JINGJI SHUXUE

经济数学

◎ 主 编 徐海燕

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

经济数学

主　编　徐海燕
副主编　李兆斌　王永刚　张海英
主　审　俎冠兴

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

经济数学 / 徐海燕主编．—北京：北京理工大学出版社，2016.3
ISBN 978－7－5682－1895－5

Ⅰ．①经…　Ⅱ．①徐…　Ⅲ．①经济数学-高等学校-教材　Ⅳ．①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 032188 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http：//www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市天利华印刷装订有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 14
字　　数 / 329 千字
版　　次 / 2016 年 3 月第 1 版　2016 年 3 月第 1 次印刷
定　　价 / 45.00 元

责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 李志强

图书出现印装质量问题，请拨打售后服务热线，本社负责调换

前　言

“经济数学”是高等院校工商管理各专业必修的一门公共基础课．它不仅是学生学习后续专业课程的基础和工具，也对培养、提高学生的思维素质、创新能力、科学精神、治学态度以及用数学知识解决实际问题的能力有着非常重要的作用．

本书以“掌握概念、强化应用、培养技能”为重点，理论描述精确简约，具体讲解明晰易懂，很好地兼顾了高等院校各专业后续课程教学对经济数学知识的要求．全书内容包括函数的极限与应用、一元函数的微分与应用、一元函数的积分与应用、线性代数、概率论、数学实验，书后附有参考答案与提示．

本书在编写过程中，突出了以下特点：

（1）淡化抽象的数学概念，突出数学概念与实际经济问题的联系．

（2）较好地处理了初等数学与经济数学的衔接，突出经济应用．

（3）每章前配有经济案例，以便引出所学知识，便于学生理解基础知识，提高基本技能．

（4）练习题中选择了部分经济实例，旨在锻炼学生应用数学知识解决与专业相关问题的能力．

（5）本书添加了 MATLAB 语言基础，培养学生用计算机程序解决数学问题的能力．

本书由徐海燕任主编，组冠兴任主审，李兆斌、王永刚、张海英任副主编，参加编写的还有生静、王二伟、翟祥傑、吴晓明、顾越昆、崔若青、石勇、王峥、丁霞、孟玲．

在编写过程中，得到了编、审老师所在院校的大力支持和协助，在此一并表示感谢．

由于编者水平有限，时间比较仓促，书中不当之处恳请广大同仁及读者指正．

编　者

目　　录

第 1 章　函数的极限与应用

内容提要

函数关系是变量之间最基本的一种依赖关系．在经济活动、工程技术和自然现象中，往往同时遇到几个变量，这些变量不是孤立的，而是遵循一定规律相互依赖的，从而形成函数关系．本章将在复习和加深函数知识的基础上，进一步讨论函数的概念、性质、复合等问题，并介绍常用的几种经济函数，讨论函数的极限以及函数的连续性等问题．

1.1　函　　数

1.1.1　问题的提出

案例 1　存款到期本息

银行一年定期的存款利率是 3.25%，如果以定期一年的方式存入银行一笔钱，到期后本息和是多少?

案例 2　运费

旅客乘坐火车可免费携带不超过 20 kg 的物品，超过 20 kg 而不超过 50 kg 的部分每千克缴费 a 元，超过 50 kg 每千克缴费 b 元，那么运费与携带物品之间有什么样的关系?

1.1.2　函数的概念与性质

1. 函数的概念

例 1　在案例 1 中，设 x 元以定期的方式存入银行一年，到期后本息和为 y 元，则 $y=x(1+3.25\%)$.

