

高考提示：
考题趋难
分档拉大

主 编 潘 戈

尖子生 高考难题库

数学

如果你已是尖子生

本书使你高考轻松

如果你不是尖子生

本书助你高考成功



辽宁教育出版社

尖子生高考难题库

数 学

主 编 潘 戈
编 者 潘 戈 刘丽晨
樊 丽

辽宁教育出版社

尖子生高考难题库

数 学

潘 戈 主编

辽宁教育出版社出版、发行

(沈阳市和平区十一纬路 25 号 邮政编码 110003)

沈阳六〇六所印刷厂印刷

开本:787 毫米×1092 毫米 1/16 字数:270 千字 印张:13
2002 年 8 月第 1 版 2002 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑:王 莹 崔 崇 责任校对:张小沫
李丰实 刘 烁

封面设计:杜 江 版式设计:熊 飞

ISBN 7-5382-6361-6/G·4448

定 价:14.50 元

致 读 者

全国高考改革领导小组的权威人士透露,2002年和2003年高考在总体保持相对稳定的前提下,试题的难度有所增加,以拉开考生分数距离。

高考是选拔性考试,要选择出40%左右的考生进入大学,因此,高考成绩一定要有一个十分好的区分度。只有高考成绩达到一定的区分度,才能为高校选择出有学习潜能的新生。正是“难题”的分值拉开了考生成绩的距离。“难”意味着什么?首先,命题者觉得难的题,我们从来也没有感觉到容易过;其次,命题者觉得是比较容易的题有时我们感觉到很难。其实这也是很容易理解的,因为高考结果不但决定谁上线,谁不上线,还决定着谁上重点,谁上大本,谁上大专,因此不是每个考生对每一个学科的每道题都能上手,都会做,都能得分。从这个意义上讲,高考试题也是难的。我们收录的题目是广泛意义上的“难”题:涉及知识点多、综合性强的能力题,看似简单的易丢分题,联系生活实际的应用题,真正意义上的压轴题等等都收录在《尖子生高考难题库》中。综合性强、应用性强是我们的选题原则,既然是《尖子生高考难题库》,所选的习题就会有一定难度,解题也不会十分轻松。但通过解题,你的解题思维一定会得到提高和发展,你的解题思路一定会更加清晰、便捷,你的解题能力一定会迅速提高。这将使你在面对日后的高考时,从容而自信!

依据最新高中数学教学大纲和最新高考考试说明的要求,我们组织了具有丰富的高考命题、阅卷及指导高考复习经验的特、高级数学教师,总结历年数学高考命题的规律和趋势,精心选编了这本《尖子生高考难题库·数学》。

最新考试说明指出:高考应有“必要的区分度和适当的难度”。2002年和2003年的数学高考试题的命题越来越向重综合、重应用能力的方向发展,而这本书正是以培养学生的综合运用数学知识解决实际问题的能力为基点,定位于“重点、难点、考点点拨”“习题精选”两大块内容,系统地梳理学科知识、培养能力,形成成功备考的知识、能力网络。通过对考点的强化和难题的破解来培养学生的思维能力、应用能力、创新能力,从而提高学生的综合素质。在书中,我们精选试题力求覆盖高中各知识点,所有试题具有很强的概括性和启发性,其中典型试题更注意了一题多解,着重提高学生的综合能力;同时,各章节试题十分重视数学应用问题解题能力的培养,应用与开放问题完全按照问题情境来讲解。开放你的思维,开启你的思维,轻轻挑战高考应用题绝对不成问题!

千里之行始于足下。希望你用自己的知识、智慧和自信攻克《尖子生高考难题库》,祝愿你在使用《尖子生高考难题库》的过程中取得良好的效果,更祝愿你在今后的高考中取得优异的成绩,让理想成为现实!

目 录

第一章 集合与简易逻辑	1
(一) 集合	1
(二) 简易逻辑	4
第二章 函数	7
(一) 映射与函数概念	7
(二) 函数性质	13
(三) 指数函数、对数函数及其他	21
✓ 第三章 数列	28
✓ 第四章 三角函数	35
第五章 平面向量	44
✓ 第六章 不等式	53
✓ 第七章 直线和圆的方程	57
✓ 第八章 圆锥曲线方程	60
第九章 直线、平面、简单几何体	68
(一) 空间直线和平面	68
(二) 简单几何体	73
第十章 排列、组合和概率	79
第十一章 概率与统计	84
第十二章 极限	89
(一) 数学归纳法和数列极限	89
(二) 函数极限	92
第十三章 导数与微分	96
第十四章 积分	100
第十五章 复数	104
第十六章 应用问题	110
参考答案及提示	123

第一章 集合与简易逻辑

(一) 集 合

【重点、难点、考点点拨】

这部分的重点：掌握集合的表示方法：(1) 列举法、(2) 描述法、(3) 韦恩图法；集合与集合之间的关系；元素与集合之间的关系；集合的运算：交集、并集、补集。

这部分的难点：运用所学数学知识解决集合问题。

这部分的考点：理解集合、子集、交集、并集、补集的概念；了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，能掌握有关的术语和符号，能正确表示一些较简单的集合。

【习题精选】

一、选择题

✓ 1. 已知 $M = \{x | x \leq \sqrt{21}\}$, $a = 2\sqrt{5}$, 那么下列关系式中正确的是 (D)

