

金融随机分析

修订版

第二卷 连续时间模型

[美] 史蒂文·E.施里夫 (Steven E. Shreve) 著

陈启宏 陈迪华 译

汉译经济学文库

Translated Economics Library

STOCHASTIC
CALCULUS
FOR FINANCE

 上海财经大学出版社



汉译经济学文库

金融随机分析 第二卷

——连续时间模型

(修订版)

[美] 史蒂文·E. 施里夫 著
(Steven E. Shreve)
陈启宏 陈迪华 译

 上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

金融随机分析/(美)施里夫(Shreve, S. E.)著;陈启宏,陈迪华译.
—修订版. —上海:上海财经大学出版社,2015.6

(汉译经济学文库)

书名原文:Stochastic Calculus for Finance

ISBN 978-7-5642-2155-3/F·2155

I. ①金… II. ①施… ②陈… ③陈… III. ①随机分析-应用-
金融学 IV. F830

· 中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 086375 号

□策 划 张美芳

□责任编辑 张美芳

□封面设计 钱宇辰

JINRONG SUIJI FENXI

金融随机分析(第二卷)

——连续时间模型

(修订版)

[美] 史蒂文·E. 施里夫 著
(Steven E. Shreve)
陈启宏 陈迪华 译

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙 邮编 200434)

网 址: <http://www.sufep.com>

电子邮箱: webmaster@sufep.com

全国新华书店经销

上海华教印务有限公司印刷装订

2015 年 6 月修订版 2015 年 6 月第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16 40 印张(插页:1) 835 千字

印数:7 901—11 900 定价:88.00(两卷)

图字:09-2007-420 号

Translation from the English language edition:

Stochastic Calculus for Finance II by Steven E. Shreve

Copyright © 2004 Springer-Verlag New York Inc.

Springer is a part of Springer Science+Business Media

All Rights Reserved

CHINESE SIMPLIFIED language edition published by SHANGHAI UNIVERSITY
OF FINANCE AND ECONOMICS PRESS, copyright © 2015.

2015 年中文版专有出版权属上海财经大学出版社

版权所有 翻版必究

目 录

CONTENTS

1 一般概率论 / 1

- 1.1 无限概率空间 / 1
- 1.2 随机变量和分布 / 6
- 1.3 期望 / 11
- 1.4 积分的收敛 / 19
- 1.5 期望的计算 / 23
- 1.6 测度变换 / 27
- 1.7 本章小结 / 33
- 1.8 评注 / 34
- 1.9 习题 / 34

2 信息和条件期望 / 41

- 2.1 信息和 σ -代数 / 41
- 2.2 独立性 / 44
- 2.3 一般条件期望 / 54
- 2.4 本章小结 / 62
- 2.5 评注 / 63
- 2.6 习题 / 64

3 布朗运动 / 68

- 3.1 引言 / 68
- 3.2 随机游动 / 68
 - 3.2.1 对称随机游动 / 68

- 3.2.2 对称随机游动的增量 / 69
- 3.2.3 对称随机游动的鞅性质 / 69
- 3.2.4 对称随机游动的二次变差 / 70
- 3.2.5 按比例缩小型对称随机游动 / 70
- 3.2.6 按比例缩小型随机游动的极限分布 / 72
- 3.2.7 对数正态分布作为二叉树模型的极限 / 75
- 3.3 布朗运动 / 77
 - 3.3.1 布朗运动的定义 / 77
 - 3.3.2 布朗运动的分布 / 78
 - 3.3.3 布朗运动的域流 / 79
 - 3.3.4 布朗运动的鞅性质 / 80
- 3.4 二次变差 / 80
 - 3.4.1 一阶变差 / 81
 - 3.4.2 二次变差 / 82
 - 3.4.3 几何布朗运动的波动率 / 86
- 3.5 马尔可夫性质 / 87
- 3.6 首达时间分布 / 88
- 3.7 反射原理 / 91
 - 3.7.1 反射等式 / 91
 - 3.7.2 首达时间分布 / 92
 - 3.7.3 布朗运动及其最大值的分布 / 92
- 3.8 本章小结 / 93
- 3.9 评注 / 94
- 3.10 习题 / 95

