者顺利入门估计理论领域。书中突出了估计方法和动态系统建模的关系,希望这一独特而全新的视角能够启发并帮助阅读本书的学生、科研工作者和工程实践者。

本书是作者多年来在空间飞行器姿态控制、飞行器导航和跟踪、轨道定位、火箭轨迹定位、摄影测量和振动系统识别等领域研究实践的积累和总结。书中内容来自作者为诸多研究实验室和政府机构进行讲座、研讨,以及在纽约州立大学布法罗分校和德州农工大学授课的讲义。

为激发读者的思考,估计问题通常为表现为如下形式:

(1) 考虑一个动态系统,研究者基于经验建立符合物理原理,与可得到测量数量、属性和精度均一致的数学模型。显然,这样的数学模型通常不可避免地包含若干“知之甚少”的参数。

(2) 确定那些“知之甚少”的参数的“最好”估计可以使数学模型可以给出系统行为的最优估计。

任何一个求解具有上述形式问题的系统方法通常都被认为是估计过程。依赖于系统数学模型的特性和测量误差的统计特性,问题求解的难度可能很小,也可能复杂到根本无解。

在撰写过程中,我们始终遵循3项基本原则:

(1) 以工科专业学生、应用数学研究者和工程实践者能理解的方式介绍最优估计理论的主要原理和方法发展。

(2) 通过例子展示估计方法与具有不同解析和数值难度问题的应用。尽量

通过相近方法的对比,帮助读者对不同方法解决问题的绝对和相对效能有直观感受。

(3) 对算法原型进行充分的阐述和讨论,以鼓励编制高效的计算机程序和对程序的灵活运用。

为充分遵循第1项原则,主要结果初次推导的过程只需要读者掌握较少的数学技巧和基础知识。例如,第1章介绍最小二乘方法时就并没有利用概率和统计的知识。我们将所需的基本知识(如矩阵分析、概率和统计、优化方法)放入附录,读者需要时即可学习。通常,首先展示估计理论的重要作用,然后在后面的章节中用数学知识给出严谨的推导。很多情况下,后面的方法以逻辑推导或者数学推导过程可得到同样的结果(如第3章对连续时间卡尔曼滤波方法的推导),而这样的推导帮助读者更加深入地理解理论的内涵。

为遵循第2项原则,本书使用了现实工程问题理想化的实例。每个章节都安排了几个实例,用于阐释本章介绍的估计方法,以便理论联系实际。书中的重点强调真实的动态模型。书中的方法也可应用于“黑箱”,但希望扩展的动态模型能更好地表明估计理论方法的重要性。

第2版中有些内容做了变动。我们的主旨是阐述估计理论内容,同时为了响应同事和学生的意见和建议,我们决定始终呈现状态估计理论的连续发展原貌,展现最小二乘估计到高级序贯估计,如粒子滤波的内在逻辑发展。这样的编排易于读者理解最小二乘方法与滤波的联系,而这方面的内容在3.3.5节给出了详细地阐述。为达到这一目的,原来关于动态系统综述的一章被放入附录。附录为读者提供了覆盖动态系统理论核心内容的简要回顾,以及应用估计理论概念的必要基础,该部分原有的练习题也在新的附录中保留,因为它们有助于读者全面、深入地理解动态系统理论。关于应用的章节被移至新版著述的后面部分,滤波应用的章节在介绍最小二乘方法章节之后。这样,最小二乘和滤波的某些应用(如姿态确定和估计)就能顺理成章了。第6章和第7章基于前面的内容给出理想化的实例,帮助读者深入理解和感受估计理论在工程实践中的价值。为了比较多种估计策略的效能或者考虑多种系统原型,在第6、7章的内容中也应用到了后续章节才介绍的方法,例如,6.2节中的非线性最小二乘方法和7.2节中的卡尔曼滤波方法分别在卫星定位系统中的定位应用。

为实现第3项原则,作者小心谨慎地避免使内容多样的估计理论著作看上去像一本“食谱”。问题的求解和算法并不是作为理论各个方面的理想应用而产生的,也没有方法能成功解决每一个问题。虽然如此,如果实例算法所要求的