- A. $a \subsetneq M$ B. $a \notin M$ C. $\{a\} \in M$ D. $\{a\} \subsetneq M$

2. 若全集 $U = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$, $A = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-2} = 1, x, y \in \mathbf{R}\}$, $B = \{(x, y) | y = x+1, x, y \in \mathbf{R}\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B$ 是 (C)

- A. $\complement_U A$ B. B C. $\emptyset$ D. $\{(2, 3)\}$

③ 3. 小于等于 x 的最大整数与大于或等于 x 的最小整数之和是 5, 则 x 的集合是 (B)

- A. $\{x | 2 \leq x \leq 3\}$ B. $\{x | 2 \leq x < 3\}$

- C. $\{\frac{5}{2}\}$ D. $\{x | 2 < x < 3\}$

4. 设方程 $x^2 + \frac{1}{2}px + 1 = 0$ 的解集为 M , $2x^2 + x + q = 0$ 的解集为 N , 已知 $M \cap N = \{\frac{1}{2}\}$, 那么 $M \cup N$ 是 (D)

- A. $\{\frac{1}{2}\}$ B. $\{\frac{1}{2}, 2\}$ C. $\{-1, \frac{1}{2}\}$ D. $\{-1, \frac{1}{2}, 2\}$

✓ 5. 设 $A = \{(x, y) | |x+1| + (y-2)^2 = 0\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, 则 A, B 两个集合的关系是 (D)

- A. $A \supsetneq B$ B. $A \subsetneq B$ C. $A \in B$ D. 以上都不对

✓ 6. 设集合 $M = \{x | x = 12a + 8b, a, b \in \mathbf{Z}\}$, $N = \{y | y = 20c + 16d, c, d \in \mathbf{Z}\}$, 则 (C)

- A. $M \subsetneq N$ B. $M \supsetneq N$ C. $M = N$ D. 以上结论都不对

7. 已知 $M = \{(x, y) | y \geq x^2\}$, $N = \{(x, y) | x^2 + (y-a)^2 \leq 1\}$, 那么 $M \cap N = N$

成立的充要条件是 ()

- A. $a \geq 1 \frac{1}{4}$ B. $a = 1 \frac{1}{4}$ C. $a \geq 1$ D. $0 < a < 1$

8. 若不等式 $(a-2)x^2 + 2(a-2)x - 4 < 0$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[-2, 2]$ C. $(-2, 2]$ D. $(-\infty, -2)$

9. 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $\{x | \alpha < x < \beta\}$, 其中 $\beta > \alpha > 0$, 则不等式 $cx^2 - bx + a > 0$ 的解集是 ()

- A. $\left\{x \mid \frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}\right\}$ B. $\left\{x \mid -\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}\right\}$
C. $\left\{x \mid \frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}\right\}$ D. $\left\{x \mid -\frac{1}{\beta} < x < -\frac{1}{\alpha}\right\}$

10. 若方程 $7x^2 - (k+13)x + k^2 - k - 2 = 0$ 有两个不等实根 x_1, x_2 , 且 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $-2 < k < -1$ B. $3 < k < 4$
C. $-2 < k < 4$ D. $-2 < k < -1$ 或 $3 < k < 4$

11. 二次方程 $x^2 - 2(k+4)x + 2(k^2 - 2) = 0$ 的两个根都是正数, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $-2 \leq k < -\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2} < k \leq 10$ B. $-2 \leq k \leq 10$
C. $-2 \leq k < -\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2} < k \leq 10$

12. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, $B = \{x | x^2 + px + q < 0\}$, 满足 $A \cap B = \{x | -1 \leq x < 2\}$, 则 p, q 满足 ()

- A. $2p + q + 4 = 0$ B. $p + q + 5 = 0$
C. $p + q = 0$ D. $p - q = 0$

13. 已知 $A = \left\{x \mid x = \cos \frac{5k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, $B = \left\{y \mid y = \cos \frac{n\pi}{4}, n \in \mathbf{Z}\right\}$, 则 A, B 之间的关系是 ()

- A. $A \subsetneq B$ B. $A \supsetneq B$ C. $A \neq B$ D. $A = B$

14. 设满足下列条件的函数 $f(x)$ 的集合为 M : 当 $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 4|x_1 - x_2|$, 若有函数 $g(x) = x^2 + 2x - 1$, 则 $g(x)$ 与 M 的关系是 ()

- A. $g(x) \subsetneq M$ B. $g(x) \in M$ C. $g(x) \notin M$ D. 不能确定

15. 设全集 $U = \{(x, y) | x, y \in \mathbf{R}\}$, $A = \left\{(x, y) \mid \frac{y-2}{x-1} = 1\right\}$, $B = \{(x, y) | y = x + 1\}$, 则 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$ ()

- A. $\{(1, 2)\}$ B. $\complement_U A$ C. $\complement_U B$ D. $\emptyset$

16. 设全集为 $\mathbf{R}$, $A = \{x | x^2 - 5x - 6 > 0\}$, $B = \{x | |x - 5| < a\}$, a 是常数, 且 $11 \in B$, 则 ()

- A. $\complement_{\mathbf{R}} A \cup B = \mathbf{R}$ B. $A \cup \complement_{\mathbf{R}} B = \mathbf{R}$
C. $\complement_{\mathbf{R}} A \cup \complement_{\mathbf{R}} B = \mathbf{R}$ D. $A \cup B = \mathbf{R}$

17. 集合 $A = \{(x, y) | y = a|x|\}$, $B = \{(x, y) | y = x + a\}$, $C = A \cap B$, 且集合 C 为单元素集合, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $|a| \leq 1$ B. $|a| > 1$ 或 $0 < |a| < 1$
C. $a > 1$ D. $a > 1$ 或 $a < 0$