4 随机分析 / 101

- 4.1 引言 / 101
- 4.2 简单被积函数的伊藤积分 / 101
 - 4.2.1 积分的构造 / 102
 - 4.2.2 积分的性质 / 103
- 4.3 一般被积函数的伊藤积分 / 106
- 4.4 伊藤—德布林公式 / 110
 - 4.4.1 关于布朗运动的公式 / 110
 - 4.4.2 关于伊藤过程的公式 / 115
 - 4.4.3 例子 / 118
- 4.5 布莱克—斯科尔斯—默顿方程 / 124
 - 4.5.1 资产组合价值的演化 / 124
 - 4.5.2 期权价值的演化 / 125

- 4.5.3 演化相等 / 126
- 4.5.4 布莱克—斯科尔斯—默顿方程的解 / 127
- 4.5.5 希腊字母 / 128
- 4.5.6 看跌—看涨平价公式 / 130
- 4.6 多元随机分析 / 132
 - 4.6.1 多维布朗运动 / 132
 - 4.6.2 多个过程的伊藤—德布林公式 / 133
 - 4.6.3 布朗运动的辨识 / 135
- 4.7 布朗桥 / 138
 - 4.7.1 高斯过程 / 138
 - 4.7.2 布朗桥作为高斯过程 / 141
 - 4.7.3 布朗桥作为按比例缩放型随机积分 / 142
 - 4.7.4 布朗桥的多维分布 / 144
 - 4.7.5 布朗桥作为条件布朗运动 / 147
- 4.8 本章小结 / 148
- 4.9 评注 / 151
- 4.10 习题 / 153

5 风险中性定价 / 170

- 5.1 引言 / 170
- 5.2 风险中性测度 / 171
 - 5.2.1 关于单个布朗运动的哥萨诺夫定理 / 171
 - 5.2.2 风险中性测度下的股价 / 174
 - 5.2.3 风险中性测度下资产组合过程的价值 / 177
 - 5.2.4 风险中性测度下的定价 / 177
 - 5.2.5 布莱克—斯科尔斯—默顿公式的推导 / 178
- 5.3 鞅表示定理 / 180
 - 5.3.1 单一布朗运动的鞅表示 / 180
 - 5.3.2 单一股票的对冲 / 181
- 5.4 资产定价的基本定理 / 182
 - 5.4.1 哥萨诺夫定理和鞅表示定理 / 182
 - 5.4.2 多维市场模型 / 183
 - 5.4.3 风险中性测度的存在性 / 185
 - 5.4.4 风险中性测度的唯一性 / 188
- 5.5 支付红利的股票 / 190
 - 5.5.1 连续支付的红利 / 191
 - 5.5.2 连续支付且红利率为常数 / 192
 - 5.5.3 一次结付的红利 / 193

- 5.5.4 一次结付且红利率为常数 / 194
- 5.6 远期和期货 / 195
 - 5.6.1 远期合约 / 195
 - 5.6.2 期货合约 / 196
 - 5.6.3 远期—期货价差 / 200
- 5.7 本章小结 / 201
- 5.8 评注 / 203
- 5.9 习题 / 204

6 与偏微分方程的关系 / 213

- 6.1 引言 / 213
- 6.2 随机微分方程 / 213
- 6.3 马尔可夫性质 / 215
- 6.4 偏微分方程 / 216
- 6.5 利率模型 / 220
- 6.6 多维费曼—卡茨定理 / 224
- 6.7 本章小结 / 227
- 6.8 评注 / 228
- 6.9 习题 / 228

7 奇异期权 / 239

- 7.1 引言 / 239
- 7.2 带漂移布朗运动的最大值 / 239
- 7.3 敲出障碍期权 / 243
 - 7.3.1 向上敲出看涨期权 / 243
 - 7.3.2 布莱克—斯科尔斯—默顿方程 / 244
 - 7.3.3 向上敲出看涨期权价格的计算 / 247
- 7.4 回望期权 / 250
 - 7.4.1 浮动敲定价格的回望期权 / 250
 - 7.4.2 布莱克—斯科尔斯—默顿方程 / 251
 - 7.4.3 降维 / 253
 - 7.4.4 回望期权价格的计算 / 255
- 7.5 亚式期权 / 260
 - 7.5.1 固定敲定价格的亚式期权 / 260
 - 7.5.2 状态的扩充 / 261
 - 7.5.3 计价单位变换 / 263