由此发现，存入不同的金额，到期后的本息就随之变化．对于确定的数值 x（元)，y（元)总有确定的值与之对应．

变量与变量之间存在的这种相互对应关系，正是函数概念的实质．

定义 1　设集合 A 是一个非空实数集，按照某种确定的对应法则 f，对 A 中任意的实数 x，都有唯一确定的实数值与之对应，则称这种对应法则为集合 A 上的一个函数，记作 $y=f(x)$．x 称为自变量，y 称为因变量．自变量 x 的取值范围称为函数的定义域，常用 D 表

示；因变量 y 的取值范围称为函数的值域，常用 W 表示．

函数的定义域，是使函数的表达式有意义的一切实数的集合（也称作函数的自然定义域），在实际问题中应根据实际意义具体确定．

在讨论函数关系时，常说函数 $y=f(x)$ 在某点 x_0 有定义，即当自变量取某个已知值 x_0 时，函数 y 就有确定的值 $f(x_0)$ 与之对应，$f(x_0)$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值．

从函数的定义中知道，确定函数关系的两个主要因素是定义域和对应法则，两个函数只有这两个因素完全相同时，才表示它们是同一函数．不同的函数必须用不同的记号表示，如表示为 $f(x)$、$g(x)$、$\varphi(x)$ 等．

函数的表示方法主要有解析法、表格法、图像法．

2. 分段函数

定义 2　函数 $f(x)$ 在其定义域的不同区间内，对应不同的函数关系，这类函数称为分段函数．

例 2　在案例 2 中，物品重量 x 与运费 y 的函数关系分为三种情况．

第一种情况是物体重量不超过 20 kg：

$$y=0$$

第二种情况是物体重量超过 20 kg 而不超过 50 kg：

$$y=a(x-20)$$

第三种情况是物体重量超过 50 kg：

$$y=a(50-20)+b(x-50)$$

因此，函数是分段函数，即

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ a(x-20), & 20<x\leqslant 50\\ a(50-20)+b(x-50), & x>50\end{cases}$$

例 3　设 x 为任一实数，有

$$y=f(x)=[x]$$

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，简称为 x 的最大整数．此函数称为取整函数．

例 4　函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域 $W=\{1,\ 0,\ -1\}$，如图 1-1 所示．

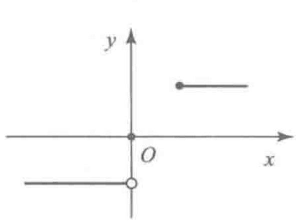

图 1-1

3. 函数的几种性质

1）奇偶性

设函数的定义域 I 为关于原点对称的区间，若对于每一个 $x\in I$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则函数 $f(x)$ 为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$，则函数 $f(x)$ 为偶函数．奇函数的图像关于原点对称，如图 1-2 所示；偶函数的图像关于 y 轴对称，如图 1-3 所示．

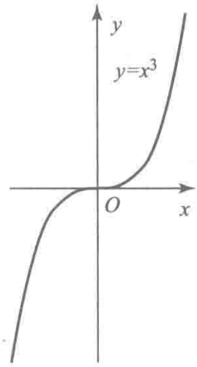

图 1-2

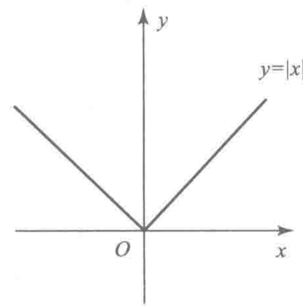

图 1-3

2）单调性

若对于区间 I 内任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的，如图 1-2 所示；当 $x_1<x_2$ 时，若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的，如图 1-4 所示．单调增加和单调减少的函数统称为单调函数．

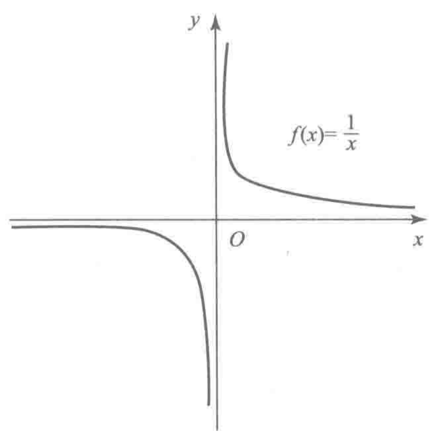

图 1-4

3）周期性

设存在不为零的常数 T，使得对于定义域 I 内任意的 x，有 $x+T\in I$，且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，通常称满足上述公式的最小正数 T 为最小正周期．例如，$y=\sin x$、$y=\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数．