18. 点集 $\{(x, y) | \lg(x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{9}) = \lg x + \lg y\}$ 中元素个数为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 多于 2

19. 若非空集合 $A = \{x | 2a + 1 \leq x \leq 3a - 5\}$, $B = \{x | 3 \leq x \leq 22\}$, 则能使 $A \subseteq A \cap B$ 成立所有 a 的集合是 ()

- A. $\{a | 1 \leq a \leq 9\}$ B. $\{a | 6 \leq a \leq 9\}$
C. $\{a | a \leq 9\}$ D. $\emptyset$

20. 设集合 $S = \{x | 1 \leq x < 9, \text{ 其中 } x \in \mathbf{N}^*\}$, 则满足 $\{1, 3, 5, 7, 8\} \cap C_S B = \{1, 3, 5, 7\}$ 的集合 B 的个数是 ()

- A. 1 B. 4 C. 5 D. 8

21. 已知集合 $M = \{(x, y) | y = \sqrt{9 - x^2}\}$, $N = \{(x, y) | y = x + b\}$, 且 $M \cap N = \emptyset$, 则 b 应满足的条件是 ()

- A. $|b| \geq 3\sqrt{2}$ B. $0 < b < \sqrt{2}$
C. $-3 \leq b \leq 3\sqrt{2}$ D. $b > 3\sqrt{2}$ 或 $b < -3\sqrt{2}$

22. 已知集合 $E = \{\theta | \cos \theta < \sin \theta, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $F = \{\theta | \tan \theta < \sin \theta\}$, 那么 $E \cap F$ 为区间 ()

- A. $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ B. $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ C. $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ D. $(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$

23. 已知集合 $P = \{x | (x-1)(x-4) \geq 0, x \in \mathbf{R}\}$, $Q = \{n | (n-1)^2(n-4) \leq 0, \text{ 其中 } n \in \mathbf{N}\}$ 和集合 S , 且 $S \cap P = \{1, 4\}$, $S \cap Q = S$, 那么 S 的元素个数是 ()

- A. 2 B. 2 或 4 C. 2 或 3 或 4 D. 无穷多个

24. 设 M, P 为非空集合, 定义集合 $M - P = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin P\}$, 那么 $M - (M - P)$ 等于 ()

- A. P B. M C. $M \cap P$ D. $M \cup P$

二、填空题

1. 设集合 $A = \{2, 3, a^2 + 1\}$, $B = \{a^2 + a - 4, 2a + 1, -\frac{13}{4}\}$, $A \cap B = \{2\}$, 则实数 $a =$ _____.

2. 设集合 $A = \{x | x^3 + 2x^2 - x - 2 > 0\}$, $B = \{x | x^2 + ax + b \leq 0, \text{ 其中 } a^2 - 4b \geq 0\}$, 则使 $A \cup B = \{x | x + 2 > 0\}$, $A \cap B = \{x | 1 < x \leq 3\}$ 的实数 $a =$ _____, $b =$ _____.

3. 已知 $A = \{y | y = 2x + 1, x \in \mathbf{R}^+\}$, $B = \{y | y = -x^2 + 9, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$ _____, $A \cup B =$ _____.

4. 集合 $M = \{(x, y) | x^2 + 2x + y^2 \leq 0\}$, $N = \{(x, y) | y \geq x + a\}$, 且 $M \cap N = M$, 则 a 的取值范围是 _____.

5. 设 $A = \{x | -2 \leq x \leq a\}$, 且 $A \neq \emptyset$, $B = \{y | y = 2x + 3, x \in A\}$, $C = \{z | z = x^2, x \in A\}$. 若 $C \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

6. 已知 $A = \{x | x^2 - 3x - 10 \leq 0\}$, $B = \{x | m + 1 \leq x \leq 2m - 1\}$, 若 $A \cup B = A$, 则 m 的取值范围是 _____.

7. $P = \{(x, y) | (x+2)^2 + (y-3)^2 < 4\}$, $Q = \{(x, y) | (x+1)^2 + (y-m)^2 \leq \frac{1}{4}\}$, 且 $P \cap Q = Q$, 则 m 的取值范围是 _____.

8. 从自然数 $1 \sim 20$ 这 20 个数中任取 2 个相加, 得到的和作为集合 M 的元素, 则 M 的非空子集共有_____个.

9. 若 $A = \{2, 4, a^3 - 2a^2 - a + 7\}$, $B = \{-4, a + 3, a^2 - 2a + 2, a^3 + a^2 + 3a + 7\}$, 且 $A \cap B = \{2, 5\}$, 则实数 $a =$ _____.

10. $a \in A$ 是集合 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = a^2\} \cap \{(x, y) \mid xy = x + y\}$ 有两个元素的充要条件, 则 $A =$ _____.

11. 大于 0 的前 100 个自然数中不能被 2、3、5 整除的那些数的和等于_____.

12. 设 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2\}$, 其中 a_1, a_2, a_3, a_4 均为自然数, 且 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. 已知 $A \cap B = \{a_1, a_2\}$, $a_1 + a_4 = 10$, $A \cup B$ 的所有元素之和为 124, 则 $A =$ _____.

13. 集合 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $B = \{(x, y) \mid \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, a > 0, b > 0\}$, 若 $A \cap B$ 只有一个元素, 则 $a \cdot b$ 的最小值是_____.