- 7.6 本章小结 / 269
- 7.7 评注 / 269
- 7.8 习题 / 270

8 美式衍生证券 / 276

- 8.1 引言 / 276
- 8.2 停时 / 277
- 8.3 永久美式看跌期权 / 280
 - 8.3.1 随意行权的价格 / 281
 - 8.3.2 最优行权的价格 / 284
 - 8.3.3 看跌期权价格的解析特征 / 286
 - 8.3.4 看跌期权价格的概率特征 / 287
- 8.4 有限到期的美式看跌期权 / 290
 - 8.4.1 看跌期权价格的解析特征 / 291
 - 8.4.2 看跌期权价格的概率特征 / 292
- 8.5 美式看涨期权 / 294
 - 8.5.1 原生资产不支付红利 / 294
 - 8.5.2 原生资产支付红利 / 296
- 8.6 本章小结 / 300
- 8.7 评注 / 300
- 8.8 习题 / 301

9 计价单位变换 / 305

- 9.1 引言 / 305
- 9.2 计价单位 / 306
- 9.3 外国和本国风险中性测度 / 310
 - 9.3.1 基本过程 / 310
 - 9.3.2 本国风险中性测度 / 311
 - 9.3.3 外国风险中性测度 / 313
 - 9.3.4 西格尔汇率悖论 / 315
 - 9.3.5 远期汇率 / 316
 - 9.3.6 加曼—柯尔哈根公式 / 317
 - 9.3.7 汇率看跌—看涨对偶性 / 318
- 9.4 远期测度 / 319
 - 9.4.1 远期价格 / 319
 - 9.4.2 零息债券作为计价单位 / 320

- 9.4.3 随机利率下的期权定价 / 321
- 9.5 本章小结 / 324
- 9.6 评注 / 324
- 9.7 习题 / 324

10 期限结构模型 / 329

- 10.1 引言 / 329
- 10.2 仿射收益率模型 / 330
 - 10.2.1 两因子韦萨切克模型 / 331
 - 10.2.2 两因子 CIR 模型 / 344
 - 10.2.3 混合模型 / 346
- 10.3 赫斯—加罗—墨顿模型 / 346
 - 10.3.1 远期利率 / 347
 - 10.3.2 远期利率和债券价格的动态方程 / 348
 - 10.3.3 无套利条件 / 349
 - 10.3.4 风险中性测度下的 HJM 模型 / 351
 - 10.3.5 与仿射收益率模型的关系 / 352
 - 10.3.6 HJM 模型的实现方法 / 354
- 10.4 远期 LIBOR 模型 / 357
 - 10.4.1 远期利率产生的问题 / 357
 - 10.4.2 LIBOR 和远期 LIBOR / 358
 - 10.4.3 后置 LIBOR 合约的定价 / 358
 - 10.4.4 布莱克上限单元公式 / 359
 - 10.4.5 远期 LIBOR 和零息债券波动率 / 361
 - 10.4.6 远期 LIBOR 期限结构模型 / 362
- 10.5 本章小结 / 366
- 10.6 评注 / 369
- 10.7 习题 / 370

11 跳过程引论 / 378

- 11.1 引言 / 378
- 11.2 泊松过程 / 378
 - 11.2.1 指数随机变量 / 379
 - 11.2.2 泊松过程的构造 / 379
 - 11.2.3 泊松过程增量的分布 / 380
 - 11.2.4 泊松过程增量的均值和方差 / 382

11.2.5	鞅性质	/ 383
11.3	复合泊松过程	/ 384
11.3.1	复合泊松过程的构造	/ 384
11.3.2	矩母函数	/ 385
11.4	跳过程及其积分	/ 387
11.4.1	跳过程	/ 388
11.4.2	二次变差	/ 392
11.5	跳过程的随机分析	/ 396
11.5.1	关于单个跳过程的伊藤—德布林公式	/ 396
11.5.2	关于多个跳过程的伊藤—德布林公式	/ 400
11.6	测度变换	/ 403
11.6.1	关于泊松过程的测度变换	/ 404
11.6.2	关于复合泊松过程的测度变换	/ 406
11.6.3	关于复合泊松过程和布朗运动的测度变换	/ 411
11.7	跳模型的欧式看涨期权定价	/ 414
11.7.1	资产服从泊松过程	/ 414
11.7.2	资产服从布朗运动和复合泊松过程	/ 419
11.8	本章小结	/ 428
11.9	评注	/ 430
11.10	习题	/ 430

