

EXAMINATION QUESTIONS AND ANSWERS
OF AMERICAN MIDDLE SCHOOL STUDENTS
MATHEMATICAL CONTEST FROM THE
FIRST TO THE LATEST (VOLUME III)



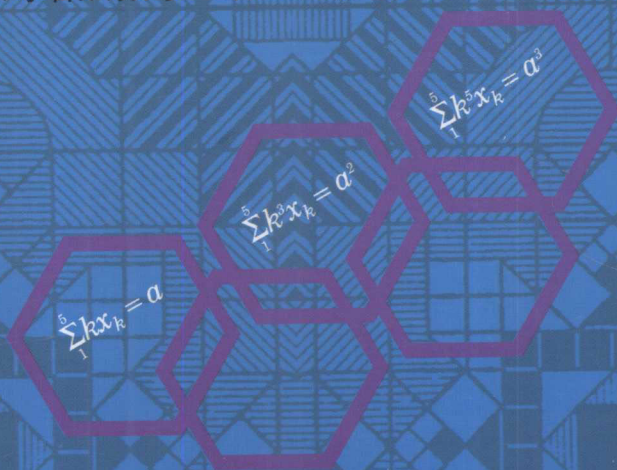
历届美国中学生

数学竞赛试题及解答

第3卷 兼谈布查特-莫斯特定理

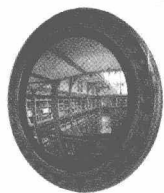
1960~1964

刘培杰数学工作室 编



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

EXAMINATION QUESTIONS AND ANSWERS
OF AMERICAN MIDDLE SCHOOL STUDENTS
MATHEMATICAL CONTEST FROM THE
FIRST TO THE LATEST (VOLUME III)



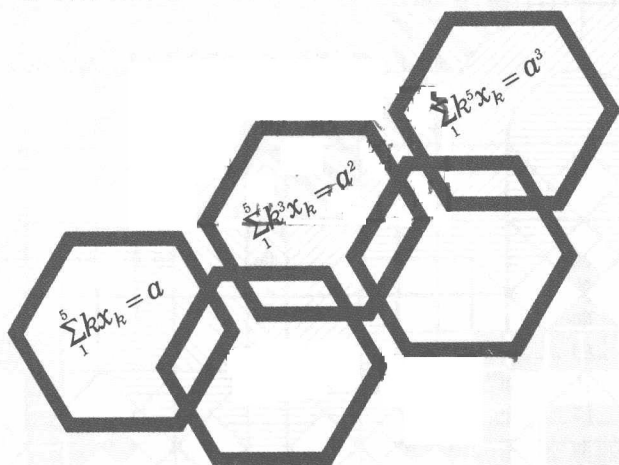
历届美国中学生

数学竞赛试题及解答

第3卷 兼谈布查特-莫斯特定理

1960 ~ 1964

刘培杰数学工作室 编



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

美国中学生数学竞赛是全国性的智力竞技活动由大学教授出题,题目具有深厚背景,蕴涵丰富的数学思想,这些题目有益于中学生掌握数学思维,提高辨识数学思维模式的能力.本书面向高中师生,整理了1960~1964年美国历届中学生数学竞赛试题,并给出了巧妙的解答.

本书适合于中学生、中学教师及数学竞赛爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

历届美国中学生数学竞赛试题及解答.第3卷,兼谈布查特-莫斯特定理1960~1964/刘培杰数学工作室编.——哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.6

ISBN 978-7-5603-4549-9

I. ①历… II. ①刘… III. ①中学数学课-题解
IV. ①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第309927号

策划编辑	刘培杰 张永芹
责任编辑	张永芹 钱辰琛 邵长玲
封面设计	孙茵艾
出版发行	哈尔滨工业大学出版社
社 址	哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真	0451-86414749
网 址	http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷	哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本	787mm×960mm 1/16 印张10.25 字数112千字
版 次	2014年6月第1版 2014年6月第1次印刷
书 号	ISBN 978-7-5603-4549-9
定 价	18.00元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎
目
录