14. 集合 $M = \{x, xy, \lg(xy)\}$, $N = \{0, |x|, y\}$, 且 $M = N$, 那么 $(x + \frac{1}{y}) + (x^2 + \frac{1}{y^2}) + (x^3 + \frac{1}{y^3}) + \dots + (x^{2001} + \frac{1}{y^{2001}})$ 的值等于 -2.

三、解答题

1. 设集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 共有 k 个子集, 分别为 A_i ($i = 1, 2, 3, \dots, k$), 记集合 A_i 的元素之和为 S_i ($i = 1, 2, 3, \dots, k$), 求 $S_1 + S_2 + \dots + S_k$.

2. (1986 年全国高考试题) 集合 A, B 各有 12 个元素, 集合 $A \cap B$ 有 4 个元素, 集合 C 满足条件: (1) $C \subseteq (A \cup B)$; (2) C 中含有 3 个元素; (3) $C \cap A \neq \emptyset$. 这样的集合 C 共有多少个?

3. 已知集合 $A = \{x \mid \frac{x+1}{x-2} \leq 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - (a^2 + 1)x + a^2 < 0\}$, 且 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

4. (1985 年全国高考试题) 已知 $A = \{(x, y) \mid x = n, y = an + b, n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{(x, y) \mid x = m, y = 3m^2 + 15, m \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 144\}$ 是坐标平面内的点集, 问是否存在实数 a, b , 使得 $A \cap B \neq \emptyset$, $(a, b) \in C$ 同时成立.

5. 设 $A = \{(x, y) \mid y^2 - x - 1 = 0\}$, $B = \{(x, y) \mid 4x^2 + 2x - 2y + 5 = 0\}$, $C = \{(x, y) \mid y = kx + b\}$ 是否存在 $k, b \in \mathbb{N}^*$, 使 $(A \cup B) \cap C = \emptyset$, 证明你的结论.

6. 已知集合 $A = \{(x, y) \mid y = x^2 + mx + 2\}$, $B = \{(x, y) \mid x - y + 1 = 0, \text{ 且 } 0 \leq x \leq 2\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

(二) 简易逻辑

【重点、难点、考点点拨】

简易逻辑主要介绍逻辑联结词“或”“且”“非”、四种命题及充要条件.

这部分知识的重点: 会判断简单命题、复合命题; 掌握四种命题构成及关系; 会利用数学知识判断充分、必要条件.

这部分知识的难点：复合命题的否定形式；利用反证法证明数学问题。

简易逻辑的考点：会写四种命题并掌握它们之间的关系；会判断充分、必要条件等。

【习题精选】

一、选择题

1. 下列语句中是命题的是 (B)

A. 代数和几何

B. $\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $2x + 3y$

D. 集合与元素

2. 命题“方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解是 $x = \pm 1$ ”中，使用逻辑联结词的情况是 (C)

A. 没有使用逻辑联结词

B. 使用了逻辑联结词“且”

C. 使用了逻辑联结词“或”

D. 使用了逻辑联结词“非”

3. 已知全集 $S = \mathbf{R}$, $A \subseteq S$, $B \subseteq S$, 如果命题 $p: \sqrt{3} \in A \cup B$, 则命题“非 p ”是 (D)

A. $\sqrt{3} \notin A$

B. $\sqrt{3} \in \complement_s B$

C. $\sqrt{3} \notin A \cap B$

D. $\sqrt{3} \in (\complement_s A) \cap (\complement_s B)$

4. 若命题 p 的逆命题是 q , 命题 p 的否命题是 r , 则 q 是 r 的 (C)

A. 逆命题

B. 否命题

C. 逆否命题

D. 以上判断都不正确

5. 命题“若 $A = 60^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 是等边三角形”的否命题是 (B)

A. 假命题

B. 与原命题真值相同

C. 与原命题的逆否命题真值相同

D. 与原命题的逆命题真值相同

6. 条件 p : 方程 $f(x) = x^2 + (a-1)x + 1 = 0$ 在区间 $(0, 2)$ 上有两个根, 条件 $q: \Delta =$

$(a-1)^2 - 4 \geq 0$, 且 $f(0) > 0$, $f(2) > 0$. 那么 q 是 p 的 (B)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. 在 $\triangle ABC$ 中 “ $B = 60^\circ$ ” 是 “ $A + C = 2B$ ” 的 (C)

A. 充分不必要条件

7. $\sin A + \sin C = 2 \sin B$

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. “ $b^2 = ac$ ” 是 “实数 a, b, c 成等比数列” 的 (B)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. 已知 A, B 是 $\triangle ABC$ 的内角, 则 “ $A > B$ ” 是 “ $\sin A > \sin B$ ” 的 (C)

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

10. “ $x > 1$ ” 是 “ $x \geq 1$ ” 的 (A)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

11. “ $\alpha = \beta$ ” 是 “ $\tan \alpha = \tan \beta$ ” 的 (D)

A. 充分条件

$\tan \alpha = \tan \beta$

B. 必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

12. 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 则使 $|a| + |b| > 1$ 成立的充分必要条件是 ()

A. $|a + b| \geq 1$

B. $|a| \geq \frac{1}{2}$ 且 $|b| \geq \frac{1}{2}$

C. $a \geq 1$

D. $b < -1$

二、填空题

1. $p: A \cap B = A$; $q: A \subseteq B$. p 是 q 的 $\Leftarrow$ 条件, q 是 p 的 $\Rightarrow$ 条件.

