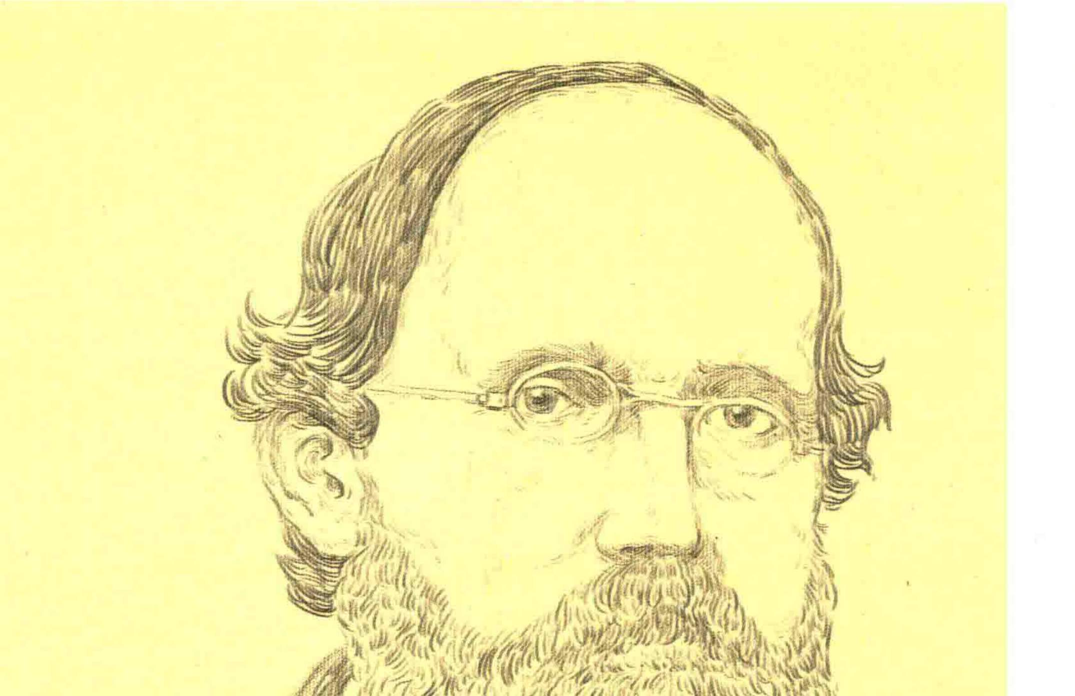


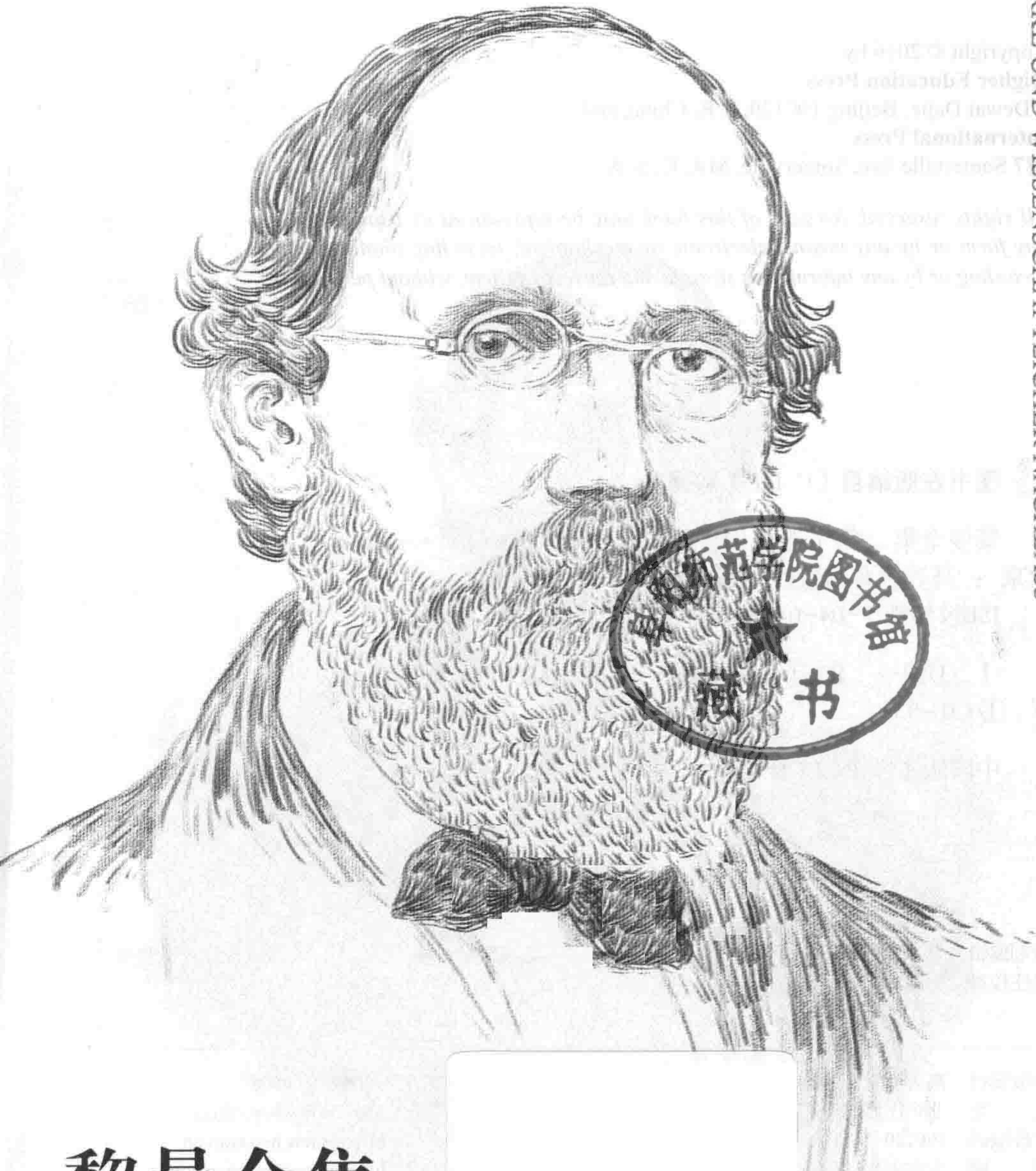
BERNHARD RIEMANN'S GESAMMELTE MATHEMATISCHE
WERKE UND WISSENSCHAFTLICHER NACHLASS