第1章 1960年试题 //1

- 1 第一部分 //1
- 2 第二部分 //5
- 3 第三部分 //7
- 4 答案 //10
- 5 1960年试题解答 //11

第2章 1961年试题 //21

- 1 第一部分 //21
- 2 第二部分 //25
- 3 第三部分 //27
- 4 答案 //29
- 5 1961年试题解答 //30

第3章 1962年试题 //42

- 1 第一部分 //42
- 2 第二部分 //46
- 3 第三部分 //48
- 4 答案 //51
- 5 1962年试题解答 //51

第4章 1963年试题 //66

- 1 第一部分 //66
- 2 第二部分 //70
- 3 第三部分 //73
- 4 答案 //76
- 5 1963年试题解答 //77

第5章 1964年试题 //98

- 1 第一部分 //98
- 2 第二部分 //102
- 3 第三部分 //104
- 4 答案 //107
- 5 1964年试题解答 //108

附录 布查特-莫斯特定理—2011年北大自主招生 压轴题的推广 //124

- 0 引言 //124
- 1 题目的解答 //125
- 2 Chester Mc Mast 问题 //128
- 3 J. H. Butchart, Leo Moser 问题 //129
- 4 几个特例 //130
- 5 定理1的推广 //132
- 6 一个类似的问题 //136
- 7 Butchart - Moser 定理与数学奥林匹克 //139
- 8 一个集训队试题 //145
- 9 结束语 148 //

1960 年试题

第 1 章

1 第一部分

1. 若 2 是 $x^3 + hx + 10 = 0$ 的一个根 (解), 则 h 等于().
(A) 10 (B) 9 (C) 2
(D) -2 (E) -9
2. 一时钟在六点整时, 敲打 6 下, 需时 5 s, 若每一次敲打分开时间均等, 敲打 12 下时需要的秒数为().
(A) $9\frac{1}{5}$ (B) 10 (C) 11
(D) $14\frac{2}{5}$ (E) 非上述的答案
3. 使用 \$10 000 的金额, 减少 40% 的折扣与减少 36% 和 4% 的折扣间的差额为().
(A) \$0 (B) \$144 (C) \$256
(D) \$400 (E) \$416

4. 一三角形的二角各为 60° , 所夹之边为 4 cm, 则此三角形的面积平方厘米数为().
(A) $8\sqrt{3}$ (B) 8 (C) $4\sqrt{3}$ (D) 4
(E) $2\sqrt{3}$
5. $x^2 + y^2 = 9$ 与 $y^2 = 9$ 的图形间公有的相异点, 共有().
(A) 无穷多点 (B) 四点
(C) 二点 (D) 一点
(E) 无
6. 一圆的周长为 100 cm, 此圆的内接正方形的边长用 cm 表示, 应为().
(A) $\frac{25\sqrt{2}}{\pi}$ (B) $\frac{50\sqrt{2}}{\pi}$
(C) $\frac{100}{\pi}$ (D) $\frac{100\sqrt{2}}{\pi}$
(E) $50\sqrt{2}$
7. 圆 I 过圆 II 之中心并相切, 圆 I 的面积为 4 cm^2 , 则圆 II 的面积用 cm^2 表示, 应为().
(A) 8 (B) $8\sqrt{2}$ (C) $8\sqrt{\pi}$ (D) 16
(E) $16\sqrt{2}$
8. 数 2.525 252 5... 能写成一分数, 当化简至最低项时此分数的分子与分母的和为().
(A) 7 (B) 29 (C) 141 (D) 349
(E) 非上述的答案
9. 分式 $\frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 + c^2 - b^2 + 2ac}$ 为(). (对于 a, b 与 c 的值作适当的限制时)

- (A) 不可约
- (B) 可约至 -1
- (C) 可约至具三项的一多项式
- (D) 可约至 $\frac{a-b+c}{a+b-c}$
- (E) 可约至 $\frac{a+b-c}{a-b+c}$

10. 已知下列六个命题:

- (1) 所有女人都是善于驾驶的
 - (2) 某些女人是善于驾驶的
 - (3) 没有男人是善于驾驶的
 - (4) 所有男人都是不善于驾驶的
 - (5) 至少一男人是不善于驾驶的
 - (6) 所有男人都是善于驾驶的
- 叙述(6)的对命题为().

- (A) (1) (B) (2) (C) (3) (D) (4)
- (E) (5)

11. 对于已知值 k , 方程 $x^2 - 3kx + 2k^2 - 1 = 0$ 的根的乘积是 7, 则诸根的特性呈现().

- (A) 整数性且正的
- (B) 整数性与负的
- (C) 有理的, 但不具有整数性
- (D) 无理的
- (E) 虚的

12. 半径为 a 的所有圆经过一定点, 且在同一平面上, 则此等圆之圆心的轨迹为().

- (A) 一点 (B) 一直线 (C) 两直线 (D) 一圆
- (E) 两圆

13. 由 $y = 3x + 2$, $y = -3x + 2$ 与 $y = -2$ 形成的多边形是().