2. 关于 x 的方程 $x^2 + mx + n = 0$ 有两个小于 1 的正根一个充要条件是

3. $p: -2 < m < 0, 0 < n < 1$; q : 关于 x 的方程 $x^2 + mx + n = 0$ 有两个小于 1 的正根.

试分析 p 是 q 的 条件 (用“充分不必要、必要不充分、充要、既不充分也不必要”填空).

4. 命题“若一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 无实根, 则判别式 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ”的逆命题是, 否命题是, 逆否命题是, 其中真命题有 个.

5. 命题“垂直于同一条直线的两条直线互相平行”的逆命题是.

三、解答题

1. 若 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 且 $a = x^2 - 2y + \frac{\pi}{2}$, $b = y^2 - 2z + \frac{\pi}{3}$, $c = z^2 - 2x + \frac{\pi}{6}$. 求证: a, b, c 中至少有一个大于 0.

2. 命题“ p 或 q ”的否定应当是什么? 命题“ p 且 q ”的否定应当是什么? 请各举一例.

3. 求证: 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一根为 1 的充要条件是 $a + b + c = 0$.

4. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 求证 $|x + y| = |x| + |y|$ 成立的充要条件是 $xy \geq 0$.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = p^n + q$ ($p \neq 0, p \neq 1$), 求数列 $\{a_n\}$ 是等比数列的充要条件.

6. 已知条件 $p: A = \left\{ x \mid \left| x - \frac{(a+1)^2}{2} \right| \leq \frac{(a-1)^2}{2} \right\}$, 条件 $q: B = \{x \mid x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leq 0\}$. 若条件 p 是条件 q 的充分条件, 求实数 a 的取值范围.

第二章 函数

(一) 映射与函数概念

【重点、难点、考点点拨】

这部分知识的重点：(1) 对函数概念的理解. 构成函数的三要素是定义域、对应法则和值域. (2) 求函数定义域的方法：①对于给出函数解析式的函数，要使解析式有意义，即有分式注意使分母不为零；开偶次方要使被开方式子大于或等于零；注意某些特殊函数如 $y = \log_a x$, $y = \arcsin x$ 等定义域的要求. ②对于未给出解析式的函数的定义域的求法，要注意对应法则 f 的作用. (3) 求函数解析式的常用方法：①换元法；②代入法；③待定系数法；④消元法；⑤特殊值法. (4) 求函数值域常用的方法：①观察法；②判别式法；③图象法；④均值不等式；⑤利用某些函数有界性；⑥换元法等.

这部分知识的难点：(1) 含参数求定义域问题；(2) 复杂求函数值域问题.

这部分知识的考点：映射的概念；函数定义域、值域、解析式的求法.

【习题精选】

一、选择题

1. 设集合 $A = \mathbf{R}$, 集合 $B = \{x | x > 0, x \in \mathbf{R}\}$, 下列对应关系中, 是从集合 A 到集合 B 的映射的是 (C)

A. $x \rightarrow y = |x|$ B. $x \rightarrow y = \frac{1}{(x-1)^2}$ C. $x \rightarrow y = 2^{-x}$ D. $x \rightarrow y = \log_2(1+x^2)$

2. 设集合 $M = \{-1, 0, 1\}$, $N = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, 映射 $f: M \rightarrow N$, 使对任意 $x \in M$ 都有 $x + f(x) + x \cdot f(x)$ 是奇数, 这样的映射 f 的个数为 ()

A. 122 B. 15 C. 50 D. 27

3. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, 集合 $B = \{-1, -2\}$, 设映射 $f: A \rightarrow B$, 如果集合 B 中元素都是 A 中元素在映射 f 下的象, 那么这样的映射存在 ()

A. 16 个 B. 14 个 C. 12 个 D. 8 个

4. 设集合 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 从 A 到 B 建立映射 f , 使 $f(a) + f(b) + f(c) + f(d) = 8$, 则满足条件的映射 f 共有 ()

A. 16 个 B. 17 个 C. 18 个 D. 19 个

5. 已知 $f(2x+1)$ 的最大值为 2, $f(4x+1)$ 的最大值为 a , 则 ()

A. $a < 2$ B. $a > 2$ C. $a = 2$ D. 以上三种都可能

6. 已知函数 $y = f(x+1)$ 的图象过点 $(-1, 1)$, 则函数 $y = f(4-x)$ 的反函数图象过点 ()

- A. (3, 0) B. (0, 3) C. (4, 1) D. (1, 4)

7. 若 $f(x) = \frac{cx}{2x+3} (x \neq -\frac{3}{2})$ 且 $f(f(x)) = x$, 则 c 的值为 ()

- A. -3 B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 3

8. 已知 $y = f(x)$ 定义域是 $[0, 1]$ 且 $y = f(x+m) + f(x-m)$ 的定义域是 $\emptyset$, 则正数 m 的取值范围是 ()

- A. $0 < m < 1$ B. $0 < m \leq \frac{1}{2}$ C. $0 < m < \frac{1}{2}$ D. $m > \frac{1}{2}$

9. 对于函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{当 } \sin x \geq \cos x \text{ 时} \\ \cos x, & \text{当 } \sin x < \cos x \text{ 时} \end{cases}$, 下列命题中正确的是 ()

- A. 函数的值域是 $[-1, 1]$
 B. 当且仅当 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 时函数取得最大值 1
 C. 该函数是以 π 为最小正周期的周期函数
 D. 当且仅当 $2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 时, $f(x) < 0$