黎曼全集

（第一卷）

○ [德] Bernhard Riemann　著
○ 李培廉　译

高等教育出版社



BERNHARD RIEMANN'S GESAMMELTE MATHEMATISCHE
WERKE UND WISSENSCHAFTLICHER NACHLASS

黎曼全集（第一卷）

附季理真、丘成桐长篇序言

○ [德] Bernhard Riemann　著
○ 李培廉　译

高等教育出版社·北京　International Press

图书在版编目（CIP）数据

黎曼全集．第1卷 /（德）黎曼著；李培廉译．--北京：高等教育出版社，2016.4
ISBN 978-7-04-044261-8

Ⅰ．①黎…　Ⅱ．①黎…　②李…　Ⅲ．①数学 - 文集
Ⅳ．① O1-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 275311 号

策划编辑　李　鹏　　责任编辑　李　鹏　　封面设计　姜　磊　　版式设计　范晓红
责任校对　刁丽丽　　责任印制　毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京中科印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 1092mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	32.75		
字　　数	590 千字	版　　次	2016年4月第1版
插　　页	10	印　　次	2016年4月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	138.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　44261-00

第二卷目录预告

(以正式出版的内容为准)

第四部分 哲学内容断篇

第五部分 补遗篇

(M. Noether 与 W. Wirtinger 编)

第六部分 Riemann 家书选录

(Riemann 写给父亲和兄弟姐妹的信)

大道至简 *
——讲述一个我们应知而未知的黎曼

季理真, 丘成桐, 译者: 徐浩, 楼筱静

* 大道至简源自老子的道家思想. 道, 即理论. 大道至简的含义就是最高深的理论其实是最朴素的道理. 繁华落尽, 唯有至简方能久远. 就如读书, 初读从简到繁, 再读从繁到简, 直至了然于胸. 虽然黎曼的贡献遍及几乎所有数学领域, 但在他短暂的一生中未来得及系统地发展他的所有理论. 他的文章中看似简单的概念和哲学, 背后却是深刻的思考和厚重的计算. 这也解释了为何他的思想能够历经百年而弥新, 跨越学科影响不减. 大道至简是黎曼的写照, 无论是他的数学, 还是他的一生. —— 译者注

1 导　　引

黎曼是有史以来最伟大的数学家之一. 他英年早逝 (1826—1866), 一生中只发表了 9 篇论文. 但是自他的博士论文 “单复变量函数一般理论基础” 起, 他的工作对许多数学分支产生了巨大的影响.