- (A) 一等边三角形 (B) 一等腰三角形

- (C)一直角三角形 (D)一三角形及一梯形
(E)一四边形
14. 若 a 与 b 是实数, 方程 $3x - 5 + a = bx + 1$ 有唯一解 x ().
(A) 对于所有 a 与 b (B) 若 $a \neq 2b$
(C) 若 $a \neq 6$ (D) 若 $b \neq 0$
(E) 若 $b \neq 3$
15. 甲三角形为等边, 边长为 A , 周长为 P , 面积为 K , 外接圆半径为 R ; 乙三角形亦为等边, 边长为 a , 周长为 p , 面积为 k , 外接圆半径为 r . 若 A 异于 a , 则().
(A) $P:p = R:r$ 仅有时成立
(B) $P:p = R:r$ 常成立
(C) $P:p = K:k$ 仅有时成立
(D) $R:r = K:k$ 常成立
(E) $R:r = K:k$ 仅有时成立
16. 在以 5 为底的计数系中, 如计成: 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, $\dots$, 在 10 进制的计数系中的数 69 当以底 5 的计数系中时的数为().
(A) 两连续数字 (B) 两不连续数字
(C) 三连续数字 (D) 三不连续数字
(E) 四数字
17. 公式 $N = 8 \cdot 10^8 \cdot x^{-\frac{3}{2}}$ 表某固定团体中收入超过 x 元的人数. 最富的 800 人最低收入至少为().
(A) 10^4 (B) 10^6 (C) 10^8 (D) 10^{12}
(E) 10^{16}
18. 一组方程 $3^{x+y} = 81$, 与 $81^{x-y} = 3$, 有().
(A) 无公解 (B) 解 $x = 2, y = 2$
(C) 解 $x = 2 \frac{1}{2}, y = 1 \frac{1}{2}$ (D) 正与负整数的公解
(E) 非上述的答案

19. 设想方程 I : $x + y + z = 46$, 其中 x, y 与 z 均为正整数; 方程 II : $x + y + z + w = 46$, 其中 x, y, z 与 w 是正整数; 则().
- (A) I 可解成相连的整数
(B) I 可解成相连的偶数
(C) II 可解成相连的整数
(D) II 可解成相连的偶数
(E) II 可解成相连的奇数
20. 在 $(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x})^8$ 的展开式中 x^7 的系数为().
- (A) 56 (B) -56 (C) 14 (D) -14
(E) 0

2 第二部分

21. 已知正方形 I 的对角线长为 $a + b$, 且正方形 II 的面积为正方形 I 的面积的 2 倍, 则正方形 II 的周长为().
- (A) $(a + b)^2$ (B) $\sqrt{2}(a + b)^2$
(C) $2(a + b)$ (D) $\sqrt{8}(a + b)$
(E) $4(a + b)$
22. 若 $x = am + bn$ 满足方程 $(x + m)^2 - (x + n)^2 = (m - n)^2$, 其中 m 与 n 为不相等且不为零的定数, 那么().
- (A) $a = 0, b$ 有非零的唯一值
(B) $a = 0, b$ 有两非零的值
(C) $b = 0, a$ 有非零的唯一值

- (D) $b=0$, a 有两非零的值
(E) a 与 b 各有非零的唯一值
23. 一圆柱盒的半径为 8 cm, 高为 3 cm, 体积 $V = \pi R^2 H$, 当 R 增加 x cm 及 H 增加 x cm 时, 体积均增加同一固定正量, 那么满足此情况的().
(A) x 无实数值 (B) x 是一整数
(C) x 是有理数但非整数
(D) x 是一无理数 (E) x 是两实数值
24. 若 $\log_{2x} 216 = x$, 其中 x 是实数, 那么 x 是().
(A) 一非平方, 非立方的整数
(B) 一非平方, 非立方, 非整数的有理数
(C) 一无理数
(D) 一完全平方
(E) 一完全立方
25. 设 m 与 n 为任意两奇数, 且 n 小于 m . 能除尽 $m^2 - n^2$ 型的所有可能数的最大整数是().
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8
(E) 16
26. 求 $\left| \frac{5-x}{3} \right| < 2$ 的解集合().
(A) $1 < x < 11$ (B) $-1 < x < 11$
(C) $x < 11$ (D) $x > 11$ (E) $|x| < 6$
27. 设多边形 P 的角度量和为 S , 已知每一角度量为其同顶点外角的 $7\frac{1}{2}$ 倍, 则().
(A) $S = 2660^\circ$ 且 P 可能是正多边形
(B) $S = 2660^\circ$ 且 P 不是正多边形
(C) $S = 2700^\circ$ 且 P 是正多边形
(D) $S = 2700^\circ$ 且 P 不是正多边形

(E) $S = 2700^\circ$ 且 P 可能是正多边形亦可能不是正多边形

28. 方程 $x - \frac{7}{x-3} = 3 - \frac{7}{x-3}$ ().