10. 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上函数 $f(x) = x^2 + bx + c (b, c \in \mathbf{R})$ 与 $g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$ 在同一点取得相同的最小值, 那么 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上的最大值是 ()

- A. $\frac{13}{4}$ B. 4 C. 8 D. $\frac{5}{4}$

11. 设函数 $f(x) = a + \sqrt{-x^2 - 4x}$ 与 $g(x) = \frac{4}{3}x + 1$, 当 $x \in [-4, 0]$ 时, 恒有 $f(x) \leq g(x)$, 则常数 a 能取的一个值是 ()

- A. -5 B. 5 C. $-\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

12. 若 $x \in \mathbf{R}$, 则 $y = x^2 + 1 + \frac{1}{2x^2 + 3}$ 的最小值是 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ B. $2\sqrt{2}-2$ C. $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$ D. $\frac{4}{3}$

13. 设 $A = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$, 则 A 的取值范围是 ()

- A. $[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}]$ B. $[0, 1]$
 C. $[0, \sqrt{3}]$ D. $(-1, 1)$

14. 某汽车运输公司购买了一批豪华大客车, 投入客运, 根据市场分析, 每辆客车营运的总利润 y (10 万元) 与营运年数 $x (x \in \mathbf{N}^*)$ 的二次函数关系如图 2—1, 则每辆客车营运 () 年其营运年平均利润最大.

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

15. 函数 $y = f(x-1)$, $y = f(2-x)$, 定义域为 $\mathbf{R}$, 则两函数图象对称轴是 ()

- A. y 轴 B. $x = \frac{1}{2}$ C. $x = \frac{3}{2}$ D. $x = 1$

16. 已知函数 $f(x) = 2^x - 1$, $g(x) = 1 - x^2$, 构造函数 $F(x)$ 定义如下: 当 $|f(x)| \geq g(x)$

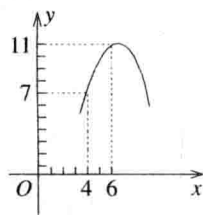


图 2—1

时, $F(x) = |f(x)|$; 当 $|f(x)| < g(x)$ 时, $F(x) = -g(x)$. 那么 $F(x)$ ()

- A. 有最小值 0, 无最大值
B. 有最小值 -1, 无最大值
C. 有最大值 1, 无最小值
D. 无最小值, 也无最大值

17. 已知 $a > 0$, $b > 0$ 且 $a + b = 1$, 则 $\left(\frac{1}{a^2} - 1\right)\left(\frac{1}{b^2} - 1\right)$ 的最小值是 ()

- A. 6
B. 7
C. 8
D. 9

18. 函数 $y = f(x)$ 对于一切实数 x 均满足 $f(x) = f(3-x)$, 若 $f(x) = 0$ 恰有六个根, 则这六个根之和为 ()

- A. 0
B. 3
C. 6
D. 9

19. 已知 $f(x) + f(2-x) + 2 = 0$ 对任何实数 x 恒成立, 则函数 $y = f(x)$ 的图象 ()

- A. 关于直线 $x = 1$ 对称
B. 关于直线 $x = 2$ 对称
C. 关于点 $(1, -1)$ 对称
D. 关于点 $(-1, 1)$ 对称

20. 若函数 $f(x) = (x+a)^3$, 对任意 $t \in \mathbf{R}$ 总有 $f(1+t) = -f(1-t)$, 则 $f(2) + f(-2)$ 的值是 () (其中 $a \in \mathbf{R}$)

- A. 0
B. 26
C. -26
D. 28

21. 设 $U = \mathbf{R}$, 已知 $f(x) = \lg(x^2 - 3x + 2)$ 的定义域为 F , 函数 $g(x) = \lg(x-1) + \lg(x-2)$ 的定义域为 G , 那么 $G \cup (\complement_U F) = ()$

- A. $(2, +\infty)$
B. $(-\infty, 2)$
C. $[1, +\infty)$
D. $(1, 2) \cup (2, +\infty)$

22. 若函数 $y = f(x+1)$ 的定义域是 $[-2, 3]$, 则 $y = f(2x-1)$ 的定义域是 ()

- A. $\left[0, \frac{5}{2}\right]$
B. $[-1, 4]$
C. $[-5, 5]$
D. $[-3, 7]$

23. 如果函数 $f(x) = (x+1)(1-|x|)$ 的图象在 x 轴上方, 则 $f(x)$ 的定义域为 ()

- A. $\{x \mid |x| < 1\}$
B. $\{x \mid |x| > 1\}$
C. $\{x \mid x < 1 \text{ 且 } x \neq -1\}$
D. $\{x \mid x > -1 \text{ 且 } x \neq 1\}$

24. 周长为定值 a 的扇形, 它的面积 S 是这个扇形半径 R 的函数, 则函数的定义域是 ()

- A. $\left(\frac{a}{2}, a\right)$
B. $\left(\frac{a}{2(1+\pi)}, \frac{a}{2}\right)$
C. $(a, 2a)$
D. $(0, a)$

25. 函数 $y = \varphi(x)$ 的图象与直线 $x = a$ 交点的个数为 ()

- A. 必有 1 个
B. 1 个或 2 个
C. 至多 1 个
D. 可能 2 个以上

26. 已知函数 $f(x)$ 定义域为 (a, b) 且 $b - a > 2$, 则 $F(x) = f(3x-1) - f(3x+1)$ 的定义域为 ()