大多数数学家, 特别是读过《黎曼全集》的学者们, 会同意一个看法. 那就是在伟大的数学家中, 黎曼的洞察力、原创性和深度都独树一帜. 他的名字命名了数学中的许多重要概念和定理. 比如, 学过微积分的学生都知道黎曼积分, 几何学家和物理学家大都熟悉黎曼几何. 对大众而言, 最著名的莫过于关于黎曼 zeta 函数零点的黎曼猜想. 黎曼还有许多并不为人熟知的故事. 我们出版这本包含黎曼的文章及相关评述的全集的目的是, 全景式地展现他的工作和对数学发展的影响. 特别地, 正如文章标题所述, 我们希望回答: 什么是我们应知而未知的黎曼. 也许本文的另一个标题可以是: 不朽的数学家黎曼的那些被忘却的故事.

当然, 我们出版《黎曼全集》的中文版一个更重要的原因是, 黎曼工作中所蕴含的丰富思想即使历经一个多世纪的挖掘, 仍未枯竭, 给人以新的启迪和挑战. 事实上, 人类历史上涌现出许多伟大的数学家. 但是很少有人的工作能够像黎曼那样在 150 多年后, 仍然为后来者提供灵感源泉, 并被不断地加以研究. 在 1990 年出版的《黎曼全集》的前言中, Narasimhan 写道:

> 黎曼的数学具有惊人的永恒魅力. 他的工作在许多领域中, 被人们从各种角度加以分析、加强和推广, 但是他的大部分成果经受住了岁月的洗礼和新观点的审视. 这不是说, 人们没有发现新的观点, 而只是说黎曼原创的方式方法从未被完全替代.

一个自然的问题是: 与许多历史上早已湮灭或被淡忘的数学工作相比, 为何有的数学可以代代流传. 许多学者撰文探讨过什么是好的数学应该具有的品质. 这些文章对于正在规划自己未来的青年数学人是很有价值的参考. 选择正确的研究方向和好问题的品位非常重要. 看待众多学者有关好的数学的演讲或文章, 很重要也很有意义的一点是, 将他们的准则付诸于那些数学中公认的杰出成果来加以检验. 也许很少有人做过这方面的实践. 不过大多数人会同意黎曼也许是最佳的选择之一. 放眼整个数学史, 黎曼也许是最值得系统研究的数学家.

我们首先总结几位著名数学家对于什么是好的数学和好的研究的观点和看法, 接下来讨论黎曼和他的工作, 以此为例检验这些观点. 我们希望了解黎曼如

何成为黎曼, 希望读者能够从黎曼的生平, 特别是他的论文中收获启示. 正如 Abel 的名言: “向大师们而不是他们的学生学习.”

值得注意的是, 黎曼的文章往往很简练, 要理解每处细节和体会其深刻思想并不容易. 所以, 后人的解释和评论会有助于更好理解黎曼的工作. 我们收录了各个版本的《黎曼全集》的序言和关于黎曼工作的多方评论. 由此可以比较不同时期人们对于黎曼工作的认识.

2 数学是什么

在我们理解和回答前文中提到关于黎曼的问题前, 可能需要先理解什么是好的或伟大的数学. 就像定义 “美” 一样, 很难具体去定义伟大的数学, 但是只要一见到它人们就能认出它来. 另一方面来说, 每一个数学家都有自己的观点和标准, 有些勇于将他们的想法明确地写下来. 在这一节里, 我们将引用一些著名数学家关于什么是好的数学的论述.

可能会让读者惊讶的是 “什么是数学?” 这个更基础的问题也不是那么容易回答. 标准的回答, 举例来说,《牛津词典》对数学的定义是: 关于数、量、空间的抽象科学或抽象定义 (纯数学), 或者其在其他学科的应用 (应用数学). 这个定义没错, 但是它并没有完全表达数学的精神.

实际上, 如 Atiyah [At1, p. 25] 所写的那样:

数学的第一特性就是很难去描述或定义它的主体或内容 ……

一个可能的答案是, 数学是一种用来解决 “问题” 的想法和知识技术的集合. 这个回答可能不够理想, 因为它引出了另一个问题, “什么样的问题?” 尽管如此, 数学的本质是数学问题的雏形可能出现在任何领域里: 不是内容, 而是形式很重要. 在任何情况下, 无论这是否是一个令人信服的答案, 不可否认的是, 解决问题的方法一直在数学史上扮演着基本的角色 ……

一个问题本身可能就具有根本的重要性, 是学科领域进一步发展必须克服的障碍. 一个 “好” 问题的真正标准是人们在解决它的过程中能够产生具有广泛用途的强有力的新技术.

Shafarevich 在《代数基本概念》[Sha] 一书的前言中写道:

对于 “数学研究的是什么?” 这个问题的回答, “结构” 或是 “特定关系的集合” 很难让人满意. 在无数的可以想象的结构或特定关系的集合中, 数学家只对其中很小部分的离散子集感兴趣, 问题的关键是理解散布在无穷大块中的这一小部分的特殊价值.