条件得到满足,那么它们将被证明是有效的,也即是表明这些算法实例是有用的。通用的计算机程序和代码脚本并未在书中给出,但所有示例的计算机程序读者可以通过访问网站下载得到(见附录 E)。虽然计算机程序可以帮助读者理解,但它们也会妨碍严谨的理论学习,而理论学习对正确、深入的理解是无可替代的。因此,鼓励学生独立编程,再参照网站给出的程序示例进行比对验证。大部分通用的算法都以表格和流程图的形式进行描述,参照之后便可以直接正确地写出程序结构。

严格的理论推导加以大量的定性分析和评价也是本书的重要指导思想,本书通过引用作者科研实践中积累的工程实例促进学生对估计理论的学习。我们的目的之一就是要阐述物理建模和数值建模对于解决工程领域动态估计问题的重要意义。为了鼓励读者学习,每一章的后部分都给出了基于解析方法和基于计算方法的问题,这促进了从基本原理出发解决问题。为了吸引有兴趣的读者,本书也编排了高阶估计理论知识的章节,这些更深入的主体也向工程实践者展现了前沿领域和方法。书中给出了许多定性的评价以及作者源于实践领域切身应用而沉淀的深入思考和理解。

我们有太多需要感谢同事和学生,感谢他们给予本书的各种贡献。许多学生为帮助提高本书的教学价值、提供新的作为练习的有价值问题提供了极好的想法和建议,这些学生太多以至于没法一一提及,我们衷心感谢他们。下面要衷心感谢为本书的编写做出重要贡献的人们: Drew Woodbury 提供了卡尔曼滤波部分; Manoranjan Majji 提供了同时定位与地图构建; Yang Cheng 对粒子滤波一节做出了贡献; Kamesh Subbarao 对解决方案手册做出了贡献。还要感谢下面的朋友,感谢他们在本书编写过程中的讨论和理解: K. Terry Alfriend, Roberto Alonso, Penina Axelrad, Xiaoli Bai, Mark Balas, Itzhack Bar - Itzhack, Mark Campbell, J. Russell Carpenter, Kurt Cavalieri, Paul Cefola, Daniel Choukroun, Suman Chakravorty, Agamemnon Crassidis, Glenn Creamer, Jeremy Davis, James Doebbler, Norman Fitz - Coy, Brien Flewelling, Adam Fosbury, Michael Griffin, Christopher Hall, Kathleen Howell, Johnny Hurtado, Moriba Jah, Jer - Nan Juang, Simon Julier, N. Jeremy Kasdin, Michael Lisano, Ja, es Llinas, Brent Macomber, F. Landis Markley, Paul Mason, Tom Meyer, D. Joseph Mook, Daniele Mortari, Christopher Nebelecky, LYaakov Oshman, Mark Pittelkau, Tom Pollock, Mark Psiaki, Reid Reynolds, Hanspeter Schaub, Matthias Schmid, Sean Semoer, Malcolm Shuster, Andrew Sinclair, Tarun Singh, Puneet Singla, Dave Sonnabend, Debo Sun, Sergei Tanyin, Julie Thienel, Panagiotis Tsiotras,

James Turner, S. Tao Vadali, John Valasek, Qian Wang, Bong Wie, Renato Zanetti。还要感谢 CRC 出版社的 Bob Stern 和 Amy Blalock。最后,向我的家人致以最深的、最由衷的谢意,感谢他们在我编写本书期间的耐心和理解。本书用 Latex 2 编写(感谢 Yaakov 和 HP!),欢迎通过电子邮件 johnc@buffalo.edu 或 junkins@tamu.edu 给我们提出修改的建议和意见。

John L. Crassidis

John L. Junkins

目 录

第 1 章 最小二乘估计	1
1.1 曲线拟合实例	2
1.2 线性分批估计	5
1.2.1 线性最小二乘	7
1.2.2 加权最小二乘	10
1.2.3 有约束的最小二乘	12
1.3 线性序贯估计	14
1.4 非线性最小二乘估计	19
1.5 基函数	27
1.6 深入研究	31
1.6.1 最小二乘中的矩阵分解	31
1.6.2 Kronecker 分解和最小二乘	34
1.6.3 Levenberg - Marquardt 方法	37
1.6.4 最小二乘的投影	39
1.7 本章小结	40
练习题	42
参考文献	47
第 2 章 最小二乘方法中的概率理论	49
2.1 最小方差估计	49
2.1.1 无先验状态估计的估计问题	49
2.1.2 有先验状态估计的估计问题	53
2.2 无偏估计	57
2.3 Cramer - Rao 不等式	59
2.4 带约束最小二乘方差	63
2.5 最大似然估计	65
2.6 最大似然估计的属性	68