附录 A 概率论中的进一步论题 / 432

A.1	可数可加性	/ 432
A.2	生成 σ -代数	/ 434
A.3	既无密度函数又无概率质量函数的随机变量	/ 435

附录 B 条件期望的存在性 / 437

附录 C 资产定价第二基本定理证明的补全 / 439

参考文献 / 440

译后记 / 448

1.1 无限概率空间

无限概率空间被用于随机试验存在无穷多个可能结果这种情形的建模。为了下文需要,我们考虑两个这样的随机试验:

- (i) 在单位区间 $[0, 1]$ 中随机选择一个数;
- (ii) 连续抛掷硬币无穷多次。

对每一情形,我们需要一个所有可能结果的样本空间。情形(i)的样本空间可以简单地取单位区间 $[0, 1]$ 。作为随机试验的可能结果, $[0, 1]$ 中一般的元素将被记为 ω ,而不像通常那样记作 x 。

对于情形(ii),我们定义:

$$\Omega_{\infty} = \{H \text{ 和 } T \text{ 的无穷序列}\} \quad (1.1.1)$$

Ω_{∞} 中的一般元素将被记为 $\omega = \omega_1 \omega_2 \cdots$,其中 ω_n 表示第 n 次抛掷硬币的结果。

上述两个样本空间不仅是无限的,而且还是不可数无限的(即其中的元素不能被排成序列)。对于不可数无限样本空间,我们首先面临这样的问题:在大多数感兴趣的随机试验中,任何一个特定的结果出现的概率均为0。于是我们不能如同第一卷中的式(2.1.5)那样通过对样本空间子集 A (所谓事件)的所有元素的概率求和来确定 A 的概率。我们必须直接定义事件的概率。尽管对于需要建模的随机试验我们可能有足够的了解,但仍有可能会存在一些很复杂的事件,给出其概率并非易事。我们并不试图对不可数无限样本空间的每一事件给出确定其概率的公式,这一般是不太可能的。我们将先对某些简单的事件给出其概率,再利用概率测度的性质,确定较复杂事件的概率。在给出如下定义之后,我们将描述在 $[0, 1]$ 上建立均匀概率测度的过程。

定义 1.1.1 设 Ω 为非空集合, $\mathcal{F}$ 为 Ω 的子集族。称 $\mathcal{F}$ 是一个 σ -代数(也称 σ -域),如果:

- (i) 空集 ϕ 属于 $\mathcal{F}$;
- (ii) 只要 A 属于 $\mathcal{F}$,则余集 A^c 也属于 $\mathcal{F}$;
- (iii) 只要一系列集合 $A_1, A_2, \cdots$ 属于 $\mathcal{F}$,则并集 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 也属于 $\mathcal{F}$ 。

如果我们有一个 σ -代数,则对其中的集合进行任何运算,其结果仍然在该 σ -代数中。如果 A 和 B 是 σ -代数中的两个集合,则通过考虑序列 $A, B, \phi, \phi, \phi, \dots$,我们由(i)和(iii)可推得 $A \cup B$ 必定也在 σ -代数中。同样可以证明:如果 $A_1, A_2, \dots, A_N$ 是 σ -代数中的有限多个集合,则它们的并集必定也在 σ -代数中。最后,设 $A_1, A_2, \dots$ 是 σ -代数中的一列集合,因为:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c$$

将性质(ii)和(iii)运用于上式右端,可知 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 必定也在 σ -代数中。同理, σ -代数中有限多个集合的交集仍在 σ -代数中。当然,如果 $\mathcal{F}$ 是一个 σ -代数,则全空间 Ω 必为 $\mathcal{F}$ 中的一个集合,因为 $\Omega = \phi^c$ 。