Borel 在《数学: 艺术与科学》[Bo] 一文中写道:

首先, 对于一个数学家来说, 很自然地更愿意做纯粹的数学报告, 而非空谈数学哲理 ……

各位在场的数学家造成的困难, 是让我意识到, 甚至是痛苦地意识到, 实际上我讨论的所有课题都已经被提到过, 所有的论证都已经被提出并讨论. 数学只是一门艺术, 或者一门科学, 科学的皇后, 仅仅是科学的仆人, 或者是艺术与科学的结合 ……

数学家往往致力于寻找一般性的解. 他们喜欢用一般的公式来解决很多特殊问题. 这可以被称为经济的想法或懒惰 ……

通常人们关于数学的概念可以总结如下: 一方面, 它是一门科学, 因为它的主要目标是服务于自然科学和技术. 这实际上是数学的起源, 也是数学问题永不枯竭的源泉. 另一方面, 它又是一门艺术, 因为它主要是思想创造的产物, 它的进步是人类智慧的胜利, 来自人类思想的深入发展, 审美原则是最终的评价标准. 但这种在纯思想世界中的智力活动也需受制于其在自然科学中的应用.

不过这种观点实在太狭隘了, 尤其是最终的这句限制太大, 许多数学家坚持数学研究应毫无拘束 ……

数学在很大程度上, 是一项集体的事业. 简化和统一保持了无止境的发展和扩张之间的平衡; 它们一次又一次地展现出精彩绝伦的统一, 即使庞大的数学难以为个体所驾驭 ……

在本文标题中 "科学" 这个词有着更广泛的含义: 它不仅指自然科学, 在更大的范围内, 数学的概念是一门实验和理论的科学. 我想要大胆地说, 作为一门思想的自然科学, 作为一门关于智慧的自然科学, 它的研究对象和模式都是思想的产物 ……

如果不想将在自然科学中的应用作为一个评价标准, 那也不能够仅仅回到知识的优雅上. 实践性的准则依然存在, 即数学本身的实用性. 考虑到数学的这个现实性, 公开问题, 结构, 在不同领域中的需要和联系, 已经表现出了卓有成效的、具有价值的方向, 让数学家来自己定位, 并将相关的价值附加到问题及理论上. 通常测试一个新理论是否有价值的方法就是看它是否能够解决经典的问题 ……

数学家的天赋之一就是能够自然地被好的问题所吸引. 也就是那些后来显示出重要性的问题, 即使当时不受重视. 数学家被这些问题吸引, 部分是由于理性和科学的观察, 部分由于纯粹的好奇心, 本能, 直觉, 或纯粹的审美方面的考虑. 我要讲的最后的主题, 正是数学的审美感受 ……

我相信我们的审美观并不总是很纯粹和深奥, 也会包含一些世俗的尺度, 比如 (在数学中的) 意义, 结果, 实用性等. 我们对于定理、理论和证明的判断总是受此影响, 虽然经常简单地等同于审美.

我用 Galois 理论为例来做一解释. 这个理论通常被认为是数学上最漂亮的一页. 为何? 首先, 它解决了一个非常古老, 也是当时关于多项式方程最重要的问题. 第二, 这一广博的理论早已超越了根号求解方程的初始问题. 第三, 它只基于很少的几条优雅而简洁的原理, 其全新的框架和概念体现了伟大的原创性. 第四, 这些新的观点和概念, 特别是群的概念, 为整个数学发展开辟了新的道路, 产生了深远的影响 ……

数学是一门复杂的创造, 许多重要特征与艺术、实验和理论科学相似. 所以它同时具有这三种属性, 也与任何之一不同.

在这篇文章中, Borel 用 Galois 的结果来检验他对于数学美的标准. 在我们的文章中, 我们希望通过黎曼的工作来检验什么是好的和伟大的数学. 读者们将会看到并且同意黎曼的工作符合上述的标准.

Atiyah 曾说 [At1, p. 29]:

对于数学工作者而言, 数学既是艺术也是科学, 美与真理受到同等尊重 ……

大多数数学家, 特别是那些 "纯粹" 数学家, 所从事的研究工作都远离应用. 但是他们很清楚什么是漂亮的证明. 这代表了优雅的风格、经济的论证、清晰的思想、完备的细节和平衡的形态, 综合起来让人确信无疑. 自然地, 很少有人能完全达到这些高度, 但是他们代表了努力的目标, 有着强烈的影响. 数学家经常被某个, 而非另一个领域所吸引, 这是因为他们发现这个领域更漂亮, 用到更优雅的方法. 相反地, 他们也努力避开那些冗长丑陋的论证.