- A. $(3a+1, 3b-1)$
B. $\left(\frac{a+1}{3}, \frac{b-1}{3}\right)$
C. $\left(\frac{a-1}{3}, \frac{b-1}{3}\right)$
D. $\left(\frac{a+1}{3}, \frac{b+1}{3}\right)$

27. 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处没有意义, 对所有非零实数 x , $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$ 成立. 则适合方程 $f(x) = f(-x)$ 的 x 值的个数是 ()

- A. 恰好只有一个实根
B. 恰好有两个实根
C. 没有
D. 无穷多个, 但不是所有非零实根

28. 已知 $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$, 则 $f(f(x))$ 是 ()

- A. $x + |x|$ B. 0 C. $\begin{cases} x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ D. $\begin{cases} x & (x \leq 0) \\ 0 & (x > 0) \end{cases}$

29. 设 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, 记 $f_n(x) = f(\underbrace{f[f \cdots f(x)]}_{n \uparrow})$, 则 $f_{1992}(x)$ 是 ()

- A. $-\frac{1}{x}$ B. x C. $-\frac{x+1}{x-1}$ D. $\frac{x-1}{x+1}$

30. 若函数 $y = f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 则下列不恒成立的是

()

- A. $f(0) = 0$ B. $f(3) = 3f(1)$

- C. $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}f(1)$ D. $f(-x) \cdot f(x) < 0$

31. 函数 $y = \frac{x-x^2-2}{x^2+2}$ 的值域是 ()

- A. $[-1 - \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4} - 1]$ B. $[-(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}), -1) \cup (-1, (\frac{\sqrt{2}}{4} - 1))$
C. $(-\infty, -(1 + \frac{\sqrt{2}}{4})]$ D. $[(\frac{\sqrt{2}}{4} - 1), +\infty)$

32. 函数 $y = \frac{x^2-4x+3}{2x^2-x-1}$ 的值域是 ()

- A. $(-\infty, \frac{1}{2})$ B. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$
C. $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$ D. $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

33. 函数 $y = \frac{2x^2-x+1}{x-1}$ ($x > 1$) 的值域是 ()

- A. $[7, +\infty)$ B. $(-\infty, 7]$ C. $(-\infty, 2]$ D. $[2, +\infty)$

34. 函数 $y = |x-3| - |x+1|$ 的值域是 ()

- A. $(-\infty, -1]$ B. $[-4, 4]$ C. $(-\infty, -4]$ D. $(-\infty, +\infty)$

35. 函数 $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ 的值域为 ()

- A. $[0, 2]$ B. $(0, \sqrt{2}]$ C. $[-\sqrt{2}, 0]$ D. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

36. 函数 $y = \frac{3+\sin x}{4+2\cos x}$ 的值域是 ()

- A. $(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{3}]$ B. $[\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3}]$
C. $[\frac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ D. $\mathbf{R}$

37. $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{(12-x)^2+16}$ 的最小值是 ()

- A. 13 B. $\sqrt{153}$ C. $\sqrt{43}$ D. 153

38. 设 $f(x) = -2x^2 + 3tx + t$ ($x, t \in \mathbf{R}$) 的最大值是 $u(t)$, 当 $u(t)$ 有最小值时, t 的值等于 ()

- A. $\frac{9}{4}$ B. $-\frac{9}{4}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $-\frac{4}{9}$

39. 下列函数中, 值域是 $(0, +\infty)$ 的函数是 ()

A. $y = 3^{\frac{1}{2-x}}$ B. $y = (x+1)^{-\frac{2}{3}}$ C. $y = \sqrt{1-2^x}$ D. $y = x^2 + x + 1$

40. 函数 $y = x^2 - 3x - 4$ 的定义域是 $[0, m]$, 值域是 $[-\frac{25}{4}, -4]$, 则 m 的取值范围是 ()

A. $[0, 4]$ B. $[\frac{3}{2}, 4]$ C. $[\frac{3}{2}, 3]$ D. $[\frac{3}{2}, +\infty]$

二、填空题

1. 在 $\triangle ABC$ 中 (如图 2—2), $BC = 2$, $AB + AC = 3$, 中线 AD 的长为 y , 若以 AB 的长为 x , 建立 y 与 x 的函数关系是_____, 其定义域是_____.

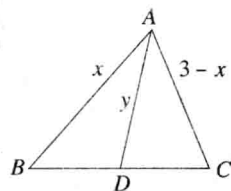


图 2—2

2. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ x-3 & x \notin [0, 1] \end{cases}$, 使不等式 $f(f(x)) = 1$ 成立的 x 值范围是_____.

3. 从盛满 20 升纯酒精的容器里倒出 1 升, 然后用水填满再倒出一升混合溶液又用水填满, 这样继续进行, 如果倒第 k 次 ($k \geq 1$) 时共倒出纯酒精 x 升, 倒第 $k+1$ 次时共倒出纯酒精 $f(x)$ 升, 则函数 $f(x)$ 的表示式为_____.

4. 设 $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$, 那么和式 $f(\frac{1}{1001}) + f(\frac{2}{1001}) + \dots + f(\frac{1000}{1001})$ 的值是_____.

5. 已知 $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, 记 $f_n(x) = f\{f[\dots f(x)]\}$, 则 $f_{2001}(2000)$ 等于_____.

6. 已知 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, $f(1) = 2$, 则 $\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \dots + \frac{f(1998)}{f(1997)}$ = 3994.

