教与学 · 教与学 · 教与学 · 教与学 · 教

解析几何

天津科学技术出版社

教 与 学

解析几何

丛书顾问 崔孟明
编 者 俞绍康 伯 良

天津科学技术出版社

教与学
解析几何

丛书顾问　崔孟明
编　　著　俞绍康　伯　良

天津科学技术出版社出版
天津市赤峰道130号
天津市宝坻县马家店印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行
*
开本787×1092毫米　1/32　印张9.5　字数201 000
1988年6月第1版
1988年6月第1次印刷
印数：1－48 900
ISBN　7-5308-0356-5/G·86　定价：2.00元

前言

教学过程是师生双边活动统一的过程。但应强调指出：教学活动的中心是学生，教和学都是为使学生尽多尽快地增长知识和才干；教学活动的主体也是学生，不论多么高明的教师用怎样巧妙的方法去教，学生都必须经过自己的实践和思维，才能最后牢固地掌握知识和增长能力。因此，教师的主导作用，首先是激发学生学习的积极性、主动性，同时要及时地满足学生对知识的需要，恰当地帮助学生克服学习中的困难。在整个教学活动中教师都要注意，不要伤害学生的主动性和积极性，不要破坏学生思维的连续和完整。要做到这一点，教师就必须充分了解学生的学习过程和心理活动。因此，当今国内外，都把对学习方法的研究作为教法研究的一项重要内容，以使教学活动更好地适应学生需要，进一步提高教学效率。

《教与学》丛书就是基于上述思想和多年实践经验编写而成的，旨在从教和学两方面启发学生主动探求，积极思维，尽多尽快地增长知识和自主学习的能力。

本丛书包括数学、物理、化学、生物、语文和英语六个学科，每科与课本对应分册，每册均按章或单元设有若干栏目。因这些栏目是根据学科内容需要设置的，因此，有共同的，也有专设的。

“知识结构”是用图表或简短文字说明相关范围内各项

知识间的推演、包含等内在联系，从中可找到学习的途径、知识的重点和把握知识的关键。可见它既是学习入门的向导，也是掌握知识的纲领。

“知识反馈”是一组检查课堂学习效果的练习题。它的编写，既考虑了覆盖面，也考虑了重点、难点和能力、方法的训练。因此，通过这套练习题，不仅能了解课堂效果，而且能使所学知识得到及时的巩固和进一步的理解，并可提高对知识的运用能力。

“课堂以外”是一在较大知识范围设立的比较活跃的栏目，可满足多方面的需要。其内容既与教材紧密衔接，又属课堂以外，有动脑的也有动手的。希望通过它能启迪智力、训练能力、开阔视野、疏通思路。

“教材提示”和“学法指导”，一方面是给学生以具体的知识，一方面是通过具体的学习过程教给学生一些富有成效的学习方法。

本丛书由景山学校校长、特级教师崔孟明同志任学术指导，由李勃梁，高柏林、宋志唐、邢永庆等同志任主编，由京津部分有多年教学经验的教师编写。

本丛书的编写，虽几经讨论修改，但由于是经验性材料，难免有不足之处，欢迎读者批评指正。

目　录

第一章 直 线

知识结构

本章首先引入有向直线及有向线段等概念，然后通过平面直角坐标系建立点与数、曲线与方程的联系。熟悉这些内容并掌握坐标方法，对于学习解析几何这门课程是十分重要的。

直线是平面曲线中最简单、最基本的一种图形。本章着重讨论如何在各种已知条件下，利用坐标建立直线方程。先引出平面上直线的最基本的两个定理："平面内任何一条直线的方程，都是关于x和y的一次方程"；"任何一个关于x和y的一次方程，它的图象都是一条直线"。然后从直线的方程讨论点与直线、直线与直线之间的位置关系以及直线系的性质。

直线与二元一次方程的概述如第 2 页表。

本章重点知识分析：

1.平面直角坐标系中点的坐标，是解析几何中最基本的内容，也是研究解析几何最基本的概念。由于坐标系的建立，使平面上的点和一对有序实数之间建立了一一对应的关系。这是形与数相互联系、相互转化的基础和出发点。把形与数结合起来，使我们可以用代数的方法来研究几何图形的性质，即用数值关系说明几何关系，也可用几何关系考查数值