数学家头脑中的这些审美标准的主观重要性很难被高估. 它们提供了数学家前进的内在动力, 和如何看待其他人的工作.

Atiyah 在文章 [At2, pp. 233–234] 中写道:

数学的精髓在很大程度上是一门将非常零散的事物拼接起来的艺术. 毕竟数学是科学领域的终极抽象, 能够应用于解释诸多现象. 也许我可以引用 Poincaré 的一段话, 它与我提到的这些事实有关. 他说: "数学值得研究之处在于, 通过它们与其他事实的联系, 可以导致数学定理的认知, 如同实验结果导致物理定律. 它们向我们揭示其中意想不到的密切联系, 特别是那些人们熟知的却以为毫无关联的事实." 这些来自于实验科学和数学内部的事实需要结合起来. 我们需要从事联系不同的数学分支的学者, 同时也需要那些专注于某个领域, 并且深入研究的学者 ……

我接下来比较冷门与主流数学 …… 真正的先驱是那些特立独行、相信自己不需要追随前人的工作的人. 他们全新启航, 秉持完全创新的观点. 数学中真正全新的发现和新创的领域大都来自于这些先驱的工作 ……

最后, 我希望比较一下 "强有力" 和 "优雅" 的数学证明. 强有力的证明不一定优雅, 它可以是完全的蛮力, 推土机般的技巧, 套用整页的公式. 虽然看起来丑

陋, 但是确实奏效. 而优雅的证明, 看似毫不费力, 挥洒笔墨, 一个精彩的结果出人意料地跃然纸上 …… 如果你希望数学继续前行, 那么优雅是一个重要的标准. 如果想让别人理解证明的主旨, 那么就必须做到简单而优雅. 这些品质在数学上很容易理解. 事实上, Poincaré 认为简洁是数学理论的向导, 是我们选择研究方向的标准.

除了讨论数学的本质, 上述引用也讨论了好的和漂亮的数学的重要特征.

在一次采访中 [Mi, p. 11], 面对提问 “你是否认为数学中存在主流课题? 是否这些课题比其他的更重要?”, Atiyah 回答道:

是的, 我认为这是对的. 我强烈反对那种认为数学只是一些分散课题的组合, 人们可以通过写下公理 1, 2, 3 来发明一个新的数学分支并独自研究. 数学更多的是一个有机的发展体. 它与过去和其他学科有着长久的联系. 从某种意义上来说, 核心的数学总是不变的. 也就是那些来自于现实物理世界和数学自身与数和解方程相关的问题. 这总是数学的主要部分. 任何能够有助于解决这些问题的进展都是数学的重要部分. 反之, 与这些核心数学问题无甚关联或无益于理解数学精髓的方向, 通常不重要. 一个新的分支发展起来, 最后对其他分支产生影响, 但是如果它太偏离主流, 那么从数学角度而言, 不会太重要. 确实有的原创思想开启了新领域, 但是仍然与其他重要的数学分支有联系和交叉. 数学分支的重要性很大程度上取决于它是否与许多其他分支有关联. 这可看作 “重要性” 的自洽的定义.

对于提问 “有没有可能一个问题很长一段时间没有任何影响, 但是许多年后突然受到重视?”, Atiyah 回答道:

我想确实有的人会有很超前的数学想法. 比如有人提了一个巧妙的建议, 但是很长一段时间人们都没有注意到它的重要性. 确实这经常发生. 我并不太关注这些. 我更多思考的是当今人们趋向于自己用非常抽象的方式发展一个数学领域. 他们只是埋头苦干. 如果要问他们原因, 有什么重要性或者联系, 你会发现他们也无从回答.

现代数学的各个分支都有一些例子, 比如抽象代数, 泛函分析, 一般拓扑学的某些部分. 特别是那些公理化方法泛滥的部分. 引入公理的目的是将问题暂时分离出来, 并发展求解的技巧. 有人认为公理化可以用来定义一个自洽的数学领域. 我认为这是错误的. 公理越狭隘, 会显得越孤立. 当人们抽象化数学的概念, 这是为了将你希望专注的部分和你认为无关的部分区别开来. 这样更加方便于集中精力. 但是, 你也去除了许多你不感兴趣的部分, 久而久之, 就脱离了原本的根基. 如果你发展公理化体系, 那么在某个阶段, 你应该回到它的本源, 促进融合与交流. 这才是健康的. 你会发现 von Neumann 和 Hermann Weyl 在 30 年前也表达过类似的观点. 他们担心如果数学的发展道路偏离了它的本源, 就会失去生

机. 我认为这基本正确.