- (A) 有无穷多整数根 (B) 无根
(C) 有一整数根 (D) 有两相等整数根
(E) 有两相等非整数根

29. 五倍甲的钱并加上乙的钱时多于 51 元, 三倍甲的钱并减去乙的钱是 21 元, 若 a 表甲的钱, b 表乙的钱, 均以元作单位, 则().

- (A) $a > 9, b > 6$ (B) $a > 9, b < 6$
(C) $a > 9, b = 6$
(D) $a > 9$, 但无法给 b 定界限
(E) $2a = 3b$

30. 已知直线 $3x + 5y = 15$, 及其上一点至坐标轴等距, 如此的一点存在于().

- (A) 无一个象限 (B) 只第 I 象限
(C) 只第 I, II 象限 (D) 只第 I, II, III 象限
(E) 每一象限

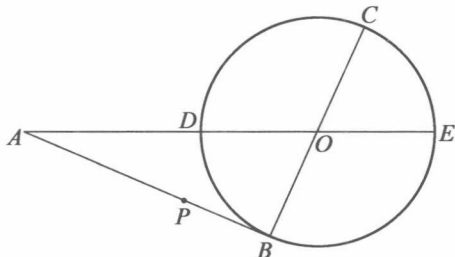
3 第三部分

31. 如 $x^2 + 2x + 5$ 是 $x^4 + px^2 + q$ 的一个因式, p 与 q 的值应各为().

- (A) $-2, 5$ (B) $5, 25$ (C) $10, 20$ (D) $6, 25$
(E) $14, 25$

32. 在图中圆的中心是 O , $AB \perp BC$, $ADOE$ 是一直线,

$AP = AD$, 且 AB 的长两倍于半径, 则().

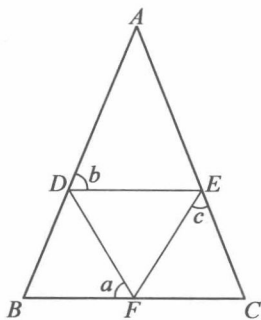


第 32 题图

- (A) $AP^2 = PB \cdot BA$ (B) $AP \cdot DO = PB \cdot AD$
 (C) $AB^2 = AD \cdot DE$ (D) $AB \cdot AD = OB \cdot AO$
 (E) 非上述的答案

33. 已知一序列有 58 项, 每项具有 $p + n$ 之型, 其中 p 代表小于或等于 61 的所有质数 $2, 3, 5, \dots, 61$ 的积, 而 n 依次取 $2, 3, 4, \dots, 59$ 之值, 设 N 为此序列出现质数的数目时, 则 N 为().
 (A) 0 (B) 16 (C) 17 (D) 57
 (E) 58
34. 两游泳爱好者在长 90 m 的游泳池对边上, 开始游, 一人以每秒 3 m, 另一人以每秒 2 m 之速率进行, 他们来回游 12 min, 若不计转方向时的时间, 求他们互相闪过的次数().
 (A) 24 (B) 21 (C) 20 (D) 19
 (E) 18
35. 自圆外一点 P 作切线其长为 t , 又自 P 引一割线分此圆成不等的两弧, 其长各为 m 与 n . 已知 t 是 m 与 n 的比例中项, 且圆周为 10 单位, 若 m 与 t 均为整数, 则 t 可有().

- (A)零解 (B)一解 (C)二解 (D)三解
(E)无限解
36. 设 S_1, S_2, S_3 各表示同一等差级数, 首项为 a , 公差为 d 的 $n, 2n, 3n$ 项的和.
设 $R = S_3 - S_2 - S_1$, 则 R 与下列何者有关().
(A) a 与 d (B) d 与 n (C) a 与 n (D) a, d 与 n
(E) 与 a, d, n 均无关
37. 三角形的底边长为 b , 高为 h , 一矩形高为 x 内接于三角形, 矩形的底在三角形的底上, 则矩形的面积为().
(A) $\frac{bx}{h}(h-x)$ (B) $\frac{hx}{b}(b-x)$
(C) $\frac{bx}{h}(h-2x)$ (D) $x(b-x)$
(E) $x(h-x)$
38. 如图, 等腰三角形 ABC , $AB = AC$, 内接一正三角形, 以 a 表 $\angle BFD$, b 表 $\angle ADE$, c 表 $\angle FEC$, 则().