2.6.1	不变性原理	68
2.6.2	一致性估计	69
2.6.3	渐近高斯特性	70
2.6.4	渐近有效特性	70
2.7	贝叶斯估计	71
2.7.1	最大后验概率估计	71
2.7.2	最小风险估计	73
2.8	深入研究	77
2.8.1	加权矩阵的非唯一性	77
2.8.2	协方差误差的分析	79
2.8.3	岭估计	81
2.8.4	全最小二乘法	84
2.9	小结	94
	练习题	97
	参考文献	104
第3章	序贯状态估计	106
3.1	一阶滤波器实例	106
3.2	全阶估计器	108
3.2.1	离散时间估计器	111
3.3	离散时间卡尔曼滤波器	112
3.3.1	卡尔曼滤波器的推导	113
3.3.2	稳定性和 Joseph's 稳定形式	117
3.3.3	信息滤波和序贯处理	118
3.3.4	稳态卡尔曼滤波	120
3.3.5	与最小二乘估计的关系	122
3.3.6	相关的测量和过程噪声	124
3.3.7	Cramer - Rao 下界	125
3.3.8	正交原则	128
3.4	连续时间卡尔曼滤波器	132
3.4.1	连续时间形式的卡尔曼滤波推导	132
3.4.2	从离散时间卡尔曼滤波的结果推导连续时间卡尔曼滤波	134
3.4.3	稳定性	137
3.4.4	稳态卡尔曼滤波	138

3.4.5 相关测量和过程噪声	142
3.5 连续—离散卡尔曼滤波器	144
3.6 扩展卡尔曼滤波器	145
3.7 无迹滤波	150
3.8 约束滤波	155
3.9 小结	157
练习题	162
参考文献	168
第4章 序贯状态估计的高阶命题	171
4.1 分解方法	171
4.1.1 平方根信息滤波器	171
4.1.2 $U-D$ 滤波	173
4.2 有色噪声卡尔曼滤波	175
4.3 卡尔曼滤波的一致性	178
4.4 Consider 卡尔曼滤波	181
4.4.1 Consider 更新方程	181
4.4.2 Consider 传递方程	183
4.5 分散滤波	186
4.5.1 协方差交叉	188
4.6 自适应滤波	191
4.6.1 滤波器调整的分批处理	191
4.6.2 多模型自适应滤波	194
4.6.3 相互作用的多模型估计	198
4.7 集合卡尔曼滤波	201
4.8 非线性随机滤波理论	204
4.8.1 伊藤随机微分方程	206
4.8.2 伊藤公式	208
4.8.3 Fokker-Planck 方程	209
4.8.4 Kushner 方程	211
4.9 高斯和滤波	212
4.10 粒子滤波	215
4.10.1 最优重要度密度	218
4.10.2 Bootstrap 滤波器	220

4.10.3 Rao - Blackwellized 粒子滤波	226
4.10.4 基于 Rao - Blackwellized 粒子滤波的导航	229
4.11 误差分析	233
4.12 鲁棒滤波	234
4.13 小结	237
练习题	246
参考文献	251
第5章 分批状态估计	255
5.1 固定区间平滑	256
5.1.1 离散时间公式推导	256
5.1.2 连续时间公式推导	266
5.1.3 非线性平滑	275
5.2 固定点平滑	278
5.2.1 离散时间公式推导	278
5.2.2 连续时间公式推导	281
5.3 固定滞后平滑	283
5.3.1 离散时间公式推导	284
5.3.2 连续时间公式推导	286
5.4 前沿主题	289
5.4.1 估计与控制的对偶性	289
5.4.2 新息过程	296
5.5 小结	302
练习题	305
参考文献	307
第6章 参数估计应用	309
6.1 姿态测定	309
6.1.1 向量测量模型	309
6.1.2 最大似然估计	311
6.1.3 最优四元数解	312
6.1.4 信息矩阵分析	314
6.2 全球定位系统导航	317
6.3 同时定位与地图创建	321