	名　称	表　达　式	说　明
直线方程	点斜式	当$k \neq \text{tg}\frac{\pi}{2}$时，$y - y_0 = k(x - x_0)$ 当$k = \text{tg}\frac{\pi}{2}$时，$x = x_0$	(x_0, y_0)为已知点，k为斜率，(x, y)为动点
	一般式	$Ax + By + C = 0$ （A，B不同时为零）	任何平面上的直线都可用二元一次方程表示，反之亦然。
	斜截式	$y = kx + b$	k为斜率，b为直线在y轴上的截距，(x, y)为动点
	两点式	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	$(x_1, y_1)(x_2, y_2)$为已知点，(x, y)为动点
	截距式	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	a为横截距，b为纵截距．经过原点或平行于坐标轴的直线不能用此表达
	法线式	$x\cos\theta + y\sin\theta = p$ 或 $\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$	p为原点到直线的距离，θ为法线的幅角．$\frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$为法线式因子，注意其符号法则
点与直线的关系	点在直线上	$Ax_0 + By_0 + C = 0$	(x_0, y_0)为已知点，$Ax + By + C = 0$为已知直线
	点在直线的上方	$Ax_0 + By_0 + C > 0$	在$Ax + By + C = 0$中，$B > 0$
	点在直线的下方	$Ax_0 + By_0 + C < 0$	
	点到直线的距离	$d = \frac{\|Ax_0 + By_0 + C\|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ 或　$d = \|x_0\cos\theta + y_0\sin\theta - p\|$	

续

两直线间的关系	平行（充要条件）	$k_1=k_2$ 或 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$	已知直线为 $y=k_1x+b_1 \quad y=k_2x+b_2$ 或为 $A_1x+B_1y+C_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2=0$
	垂直（充要条件）	$k_1 \cdot k_2=-1$ 或 $A_1A_2+B_1B_2=0$	
	相交	若 $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$，则 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$ 的解 (x_0, y_0) 为交点	
	交角	$\operatorname{tg}\theta=\left\vert\frac{k_2-k_1}{1+k_1 \cdot k_2}\right\vert$ 或 $\operatorname{tg}\theta=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$	θ为两直线的夹角，指两直线交角中的锐角，注意角形成的方向
	两平行线间的距离	$d=\frac{\vert C_1-C_2\vert}{\sqrt{A^2+B^2}}$	两条平行直线为 $Ax+By+C_1=0$ $Ax+By+C_2=0$
	两条直线夹角的平分线的方程	$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$	直线$A_1x+B_1y+C_1=0$与直线$A_2x+B_2y+C_2=0$相交
其他	三点共线	$\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$ 即 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$	$(x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3)$ 为三已知点
	三直线共点	$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0$	$\left.\begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \\ A_3x+B_3y+C_3=0 \end{array}\right\}$ 为三条已知直线
	直线系方程	$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$	$\left.\begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{array}\right\}$ 为两条已知直线。 此方程为过两已知直线交点的直线方程

关系.

2.有向线段的概念是本章的一个难点，初学者由于这一新概念的含义理解不清，往往不会正确运用.

由有向线段的数量和有向线段的长度公式推导出两点间的距离公式和定比分点坐标公式（中点坐标公式）．这些知识是研究直线方程以及曲线与方程的基础和工具.

3.线段的定比分点坐标公式及其特例中点坐标公式都很重要，是本章的重点也是难点．在学习的过程中，要弄清以下几个问题：

（1）什么叫做P点分有向线段$\overline{P_1P_2}$的比？要认清$\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$是有向线段$\overline{P_1P}$与$\overline{PP_2}$的数量的比，而不是有向线段长度的比.

（2）在 $\lambda=\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$中，分子$\overline{P_1P}$是起点到分点的有向线段的数量，分母$\overline{PP_2}$是分点到终点的有向线段的数量，这个比的顺序不可颠倒.

（3）分点P的位置，决定了比值λ的正负．若P点在P_1P_2两端点之间，则λ取正值，此时可称P点为内分点．若分点P在P_1P_2的延长线（或反向延长线）上，则λ取负值(除去$\lambda\neq-1$)，此时称P点为外分点。

4.直线与x,y的一次方程也是一一对应的关系，即“平面内任意一条直线的方程都是x，y的一次方程”，“任何一个关于x，y的一次方程都表示一条直线”.

5.直线的倾角和斜率，反映了一条直线对于x轴正方向的倾斜程度.