第38题图

- (A) $b = \frac{a+c}{2}$ (B) $b = \frac{a-c}{2}$

$$(C) a = \frac{b-c}{2}$$

$$(D) a = \frac{b+c}{2}$$

(E) 非上述的答案

39. 欲满足方程 $\frac{a+b}{a} = \frac{b}{a+b}$, 则 a 与 b 必须().

(A) 同为有理数

(B) 同为实数但不是有理数

(C) 同时不为实数 (D) 一实, 一非实

(E) 一实, 一非实或同时不为实数

40. 已知直角三角形 ABC , 两股 $BC=3, AC=4$. 求三等分直角的平分线中较短者的长(自 C 至斜边)().

$$(A) \frac{32\sqrt{3}-24}{13}$$

$$(B) \frac{12\sqrt{3}-9}{13}$$

$$(C) 6\sqrt{3}-8$$

$$(D) \frac{5\sqrt{10}}{6}$$

$$(E) \frac{25}{12}$$

4 答 案

1. (E) 2. (C) 3. (B) 4. (C) 5. (C) 6. (B)
7. (D) 8. (D) 9. (E) 10. (E) 11. (D)
12. (D) 13. (B) 14. (E) 15. (B) 16. (C)
17. (A) 18. (E) 19. (C) 20. (D) 21. (E)
22. (A) 23. (C) 24. (A) 25. (D) 26. (B)
27. (E) 28. (B) 29. (A) 30. (C) 31. (D)
32. (A) 33. (A) 34. (C) 35. (C) 36. (B)
37. (A) 38. (D) 39. (E) 40. (A)

5 1960年试题解答

1. 由题意得

$$2^3 + h \cdot 2 + 10 = 0, h = -9$$

答案:(E).

2. 每敲打两下之间相隔时间为1 s. (因敲6下, 实际只有5个间隔, 刚好费时5 s) 故敲12下, 间隔为11, 故费时11 s.

答案:(C).

3. 由题意得

$$10\,000 \times (1 - 40\%) = 6\,000$$

$$10\,000 \times (1 - 36\%) \times (1 - 4\%) = 6\,144$$

可见差额是\$144.

答案:(B).

4. 是一边长4 cm的正三角形, 故面积为
- $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 =$

$$4\sqrt{3}.$$

答案:(C).

- 5.
- $y^2 = 9, x^2 + y^2 = 9$
- , 所以

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 3 \end{cases}$$

两点为(0, 3)与(0, -3).

答案:(C).

- 6.
- $100 = 2\pi r$
- , 所以
- $2r = \frac{100}{\pi}$
- , 设正方形之一边为
- s

$$s = \frac{24}{\sqrt{2}} = \frac{100}{\pi \sqrt{2}} = \frac{50\sqrt{2}}{\pi}$$

答案:(B).

7. 设圆 I 之半径为 r , 圆 II 之半径为 R , 则 $\pi r^2 = 4$, 但 $R = 2r$, 所以 $\pi R^2 = 4\pi r^2 = 16$.

答案:(D).

8. 设 $x = 2.525\ 252\ 5\cdots$, 则

$$100x = 252.525\ 25\cdots$$

$$100x - x = 250$$

所以

$$x = \frac{250}{99}$$

$$250 + 99 = 349$$

答案:(D).

9. $\frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+c)^2 - b^2} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+c+b)(a+c-b)} = \frac{a+b-c}{a+c-b}$
(但 $a+b+c \neq 0$).

答案:(E).

10. “所有男人都是善于驾驶的”, 这是不真, 也就是说
“至少一男人是不善于驾驶的”.

答案:(E).

11. $2k^2 - 1 = 7$, 所以 $2k^2 = 8$, 所以 $k = \pm 2$

$$x^2 \pm 6x + 7 = 0, x = \pm 3 \pm \sqrt{9-7} = \pm 3 \pm \sqrt{2}$$

根为 $+3 \pm \sqrt{2}$ 或 $-3 \pm \sqrt{2}$.

答案:(D).

12. 由 $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = a^2$ 表一圆, 圆心为 (α, β)
反过来想 $(\alpha-x)^2 + (\beta-y)^2 = a^2$, 则表很多圆, 圆心为 (x, y) , 但过 (α, β) 可见此等圆心 (x, y) 的轨迹是圆.

答案:(D).