6.3.1 基于线性最小二乘的3D点云配准	322
6.4 定轨	324
6.5 飞机参数辨识	331
6.6 特征系统实现算法	336
6.7 小结	342
练习题	344
参考文献	353
第7章 动态系统估计应用	357
7.1 姿态估计	357
7.1.1 乘性四元数公式	357
7.1.2 离散时间的姿态估计	363
7.1.3 Murrell 形式	365
7.1.4 Farrenkopf 的稳态分析	366
7.2 GPS 惯性组合导航	369
7.2.1 EKF 在 GPS/INS 中的应用	371
7.3 轨道估计	379
7.4 飞机的目标跟踪	381
7.4.1 α - β 滤波器	381
7.4.2 α - β - γ 滤波器	387
7.4.3 飞机参数估计	390
7.5 基于特征系统实现算法的平滑	395
7.6 小结	398
练习题	402
参考文献	407
第8章 最优化控制与估计理论	409
8.1 变分计算	410
8.2 具有微分方程约束的最优化	414
8.3 Pontryagin 最优化控制的必要条件	415
8.4 离散时间控制	421
8.5 线性调节器问题	423
8.5.1 连续时间形式	423
8.5.2 离散时间形式	428

8.6	线性二次高斯控制器	432
8.6.1	连续时间形式	432
8.6.2	离散时间形式	436
8.7	环路传输恢复	438
8.8	航天器控制设计	442
8.9	小结	447
	练习题	450
	参考文献	458
附录 A	动态系统回顾	460
附录 B	矩阵性质	530
附录 C	基本概率概念	547
附录 D	参数最优化方法	570
附录 E	计算机软件	583

第 1 章 最小二乘估计

理论吸引实践如同磁石吸引钢铁

——德国数学家,卡尔·弗雷德里希·高斯

本章将介绍著名的最小二乘估计方法。最小二乘估计方法适于多种类型的应用,如曲线拟合、参数识别和系统模型化。许多隶属不同领域的科学实践均归于此范畴,例如:确定液体阻尼器阻尼特性与温度的函数关系,识别飞机动态和静态空气动力学系数,轨道和姿态的确定,利用三角测量法确定位置,振动系统的模态识别。甚至现代控制理论的方法中,如适应控制器,也采用最小二乘近似方法更新控制系统中的模型参数。由此可见,最小二乘近似方法值得学习和研究。

在学习之前,先给出本章以及全书中常见的变量定义方式。估计问题中的变量或参数都有 3 个有意义的量值,即真值、测量值和估计值。真值在实际中往往无法得到,这也意味着真值只能由估计器近似,用没有符号标记的变量表示真值。测量值通常由传感器直接测量得到。例如,在轨道测定中,雷达用来测量至飞行器的距离。事实上,这个表述并不准确,因为雷达并非直接测量距离。雷达向物体发射电磁波,同时接收反射回来的电磁波,经信号处理后得到距离乃至距离变化率的估计。出于导航的目的,通常认为测量的量值即为的目标距离,因为距离是真实测量值的直接函数。测量从不完美,因其中总会包含误差,所以测量值通常被看作是真实值的函数和测量误差的和。真实值 x 的测量值通常以 \tilde{x} 表示。 x 的估计值由估计过程基于静态或动态模型和测量值确定,通常由 \hat{x} 表示。估计中常用的量值还有:测量误差,即测量值减去真实值;残差,即测量值减去估计值。对于一个可测量的量值 x ,下列两式成立:

$$\text{测量值} = \text{真实值} + \text{测量误差}, \text{即 } \tilde{x} = x + v$$

$$\text{测量值} = \text{估计值} + \text{残差}, \text{即 } \tilde{x} = \hat{x} + e$$

真实测量误差 v 和真实值一样无法实际得到。但是,误差产生的机理通常可由某些已知过程近似(通常为已知方差的零均值高斯噪声过程)。这些假设已知的测量误差统计属性通常被用于确定测量在估计过程中的相对权重。不同于测量误差,一旦估计值确定即可计算残差,残差通常用于驱动估计算法。显然,测量误差和残差在估计理论的理论推导和数值计算中均扮演着重要角色。