定义 1.1.2 设 Ω 为非空集合, $\mathcal{F}$ 为 Ω 子集的一个 σ -代数。概率测度 $\mathbb{P}$ 是 $\mathcal{F}$ 上的一个函数,它为每个集合 $A \in \mathcal{F}$ 指定了 $[0, 1]$ 中的一个数 $\mathbb{P}(A)$,称为 A 的概率。我们要求:

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(ii) (可数可加性) 设 $A_1, A_2, \dots$ 是 $\mathcal{F}$ 中的一列互不相交的集合,则

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \quad (1.1.2)$$

三元组 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 称为一个概率空间。

如果 Ω 为有限集合, $\mathcal{F}$ 为 Ω 所有子集的族,则 $\mathcal{F}$ 是一个 σ -代数,而定义 1.1.2 则归结为第一卷中的定义 2.1.1。在无限概率空间的情形,定义 1.1.2 的可数可加性条件(ii)保证了以上给出的概率测度的定义与我们的直觉是一致的。例如,我们希望确认 $\mathbb{P}(\phi) = 0$,这可通过在式(1.1.2)中取

$$A_1 = A_2 = A_3 = \dots = \phi$$

得到,这时式(1.1.2)中的等式成为 $\mathbb{P}(\phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\phi)$,在 $[0, 1]$ 中, $\mathbb{P}(\phi)$ 唯一能取的值就是:

$$\mathbb{P}(\phi) = 0 \quad (1.1.3)$$

我们还希望第一卷中的式(2.1.7)成立:如果 A 和 B 是 $\mathcal{F}$ 中不相交的两个集合,我们希望有:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \quad (1.1.4)$$

定义 1.1.2 的条件(ii)不仅保证了这一点,而且还保证了有限可加性条件,即如果 $A_1, A_2, \dots, A_N$ 是 $\mathcal{F}$ 中有限多个互不相交的集合,则:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N \mathbb{P}(A_n) \quad (1.1.5)$$

为了说明这一点,可在式(1.1.2)中取

$$A_{N+1} = A_{N+2} = A_{N+3} = \dots = \phi$$

在 $N=2$ 的情形, $A_1=A, A_2=B$, 我们就得到式(1.1.4)。在式(1.1.4)中令 $B=A^c$ 并利用定义 1.1.2 的条件(i), 我们得到:

$$P(A^c)=1-P(A) \quad (1.1.6)$$

综上所述, 由定义 1.1.2 可知, 任一概率测度必须满足式(1.1.3)~式(1.1.6)。

我们将通过例子来描述在不可数样本空间上建立概率测度的过程。考虑这一节刚开始给出的两个空间 $[0,1]$ 和 Ω_∞ 。

例 1.1.3([0,1]上的均匀(勒贝格)测度) 我们将建立一个数学模型, 使得在单位区间 $[0,1]$ 上随机选数的概率均匀地分布在整个区间 $[0,1]$ 上。首先, 由下式定义闭区间 $[a,b]$ 的概率为:

$$P[a,b]=b-a, \quad 0 \leq a \leq b \leq 1 \quad (1.1.7)$$

(即被选取的数位于 a 和 b 之间的概率为 $b-a$)。($[0,1]$ 上如此定义的概率测度称为**勒贝格测度**, 本书中有时记为 $\mathcal{L}$ 。 $\mathbb{R}$ 中子集的勒贝格测度是它的“长度”。) 如果 $b=a$, 则 $[a,b]$ 仅包含一个数 a , 式(1.1.7)表明这一集合的测度为 0 (即我们选取的数恰好等于 a 的概率为 0)。由于单点集的概率为 0, 开区间 (a,b) 的概率与闭区间 $[a,b]$ 的概率相同, 我们有:

$$P(a,b)=b-a, \quad 0 \leq a \leq b \leq 1 \quad (1.1.8)$$

$[0,1]$ 中还有许多子集的概率可利用式(1.1.7)以及概率测度的性质来确定。例如, 集合 $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ 并非区间, 然而我们由式(1.1.7)以及式(1.1.4)可知其概率为 $\frac{2}{3}$ 。

人们自然要问, 是否存在某种方式, 能够刻划其概率可由式(1.1.7)以及概率测度的性质来确定的集合的全体? 结论是: 这些集合的全体必为由闭区间出发而生成的 σ -代数。由于开区间可被表示为一列闭区间的并集:

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right]$$

故这一 σ -代数包括所有开区间。它也必定包括上一段提到的集合 $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ 以及其他许多集合。

由全体闭区间出发而生成的 σ -代数称为 $[0,1]$ 的子集的**博雷尔(Borel) σ -代数**, 记为 $\mathcal{B}[0,1]$ 。这一 σ -代数中的集合称为**博雷尔集**。这些集合都是 $[0,1]$ 的子集(所谓**事件**), 一旦我们指定了闭区间的概率, 这些集合的概率就能被确定。本书中我们遇到的 $[0,1]$ 的子集都是博雷尔集, 它们都能被表示为一列闭区间的并、交和余集。^[1] □

例 1.1.4(无穷次独立抛掷硬币的空间) 假设连续抛掷硬币无穷多次, 式

[1] 参见附录 A 1.1 中康托(Cantor)集的构造, 可以了解 $\mathcal{B}[0,1]$ 中的集合能有多么复杂。

(1.1.1)中的 Ω_∞ 表示所有可能结果的集合。假定每次抛掷硬币出现正面的概率为 $p>0$,出现背面的概率 $q=1-p>0$,并且各次抛掷都是互相独立的(下一章中将确切定义这一概念)。我们将建立相应于这一随机试验的概率测度。

首先,定义 $\mathbb{P}(\phi)=0$ 以及 $\mathbb{P}(\Omega)=1$ 。这 $2^{(2^0)}=2$ 个集合形成一个 σ -代数,我们称之为 $\mathcal{F}_0$:

$$\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\} \quad (1.1.9)$$

然后,对于以下两个集合:

$$A_H = \{\text{以 } H \text{ 开始的序列}\} = \{\omega; \omega_1 = H\}$$

$$A_T = \{\text{以 } T \text{ 开始的序列}\} = \{\omega; \omega_1 = T\}$$

定义 $\mathbb{P}(A_H)=p, \mathbb{P}(A_T)=q$ 。我们已经对 $2^{(2^1)}=4$ 个集合定义了 $\mathbb{P}$,并且这四个集合形成一个 σ -代数(由于 $A_H^c=A_T$,我们不需要再添加任何子集),称之为 $\mathcal{F}_1$:

$$\mathcal{F}_1 = \{\phi, \Omega, A_H, A_T\} \quad (1.1.10)$$

再对于以下四个集合:

$$A_{HH} = \{\text{以 } HH \text{ 开始的序列}\} = \{\omega; \omega_1 = H, \omega_2 = H\}$$

$$A_{HT} = \{\text{以 } HT \text{ 开始的序列}\} = \{\omega; \omega_1 = H, \omega_2 = T\}$$

$$A_{TH} = \{\text{以 } TH \text{ 开始的序列}\} = \{\omega; \omega_1 = T, \omega_2 = H\}$$

$$A_{TT} = \{\text{以 } TT \text{ 开始的序列}\} = \{\omega; \omega_1 = T, \omega_2 = T\}$$

定义:

$$\mathbb{P}(A_{HH})=p^2, \quad \mathbb{P}(A_{HT})=pq, \quad \mathbb{P}(A_{TH})=pq, \quad \mathbb{P}(A_{TT})=q^2 \quad (1.1.11)$$

由于式(1.1.6),余集 $A_{HH}^c, A_{HT}^c, A_{TH}^c, A_{TT}^c$ 的概率也可以确定。利用式(1.1.5),可以确定并集 $A_{HH} \cup A_{TH}, A_{HH} \cup A_{TT}, A_{HT} \cup A_{TH}, A_{HT} \cup A_{TT}$ 的概率。另两对并集 $A_{HH} \cup A_{HT}=A_H$ 和 $A_{TH} \cup A_{TT}=A_T$ 的概率也已经确定。注意到三个集合的并集的概率事实上已经确定,因为它们都是式(1.1.11)中的集合的余集,例如:

$$A_{HH} \cup A_{HT} \cup A_{TH} = A_H^c$$

至此,我们已经确定了 $2^{(2^2)}=16$ 个集合的概率,并且这些集合形成一个 σ -代数,称之为 $\mathcal{F}_2$:

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ \phi, \Omega, A_H, A_T, A_{HH}, A_{HT}, A_{TH}, A_{TT}, A_{HH}^c, A_{HT}^c, A_{TH}^c, A_{TT}^c, \right. \\ \left. A_{HH} \cup A_{TH}, A_{HH} \cup A_{TT}, A_{HT} \cup A_{TH}, A_{HT} \cup A_{TT} \right\} \quad (1.1.12)$$

我们然后对能由前三次抛掷硬币的结果描述的每一个集合定义概率 $\mathbb{P}$,这些集合共有 $2^{(2^3)}=256$ 个,形成一个 σ -代数,称之为 $\mathcal{F}_3$ 。

继续这个过程,我们可以对所有能由有限多次抛掷硬币的结果描述的集合定义概率 $\mathbb{P}$ 。在所有这些集合的概率被指定以后,仍有其他一些集合,无法通过有限多次抛掷硬币的结果来描述。例如,仅含单个序列 $HHHH\cdots$ 的集合就无法通过有限多次抛掷硬币的结果来描述,但它是 A_H, A_{HH}, A_{HHH} 等集合的子集。注意到:

$$\mathbb{P}(A_H) = p, \quad \mathbb{P}(A_{HH}) = p^2, \quad \mathbb{P}(A_{HHH}) = p^3, \quad \dots$$

由于这些概率收敛于 0, 我们必有:

$$\mathbb{P}(\text{每次抛掷硬币结果均为正面}) = 0$$

类似地, 仅含单个序列 $HTHTHT\cdots$ 的集合, 它是 A_H, A_{HT}, A_{HTH} 等集合的交集, 其概率小于或等于以下每一个集合的概率:

$$\mathbb{P}(A_H) = p, \quad \mathbb{P}(A_{HT}) = pq, \quad \mathbb{P}(A_{HTH}) = p^2q, \quad \dots$$

从而其概率为 0。同样的论证表明: Ω_∞ 中任何单个序列的概率为 0。

由所有能通过有限多次抛掷硬币的结果描述的集合出发而生成的 σ -代数, 称为 $\mathcal{F}_\infty$ 。一旦指定了每一个能通过有限多次抛掷硬币的结果描述的集合的概率, $\mathcal{F}_\infty$ 中任何集合的概率都可以确定。存在 $\mathcal{F}_\infty$ 中的集合, 其概率虽然确定, 但很难算得。例如, 考虑满足以下条件的硬币抛掷结果序列 $\omega = \omega_1\omega_2\cdots$ 的集合 A :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n(\omega_1 \cdots \omega_n)}{n} = \frac{1}{2} \quad (1.1.13)$$

其中 $H_n(\omega_1 \cdots \omega_n)$ 表示前 n 次抛掷硬币出现 H 的次数。换言之, A 是这样的抛掷结果序列的集合, 其出现正面的平均数随着 n 的增大趋近于 $\frac{1}{2}$ 。由于这一描述涉及所有的硬币抛掷, 无法由上述过程中的任何一步直接定义。另一方面, 它在 $\mathcal{F}_\infty$ 中, 其概率总能由上述过程以及概率测度的性质确定。为了说明 A 在 $\mathcal{F}_\infty$ 中, 我们取定正整数 m 和 n , 并定义集合为:

$$S_{n,m} = \left\{ \omega; \left| \frac{H_n(\omega_1 \cdots \omega_n)}{n} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{m} \right\}$$

这一集合在 $\mathcal{F}_n$ 中, 一旦 n 和 m 已知, 其概率能由上述过程确定。根据极限的定义, 硬币抛掷结果序列 $\omega = \omega_1\omega_2\cdots$ 满足式 (1.1.13) 当且仅当对任一正整数 m , 存在正整数 N , 对所有 $n \geq N$, 都有 $\omega \in S_{n,m}$ 。换言之, 使得式 (1.1.13) 成立的 ω 的集合可以表示为:

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{N=n}^{\infty} S_{n,m}$$

由于 A 是 $\mathcal{F}_\infty$ 中集合列的并集和交集, 故 A 在 $\mathcal{F}_\infty$ 中。这就告诉我们 $\mathbb{P}(A)$ 总是确定的, 尽管并未直接告诉我们如何计算 $\mathbb{P}(A)$ 。事实上, 由强大数定律可知: $p = \frac{1}{2}$