在解析几何中，斜率可以用有向线段数量的比或点的坐标表示出来。在研究直线时，使用斜率比使用倾角方便得多，因此，斜率是研究两条直线位置关系的重要依据。正确地理解斜率的概念，熟练地掌握斜率公式，是学好直线这一章的关键。

对于倾角，要注意三个要点：

（1）直线向上的方向；

（2）x 轴的正方向；

（3）最小的正角。

这三者缺一不可，因此倾角的范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$。

直线的倾角的正切就是斜率 k，可记为 $k=\mathrm{tg}\alpha$。

注意，任何一条直线都有倾角，但不是每一条直线都有斜率。当 $\alpha=0°$ 或 $\alpha=90°$ 时，直线的特殊位置及直线方程的特殊形式，也应当充分注意。

6.直线方程的几种形式，是本章的重点。由经过两点的直线的斜率公式可推出直线方程的点斜式。

在直线方程的点斜式、斜截式、两点式、截距式中，又以点斜式为重点，因为斜截式可作为点斜式的特例，两点式可由点斜式导出，截距式又为两点式的特例。

以上直线方程的各种形式都是坐标为 x，y 的一次方程（二元一次方程），同时它们均可化为直线方程的一般式：$Ax+By+C=0$（A,B 不同时为零）。

平面内任何一条直线都是关于坐标 x，y 的二元一次方程；任何一个关于 x，y 的二元一次方程的图象都是一条直线。也就是说二元一次方程的集合与平面上直线的集合之间有一个一一对应的关系。

注意当倾角$\alpha=90^\circ$，即直线的斜率不存在时，不能应用点斜式、斜截式、两点式求直线的方程.

按照要求，不论通过什么形式去求直线的方程，其结果都应化为直线方程的一般式.

7.两直线的位置关系

（1）两条直线的平行和垂直　两条直线平行和垂直的条件十分重要，应掌握条件的推导过程，这样会加深对结论的记忆.

若两直线平行，则它们的斜率相等或同时不存在；若两直线的斜率相等或同时不存在，则它们平行.

若两条直线垂直，则它们的斜率互为负倒数或一个为零另一个不存在；若两条直线的斜率互为负倒数或一个为零另一个不存在，则这两条直线互相垂直.

（2）两条直线所成的角　用解析几何的方法研究角的问题，比较困难，由于两条直线相交构成的四个角中，锐角较为简单，所以课本规定两条直线（不互相垂直时）的夹角为锐角，以降低难度.

另外，由一条直线到另一条直线的角（带方向的角）也是求夹角公式的基础内容，要注意由l_1到l_2的角与由l_2到l_1的角是不同的.

设直线l_1和l_2的斜率分别为k_1和k_2，则l_1与l_2的夹角公式为 $\mathrm{tg}\theta=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|$，可以由它求出锐角$\theta$.

（3）两条直线的交点　由于交点应同时在两条直线上，故其坐标一定同时满足两条直线的方程（即是它们的公共解）．这就把几何中求两条直线交点的问题化为代数中解

二元一次方程组的问题

若二元一次方程组有唯一解，则两直线相交；若二元一次方程组无解，则两直线平行；若二元一次方程组有无数组解，则两直线重合.上述这三条反过来也成立.

若l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$　化为$y=k_1x+b_1$，

l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$　化为$y=k_2x+b_2$.

当$k_1\neq k_2$时，l_1与l_2相交，方程组有唯一解.

当$k_1=k_2$且$b_1\neq b_2$时，$l_1\parallel l_2$，方程组无解.

当$k_1=k_2$且$b_1=b_2$时，l_1、l_2重合，方程组有无数组解.

8.点到直线的距离公式

这个公式很重要，应用它可求两平行线间的距离、三角形的面积等.

课本对于点$P(x_0,y_0)$到直线$Ax+By+C=0$（$A\neq 0$，$B\neq 0$）的距离给出了证明，应掌握推导过程，并会灵活运用.

这个公式在$A=0$或$B=0$时，也是成立的.但这时不需要利用公式就可直接求出距离.例如点$P(2,3)$到直线$y=5$的距离$d=5-3=2$，点$P(2,3)$到直线$x=-2$的距离为$d=2-(-2)=4$.

教材提示

直线方程的建立是本单元学习的重点之一.这部分知识前后联系密切，衔接性强，学习中对每一部分都要认识清楚准确，否则会直接影响对其他知识的学习与理解.