在一篇题为 "关于数学的证明与进展" 的文章中 [Th, p. 162], Thurston 写道:

数学家一般认为他们明白数学的含义, 但是却很难给出一个直接的定义. 这是个有趣的问题. 在我看来, "关于形式化格局的理论" 也许最为贴切, 但是要讨论它的话, 可以写一长篇文章.

追求真理, 这是数学最显著的特征. 但是数学并不仅仅关心某个命题是否正确. Borel [Bo, p. 11] 写道:

当然并不是所有的概念和定理都同等重要. 如 G. Orwell 的《动物农场》那样, 其中一些肯定会更重要. 是否有内在的标准可以客观地给出排序? 你会意识到同样的问题也存在于绘画、音乐和艺术. 所以这是审美问题. 事实上, 一个通常的回答是, 数学很大程度上是一门艺术, 它的发展受到美学标准的推动、引导和审视.

3 什么是好的和伟大的数学

我们对数学的本质作了一些描述. 接下来, 我们将考虑如何描述和判断好的和伟大的数学和数学家.

一个简单和最直接的判断数学和数学家的方式是接受时间的检验. 这也是最可靠和最终极的检验, 如同阳光下的一切.

如 Grothendieck 在他写给瑞典皇家科学院的拒绝 Crafoord 奖的信中所说: "我确信时间是检验新思想和新观点所带来的成果的唯一途径. 成就应该由它的影响力, 而不是荣誉来衡量."

Atiyah [At1, p. 36] 也曾写道:

当然任何领域中的研究的价值最终都应该由后人来评判 ……

我一直主张另一个观点, 即评价应该基于对于整个数学的影响. 这不容易, 因为需要估算影响到底有多大, 但这至少是一种可行的方案. 而且, 这一原则也能够加强数学的统一, 避免各自为政. 我相信, 在现实中, 人们更看重的是与好几个数学领域都有关的工作.

许多时候, 人们无法等待太久, 所以时间的检验不太可行. 需要寻找其他的方法. 评价好的或伟大的数学和数学家总是很困难的, 但数学家们又时刻需要这些评价. 他们在评价他人的同时, 也接受他人的评价. 最明显的是各种颁奖的场合.

除了 Atiyah 上面提到的方法, 我们看看其他数学家的点子. Hardy [Har, p. 13] 有一句名言:

如同画家和诗人, 数学家也是 "模式" 创造者. 如果数学家创造的 "模式" 更加久远, 那是因为它们是思想的发明.

那么自然地就会考虑如何评价思想的价值. 在一次演讲 "作为一门适当语言的数学" [ERS] 中, Gelfand 讲道:

许多人认为数学是枯燥和形式的科学. 但是, 真正好的数学工作其实总是充满漂亮、简洁、精确和疯狂的思想. 这是奇怪的组合. 我知道这种组合在古典音乐和诗歌中非常重要. 但是它也常见于数学中. 所以也不难理解许多数学家都喜欢严肃的音乐.

在文章 "数学的健康" [Mac2] 中, Mac Lane 写道:

目前, 我们大多数人只在讨论班和会议上和我们的同领域的学者交谈 ……

同时, 出版很少. 从范畴理论到双曲理论这些领域, 许多重要数学家并非通过发表文章来积累声望. 当然, 证明一个定理比写下详细的证明更有趣, 但是 (也许除了 Weierstrass) 从未有过如此普遍的倾向, 仅仅通过口头交流结果. 这种通过草略的文章和研究公告交流有时候是不够的 (比如, 在几何拓扑中). 有时候发表的不是一个证明, 而是暗示和宣布优先权. 如今的天才们不拘泥于细节, 但是如果我们鼓励这种通过伪出版物获取声望的方式, 将会导致更多的来自非天才模仿者的声明 ……

一个问题最重要的是它的相关性. 或许困难在于专业化效应. 当一个领域失去了目标和展望, 很难转换领域, 也许只能简单地继续在一个非自然的问题上无目的前行 ……

在每一个这些数学中说明的例子, 专家们看到了一个困扰着我的目的. 但我仍然认为太多这种不带说明的阐述, 这正是持续专业化的代价 ……

过去至少有一些数学家了解整个学科的概貌, 能够对未来走向提出展望. 他们不局限于自己工作的领域. 今天很少有人能有这种大局观. 这也许是因为我们总是奖励某个领域的专家, 而非那些了解全局的人 ……