1.1 曲线拟合实例

本节通过一个简单的例子介绍最小二乘的基本概念,从该例也将延伸出本章的理论发展,并由此开始探索高斯的理论。图 1.1 所示为某过程的测量曲线 $y(t)$,在此暂时不考虑这一过程的确切物理含义,不妨假设其为某公司股票的历史交易价格。现在需要确定 $y(t)$ 的数学模型,以帮助预测股票前景。 $y(t)$ 的测量(即最近的股票价格)持续了 6 个月,用 $\hat{y}(t)$ 来表示。为确保得到准确的股票价格模型,限制残差的绝对值的均值 ≤ 0.0075 且标准差 ≤ 0.125 。经过大量测量采样,设采样次数为 m ,残差的均值 μ 和标准差 σ 可以由下式计算(公式将在后文推导):

$$\mu = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [\hat{y}(t_i) - \hat{y}(t_i)] \quad (1.1)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m \{[\hat{y}(t_i) - \hat{y}(t_i)] - \mu\} \quad (1.2)$$

式中: $\hat{y}(t)$ 为 $y(t)$ 的估计值。

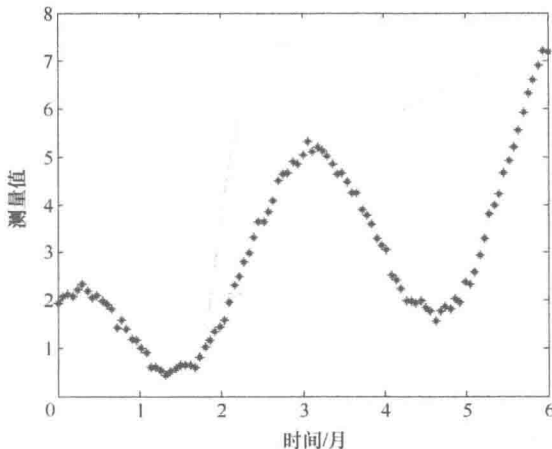


图 1.1 $y(t)$ 的测量值

为了建立一个可以预测 $y(t)$ 趋势的模型,自然会想到对预先假定的模型进行评估。选择了两个假定的模型:

模型 1:
$$y_1(t) = c_1 t + c_2 \sin t + c_3 \cos 2t \quad (1.3)$$

模型 2:
$$y_2(t) = d_1(t+2) + d_2 t^2 + d_3 t^3 \quad (1.4)$$

式(1.3)和式(1.4)中: t 为月份; c_1, c_2, c_3 和 d_1, d_2, d_3 为常数。

下一步将评价每个模型在采用最优的参数 c_i 和 d_i 时预测测量的“准确”程度。使模型 1、模型 2 拟合曲线的过程在统计学中称为回归。

假设读者已经阅读并理解了 1.2.1 节中线性最小二乘的内容,并且已经利用最小二乘算法确定了两个模型中的最优参数,即

$$(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3) = (0.9967, 0.9556, 2.0030) \quad (1.5)$$

$$(\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3) = (0.6721, -0.1303, 0.00210) \quad (1.6)$$

将模型拟合的曲线和测量数据绘制在一起,并绘制出残差曲线,得到图 1.2。易见,模型 1 与测量数值更吻合,这可以通过式(1.1)和式(1.2)计算两个模型的残差均值和残差标准差并比较得到。模型 1 得到的残差均值为 1×10^{-5} ,残差标准差为 0.0921;模型 2 的残差均值为 1×10^{-5} ,残差标准差为 1.3856。显然,模型 1 满足了上面规定的两项限制条件而成为一个好的拟合模型,而模型 2 没有满足。

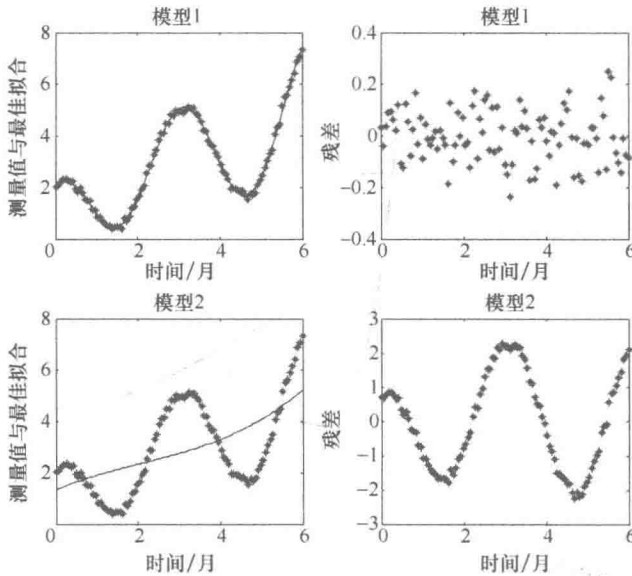


图 1.2 两个模型的最佳拟合和残差曲线

上面的分析已经说明模型 1 比模型 2 更好地描述了函数 $y(t)$ 的行为。由图 1.2 还可发现:模型 1 的残差曲线分布较为随机,而模型 2 无法预测函数的变化。由于没有迹象说明模型 1 和测量数值之间存在系统误差,因此可以得出结论:模型 1 准确描述了函数 $y(t)$ 。