7. 函数 $y = \sqrt{x} + \sqrt{5-x}$ ($0 \leq x \leq 5$) 的值域是 $2\sqrt{5}$.

8. 设 $x > 0$, 则 $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x + \frac{1}{x}} + 1$ 的最大值是_____.

9. 函数 $y = \sqrt{x-4} + \sqrt{15-3x}$ 的最大值是_____.

10. 若函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{N}^*$ 且 $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$, $f(y) = 1$, 则 $f(x)$ 表达式为_____.

三、解答题

1. 求下列函数定义域.

(1) $y = \sqrt[3]{9 - \left(\frac{1}{3}\right)^x} + \sqrt{\log_{0.1} \frac{3x-2}{2x+1}}$

(2) $y = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$ $1 - \frac{1}{1-x} \neq 0$ $1 - \frac{1}{x} \neq 0$ $x \neq 1$

(3) $y = \frac{1}{\sqrt{a^x - k\beta^x}}$ ($a > 0$, $\beta > 0$, $k > 0$)

(4) $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$

(5) $y = \sqrt{2\sin 2x - \sqrt{2}} + \lg(1 - 2\cos x)$

(6) $y = \ln(a^x - k \cdot 2^x)$ (其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$)

2. 已知函数 $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ 的值域是 $[-1, 4]$, 求实数 a 、 b 的值.

3. 设 $f(x) = x^2 - 4x - 4$, $x \in [t, t+1]$ ($t \in \mathbf{R}$), 求函数 $f(x)$ 的最小值 $g(t)$ 的解析式.
4. 若函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{2}$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值为 $2b$, 最小值为 $2a$, 求 $[a, b]$.
5. 已知 $f(x)$ 的值域是 $[\frac{3}{8}, \frac{4}{9}]$, 试求 $y = g(x) = f(x) + \sqrt{1 - 2f(x)}$ 的值域.
6. 某工厂今年 1、2、3 月份的产品销量分别为 1 万件、1.2 万件、1.3 万件, 呈上升趋势. 为了估测以后每个月的销量, 拟选用二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 或指数函数型的 $y = a \cdot b^x + c$ (a, b, c 皆为常数) 加以模拟, 后来四月份的销量是 1.37 万件, 那么根据 1、2、3 月份销量所选定的两个模拟函数哪一个更好?
7. 有一个受到污染的湖泊, 其湖水容积为 V 立方米, 每天流出湖泊的水量等于流入湖泊的水量, 都为 r 立方米. 现假设下雨和蒸发正好平衡, 且污染物质与湖水能很好地混合. 用 $g(t)$ 表示某一时刻 t 每立方米湖水所含污染物质的克数, 我们称其为在时刻 t 时的湖水污染质量分数. 已知目前污染源以每天 p 克的污染物质污染湖水, 湖水污染质量分数满足关系式: $g(t) = \frac{p}{r} + [g(0) - \frac{p}{r}]e^{-\frac{r}{V}t}$ ($p \geq 0$), 其中 $g(0)$ 是湖水污染的初始质量分数.
- (1) 当湖水污染质量分数为常数时, 求湖水污染的初始质量分数;
 - (2) 求证: 当 $g(0) < \frac{p}{r}$ 时, 湖泊的污染程度将越来越严重;
 - (3) 如果政府加大治污力度, 使得湖泊的所有污染停止, 那么需要经过多少天才能使湖水的污染水平下降到开始时 (即污染停止时) 污染水平的 5%.

8. 长方体枕木的分散荷载是指平均分布在枕木上的荷载, 以枕木每厘米长度上荷载多少千克来计算, 并称不致枕木被折断或发生永久变形时能承受的最大分散荷载为安全分散荷载, 实验知道: 枕木的安全分散荷载是跟它的宽度 b 成正比, 跟它的厚度的平方成正比, 而跟它的长度 l 的平方成反比.

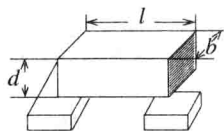


图 2—3

- (1) 现有一根枕木 (如图 2—3), 如果将它绕长度翻转 90° , 即让它的长度不变, 原来的宽度变为厚度, 原来的厚度变为宽度, 则枕木的安全分散荷载将如何变化?
- (2) 现有一根圆形木材, 截取横截面是矩形的枕木, 木材长度即为枕木长度. 试问如何截法, 才能使枕木的安全分散荷载最大?

9. 如图 2—4, 某海滨浴场的岸边近似地看做直线 a , 救生员现在岸边 A 处, 发现海中的 B 处有人求救, 救生员没有直接从 A 处游向 B 处, 而是沿岸边 A 跑到离 B 最近的 D 处, 然后游向 B 处. 若救生员在岸边的行进速度为 6 米/秒, 在海水中的行进速度为 2 米/秒.

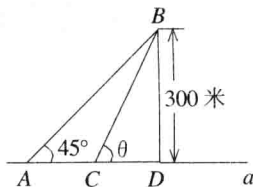


图 2—4

- (1) 分析救生员的选择是否正确;
- (2) 在 AD 上找一处 C , 使救生员从 A 处到 B 的时间为最短, 并求出最短时间.

10. 某工厂现有职工 200 人, 且每人每年可创利 b 万元, 随生产条件的提高, 每裁员 1 人, 则在留职工每人每年会多创利 1%, 但需每年付给下岗职工 $0.4b$ 万元的生活费, 并且该厂能正常运转所需人数不少于现有人数的 $\frac{3}{4}$, 则为了获得最大经济效益, 该厂应如何裁员?