希望可以有更多来自不同领域的专家交流他们的想法, 更多人能够转换研究领域. 希望有更多关于数学形态和方向的讨论, 更强调目的而非技巧. 希望有更多关注新的数学概念的起源和发展, 因为它们可能来自数学、理论物理等其他学科. 希望有更多努力整理和理解数学最近的主要进展 ……

他与我正在讨论如何做数学. 我采用标准的方法, 即指定一个感兴趣的课题, 建立所需的公理, 然后定义名词. Atiyah 很赞赏理论物理学家的风格. 对他们而言, 每当有新的想法, 并不是立刻去定义它, 因为这会造成有害的局限性. 他们会到处谈论这个想法, 发展各种联系, 最后达到更加普适和丰富的概念. Atiyah 指出 Dirac 的 δ 函数是一个很好的例子, 最后它被看作一种分布. 其他例子包括量子场论中的重整化和 Feynman 路径积分. 不过, 我坚持认为作为数学家, 我们应

该清楚我们所谈论的，无论是同伦群还是伴随函子.

他总结道："数学的进步应该由所理解的新思想来衡量，而不是出版物的数量."

在一篇呼应 Mac Lane 的文章"数学的判断"[Br] 中，Browder 写道：

数学是科学的一部分，秉承科学研究的方法. 但是我们的学科决定了我们所用的技巧，与其他科学区别开来. 如果科学是为了发现"自然定律"，那么数学也完全是为了探索思想和概念的"自然"王国.

只有通过深刻理解我们所研究的专业领域，才能发现一般的理论和我们所探寻的关联. 我们需要深入与细致的挖掘，也要时刻准备当灵感出现的那一刻.

Mac Lane 提到的专业化与 Browder 给出的特例完全不同. 在文章"多元数学：数学是单一科学还是艺术的集合？"[Ar, p. 403] 中，Arnold 写道：

数学最惊人和振奋人心的特征是它的各个不同的领域之间往往存在着神秘的联系.

过去一个世纪的经验表明，数学的发展并非由于技术上的进步 (占据了数学家们大部分的精力)，而是由于通过这些努力发现了不同领域间意想不到的联系. 关于数学各个领域当前进展的珍贵的综述报告，类似于阵地战. 前线的阵形和每日的变化，对于战士们很重要. 但是思想的发散模式造成了有害的一面 (由于数学的专业化和其更细致的划分所导致)，特别当人们希望了解数学过去发展的曲折历史，这变得越发明显.

他继续说道 [Ar, p. 408, p. 415]：

错误是数学重要和具有启发性的一部分，也许和证明同等重要. (数学中的证明就如同诗人的书写.) 数学工作由证明构成，正如诗歌由文字写就 ……

Hilbert 试图预测数学未来的发展，并提出自己的问题来影响之. 20 世纪数学的发展却走了不同的道路 …… Poincaré 和 Weyl 对 20 世纪科学的影响更加深远.

Atiyah [At1, p. 28] 写道：

毫无疑问，创新在数学发展中至关重要，这是最高的原则 ……

创新有许多形式. 最普遍的是发明解决问题的新技巧. 创新的程度当然也有不同，可以是如同大多数数学家几乎每天都取得的小步的进展，也可以是巨大的全新方法的飞跃. 后者往往由于引入了全新的概念，导致完全不同的观点 ……

巨大创新通常出现在解决一个非常困难问题的过程中. 还有另一种同样关键的创新，也就是提出新的重要的问题. 如前所述，一个问题的重要性在它被解决之前一般很难估量，所以选择合适的研究问题需要卓越的洞察力 ……

我们可以说，数学的进展是通过不断应用标准的方法，并时而由于新概念和新问题的突然出现引发飞跃.

Atiyah [At1, p. 29] 写道:

在如同数学这样组织精细和结构复杂的学科中, 有许多的路标和明灯来指引观光者. 但是行之久矣, 笔直的道路令人生厌, 数学家们期待意料不到的转折. 如果有人说一个结果出乎意料, 可视作是高度的赞扬.

Atiyah [At1, p. 31] 写道:

一定程度的专业化是不可避免的, 也许也是我们期望的. 但是行之过度会带来灾难. 数学的使命是把思想从一个领域通过抽象化传递到另一个领域. 进一步, 数学研究的终极意义在于它的整体统一性 ……

能够保持数学整体性和统一性的主要平衡力, 是发展复杂和抽象的概念. 这可以促进产生总体融合, 使得许多特殊结果成为某个大统一原理的特殊情形. 这在许多领域都取得了成功. 19 世纪数学的很大一部分, 在没有造成巨大损失的情况下, 已经被 20 世纪数学的抽象和提升的观点所吸收. 这解释了当今一些关键领域的统治地位, 比如群论 (研究对称性)、拓扑 (研究连续性) 和概率 (研究随机事件).