由于模型 1 准确地吻合了测量数值,于是可以做出推理:模型 1 也可以预测 $y(t)$ 的未来走势。

模型预示:股票价格将不断升高,并在未来 12 个月中上涨两倍。如果你已投资了该只股票,那么目前可以对这个“快速致富”方案充分信任。但是前一阶段的快速升值往往预示着后一阶段的下跌。将依据式(1.5)中参数值的模型 1 所预测的曲线与 12 个月的实际股票价格数据绘制在一张图中,如图 1.3 所示。如果你在 6 个月后投资该股票并持续持有到 12 个月,将会损失投资。

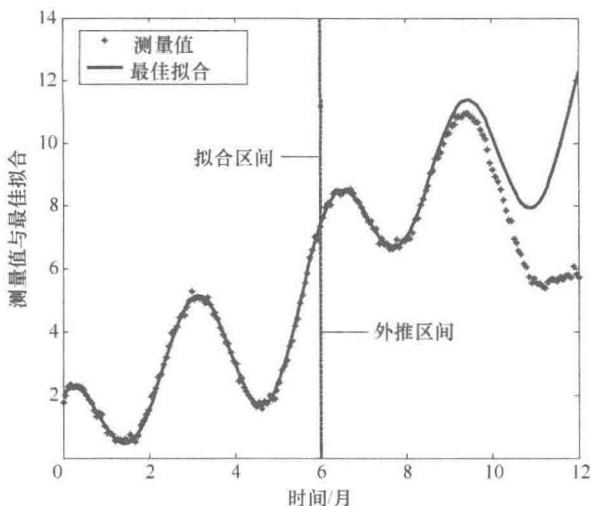


图 1.3 $y(t)$ 12 个月的最佳拟合曲线 1

事实上,图 1.1 所示的股票价格曲线是用下式计算的:

$$\hat{y}(t) = t + \sin t + 2\cos 2t - \frac{0.4e^t}{1 \times 10^4} + v(t) \quad (1.7)$$

式中:测量误差 $v(t)$ 是由标准差为 $\sigma = 0.1$ 的零均值白噪声模拟的。

在上面的示例中,模型 1 在前 6 个月的数据吻合较好,而其后的数据偏差较大,这是由于模型 1 未包含式(1.7)中的指数项,而该指数项的作用在 $t = 10$,即 10 个月之后逐渐显著。为进一步说明该问题,给出第 3 个估计模型:

模型 3:
$$y_3(t) = x_1 t + x_2 \sin t + x_3 2\cos 2t + x_4 e^t \quad (1.8)$$

该模型和真实模型仅相差测量误差。采用最小二乘方法拟合图 1.1 中前 6 个月的数据,得到最优参数 \hat{x}_i 为

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4) = (0.9958, 0.9979, 2.0117, -4.232 \times 10^{-5}) \quad (1.9)$$

需指出,如果测量误差为零,那么估计的结果将得到完美的真实模型,即估计参数为 $(1, 1, 2, -4 \times 10^{-5})$ 。还有一个关心的问题:采用正确的模型可以得到多么准确的预测?采用式(1.8)的正确模型和式(1.9)的最优参数计算股票价格,如图 1.4 所示。比较图 1.4 和图 1.3 易见:采用正确模型大大提高了未来 6 个月股票价格预测的准确程度。然而,在 10~12 个月,预测数据仍逐渐偏离测量值,这是因为即使模型结构是正确的,基于有限组测量数据所得到的估计参数仍将包含估计误差。以后我们将深入讨论测量误差是如何传递至参数估计误差的。

上述示例展示了估计理论中的许多重要问题。首先,实际应用估计理论的一个重要挑战就是正确定义系统的数学模型。示例中,虽然前两个模型均包含 t 项,但得到的对应 t 项的最优参数值相差甚远。现实问题中,数学模型中的支配项往往有正确的数学描述,而高阶项却难以准确描述。最终,未知的高阶项和参数估计