时 $\mathbb{P}(A) = 1$; $p \neq \frac{1}{2}$ 时 $\mathbb{P}(A) = 0$ 。

本书中我们将遇到的 Ω_∞ 中的子集都在 $\mathcal{F}_\infty$ 中。事实上, 试图给出不在 $\mathcal{F}_\infty$ 中的集合是极为困难的, 虽然这样的集合存在。□

例 1.1.4 中关于任何单个序列都具有零概率的结论导致不可数概率空间中的一个悖论。我们总是称概率为 0 的事件不可能发生。尤其是, 如果我们连续抛掷硬币无穷多次, 不可能每次都出现正面 (这里, 我们假定每次抛掷硬币出现正面的

概率为 $p > 0$, 出现背面的概率 $q = 1 - p > 0$)。人们通常认为概率为 0 的事件肯定不会发生, 而概率为 1 的事件肯定会发生。尤其是, 我们总是肯定至少会出现一次背面。然而, 全为正面的序列存在于我们的样本空间中, 而且其发生的可能性并不比其他任何序列更小(任何单个序列都具有零概率), 于是数学家发明了一个含糊其词的术语。我们称至少会出现一次背面是几乎必然的。我们称一个事件几乎必然, 是指它具有概率 1, 尽管也许并不包括所有可能的结果。不在其内的结果的全体具有零概率。

定义 1.1.5 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间。如果集合 $A \in \mathcal{F}$ 满足 $\mathbb{P}(A) = 1$, 则我们称事件 A 几乎必然发生。

1.2 随机变量和分布

定义 1.2.1 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个概率空间。随机变量 X 是定义在 Ω 上满足以下性质的实值函数: 对于 $\mathbb{R}$ 的任何博雷尔子集 B , 下列 Ω 的子集

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\} \quad (1.2.1)$$

都在 σ -代数 $\mathcal{F}$ 中(有时候, 我们也允许随机变量取值为 $+\infty$ 和 $-\infty$)。

为了得到 $\mathbb{R}$ 中的博雷尔子集, 我们从闭区间 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 出发生成一个 σ -代数。尤其是, 每一个开区间都是博雷尔集, 因为开区间可以被写成一系列闭区间的并集。从而, 每一个开集(不论是否区间)都是博雷尔集, 因为每一个开集都是一列开区间的并集。每一个闭集都是博雷尔集, 因为闭集是开集的余集。我们将 $\mathbb{R}$ 中的博雷尔子集的全体记为 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 并称之为 $\mathbb{R}$ 的博雷尔 σ -代数。本书中, 我们遇到的每个 $\mathbb{R}$ 的子集都在这个 σ -代数中。

随机变量 X 是一个数值的量, 其值由选取 $\omega \in \Omega$ 的随机试验确定。我们将对 X 取不同值的概率感兴趣。在很多情形下, X 取特定值的概率是 0, 因此, 我们将主要考虑 X 取值在某一集合上的概率, 而不是 X 取某一特定值的概率。换言之, 我们需要考虑 $\mathbb{P}\{X \in B\}$ 。定义 1.2.1 要求对所有 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\{X \in B\}$ 在 $\mathcal{F}$ 中, 从而保证了该集合的概率有定义。

例 1.2.2(股票价格) 回顾例 1.1.4 中关于无穷次独立抛掷硬币结果的空间 $(\Omega_\infty, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ 。由以下公式定义股票价格:

$$\begin{aligned} S_0(\omega) &= 4, \quad \forall \omega \in \Omega_\infty \\ S_1(\omega) &= \begin{cases} 8, & \text{如果 } \omega_1 = H \\ 2, & \text{如果 } \omega_1 = T \end{cases} \\ S_2(\omega) &= \begin{cases} 16, & \text{如果 } \omega_1 = \omega_2 = H \\ 4, & \text{如果 } \omega_1 \neq \omega_2 \\ 1, & \text{如果 } \omega_1 = \omega_2 = T \end{cases} \end{aligned}$$

一般地

$$S_{n+1}(\omega) = \begin{cases} 2S_n(\omega), & \text{如果 } \omega_{n+1} = H \\ \frac{1}{2}S_n(\omega), & \text{如果 } \omega_{n+1} = T \end{cases}$$