学习这部分知识建议如下：

一、一次函数$y=kx+b$

一次函数$y=kx+b$的图象是直线，这条直线过$(0,b)$及$\left(-\frac{b}{k},\ 0\right)$两点，其中$x$是自变量，$y$是$x$的函数．$k,b$为常量，且$k\neq 0$．

若把$y=kx+b$变形为$kx-y+b=0$的形式，并把x，y看成未知数，则$kx-y+b=0$可视为二元一次方程，它的图象也是一条直线．

二、二元一次方程$Ax+By+C=0$

二元一次方程$Ax+By+C=0$（A，B不同时为零）与直线建立了一一对应的关系．

以某个二元一次方程的一组解为坐标的点都是同一条直线上的点；反之，这条直线上的点的坐标都是这个方程的解．这时，这个方程叫做直线的方程，这条直线叫做方程的直线．

三、平面内如何确定一条直线

方法之一：两个点（不重合）可确定一条直线．

方法之二：一个点和直线的方向也可确定一条直线．

四、如何确定一条直线的方向

确定直线的方向靠角度．一条直线l向上的方向与x轴的正方向所成的最小的正角，叫做直线的倾斜角，如图1．

倾斜角α的取值范围是$0°\leqslant\alpha<180°$．

这里一定要强调直线l向上的方向及x轴正方向这两个重要的条件．

五、直线的斜率

倾斜角不是$90°$的直线，它的倾斜角的正切叫做这条直

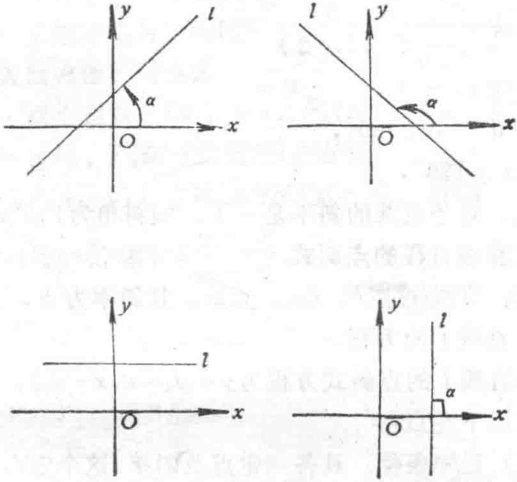

图 1

线的斜率，记为$k=\text{tg}\alpha$。

斜率表示倾斜角不等于90°的直线对于x轴的倾斜程度.

当$\alpha=0°$时，$k=0$，直线与x轴平行或重合.

当$0°<\alpha<90°$时，$k>0$.

当$\alpha=90°$时，k不存在，直线与x轴垂直.

当$90°<\alpha<180°$时，$k<0$.

求经过$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$两点的直线的斜率(前提条件是直线P_1P_2的倾角不等于90°)可利用公式$k=\text{tg}\alpha=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $(x_1\neq x_2)$.

【例】求经过$A(-2,0)$、$B(-5,3)$两点的直

线的斜率和倾斜角．

解：$k=\dfrac{3-0}{-5-(-2)}=1$．

$\therefore\quad \mathrm{tg}\alpha=-1$．

$\because\quad 0^\circ\leqslant\alpha<180^\circ$，

$\therefore\quad \alpha=135^\circ$．

因此，这条直线的斜率是-1，倾斜角为135°．

六、直线方程的点斜式

已知：直线l过点P_0（x_0，y_0），其斜率为k．

求：直线l的方程．

解得直线l的点斜式方程为$y-y_0=k(x-x_0)$．

注意以下几点：

（1）已知条件：具备一定点及斜率．这个定点的坐标一般是直接给出或间接给出的（如两直线的交点，或二次曲线的特殊点：圆心、切点、顶点、焦点等等），而斜率也是直接给出或间接给出的（如所求直线的倾角是已知直线倾角的2倍，所求直线与已知直线平行或垂直等）．

（2）结果应化为一般式．

（3）平行于y轴的直线，因为其斜率不存在，故不能用点斜式表示．

七、直线方程的斜截式

已知：直线l的斜率为k，与y轴的交点是（0，b）．

求：直线l的方程．

将已知条件代入点斜式，得直线l的方程为$y=kx+b$．

（1）已知点在y轴上，称这个点的纵坐标为直线l在y轴上的截距．