Atiyah [At1, p. 32] 写道:

新概念可以帮助统一过去的工作并为未来发展扫清障碍. 所以它们是数学发展必不可少的组成部分. 从长远来看, 它们与解决难题或者发展新的技巧同等重要. 现实中, 真正有用概念的出现需要很长的积累, 往往与具体的工作相结合. 它们只在很少的情况下会横空出世.

在书 [Go2] 中有一节 “给年轻数学家的建议”, Connes 在其中一篇文章中写道:

真正有趣的事情是, 好几代数学家发展起来的非常不同的领域之间出现了意想不到的联系.

Gowers 在他的文章 “数学的两种文化” [Go] 中写道:

C. P. Snow 认为人文与自然科学之间缺少交流是非常有害的. 他特别批评了那些人文学者缺少科学素养 ……

我认为类似的社会现象也可以在纯数学中见到. 这并不是完全健康的. 我希望讨论的 “两种文化” 所有数学家应该都不会陌生. 粗略地说, 我是指两类不同的数学家, 一类将解决问题视为中心的目标, 另一类更关注建立和理解理论 ……

并不是所有问题都同样有趣, 检验哪些是更有趣的问题的方法之一是看它们是否有助于我们对于数学整体的理解. 同样地, 如果有人付出多年努力钻研一个很困难的数学领域, 但是却并未增进对数学整体的理解, 那么也不会引起太多关注.

所以我所说的数学家可以分为理论型和解题型, 我是指他们的侧重点, 而并

非说他们完全只从事这一类数学工作. 显然这两类数学家都是我们需要的 (如同 Atiyah 在 [At2] 的文末所说的那样). 同样显然的是, 不同领域的数学家需要不同类型的才能.

Atiyah [At2, p. 232] 写道:

我希望提到的第一点是解决问题与创立理论的关系. 当然两者可以有许多话题, 如果一个理论不能够解决问题, 它有何用? 如果提出许多问题却无法系统地建立关联, 又有何益? 即使它们单个来看都很有意思 ······

我们需要将过去的研究经验凝聚成一种容易理解的形式, 这也即理论的初衷. 也许我还可以引用 Poincaré 的名言: "科学由事实构成, 如同房屋建自于石料. 但是事实的堆砌并不是科学, 就如同一堆石头并不是房子."

在书 [Go2] 中有一节 "给年轻数学家的建议", Atiyah 在其中一篇文章中写道:

数学家有时候可以分类为 "解题者" 和 "理论家". 确实在一些极端情形这种区分非常明显, 比如 Erdös 和 Grothendieck. 但是大多数数学家介于两者之间, 因为他们的工作既有解决问题, 也同时发展理论. 事实上, 如果一个理论不能够解决具体和有趣的问题, 那就不值得探究. 相反地, 对于真正深刻的问题, 在求解它的过程中应该能够激发理论的发展 (比如 Fermat 大定理).

在本文提及的数学家中, 也许 Halmos 的观点是最著名的. 在文章 "作为创新艺术的数学" [Hal] 中, 他写道:

数学是抽象的思想、纯粹的逻辑和创新的艺术. 所有这些都是错误的, 但是又有些道理, 毕竟它们比 "数学就是数" 或者 "数学是几何形状" 之类的观点好多了. 对纯粹数学家而言, 数学是一些稀疏假设的集合通过漂亮证明的逻辑衔接. 简洁又不失复杂, 至高的逻辑分析, 这些是数学的特点.

数学家青睐最优的情形, 如同工业实验者打碎灯泡, 扯破衬衣, 将车在坑地里颠簸. 他希望知道一种推导应用有多广, 如果推导不成立会发生什么. 当减弱一项假设会有什么效果? 在什么条件下可以加强某个结论? 这些无穷无尽的问题导致了更广泛的理解、更强大的技巧和未来问题更大的弹性 ······

对于数学成果质量的评判, 所基于的原则远高于正确性, 但是又很难描述. 数学上好的工作往往与许多领域相联系, 它必须是全新的 (想象一下如果一部 "新" 电影只是更换了名字和服装, 却保留了相同的情节). 它具有不可言喻但不可阻挡的深刻性. 比如 Johann Sabastian 是深刻的而 Carl Philip Emmanuel 不是. 数学工作崇尚美妙, 复杂, 简洁, 优雅, 追求满足感和相称性, 看起来都很主观, 但都被广为认可.

Halmos 在他的自传《我要做数学家》[Hal2] 中写道:

数学不是如通常认为的那样仅仅是关于推导的科学. 当我们试图证明一个