4）有界性

设函数 $y=f(x)$ 在某一区间 I 内有定义（区间 I 可以是函数 $f(x)$ 的整个定义域，也可以是定义域的一部分），如果存在正数 M，使得对该区间 I 的任何一个自变量 x 的值，其对应的函数值都满足不等式 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在该区间 I 内有界．如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在该区间 I 内无界．

例如，函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是无界的，而在区间 $(\delta,+\infty)$ 内是有界的，其中 δ 是某个确定的正数．

1.1.3　初等函数

初等函数是本门课程研究的主要对象，下面首先讨论基本初等函数．

1. 基本初等函数

基本初等函数包括幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数．

1）幂函数

函数 $y=x^\mu$（μ 为常数）称为幂函数．

例如，$y=x$，$y=x^2$，$y=\sqrt{x}$等．这一类函数的定义域可以因 μ 的不同而不同．但不论 μ 取何值，幂函数 $y=x^\mu$ 在（0，$+\infty$）内总有定义，如图 1-5 所示．

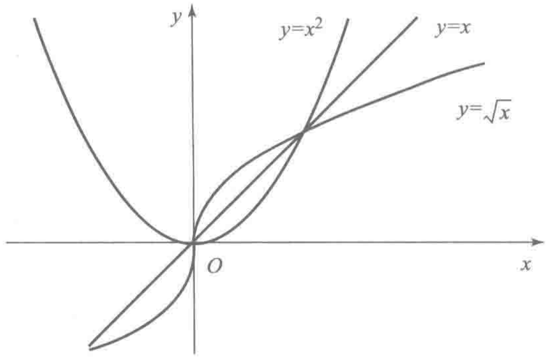

图 1-5

当 $\mu>0$ 时，幂函数的图形通过点（0，0）和（1，1），在（0，$+\infty$）内严格单调增加且无界．

2）指数函数

$y=a^x$（a 为常数，且 $a>0$，$a\neq1$）称为指数函数．其定义域为（$-\infty$，$+\infty$），值域为（0，$+\infty$）．当 $a>1$ 时，函数严格单调增加且无界；当 $0<a<1$ 时，函数严格单调减少且无界，如图 1-6 所示．

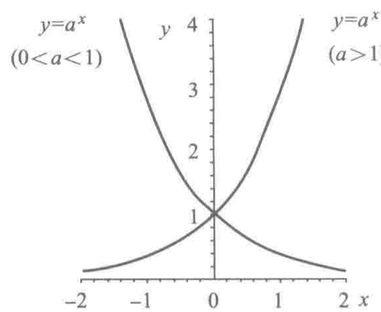

图 1-6

$y=\mathrm{e}^x$ 是微积分及应用中常用的指数函数，常数 $\mathrm{e}=2.718\,281\,8\cdots$.

3）对数函数

$y=\log_a x$（a 为常数，且 $a>0$，$a\neq1$），称为对数函数，它是指数函数 $y=a^x$ 的反函数．其定义域为（0，$+\infty$），值域为（$-\infty$，$+\infty$）．当 $a>1$ 时，函数严格单调增加且无界；当 $0<a<1$ 时，函数严格单调减少且无界，如图 1-7 所示．函数的图形都过点（1，0），$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）与 $y=\log_a x$（$0<a<1$）的图形关于 x 轴对称．以 e 为底的对数称为自然对数，记为 $y=\ln x$.

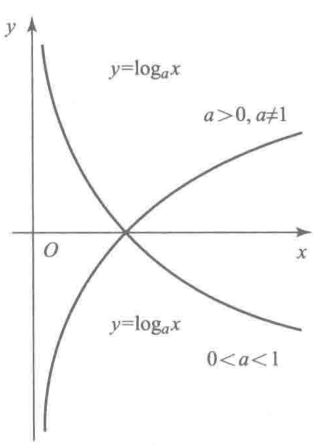

图 1-7

4）三角函数

正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数统称为三角函数．

正弦函数 $y=\sin x$：定义域为（$-\infty$，$+\infty$），值域为［-1，1］，它是以 2π 为周期、有界的奇函数，如图 1-8 所示．

余弦函数 $y=\cos x$：定义域为（$-\infty$，$+\infty$），值域为［-1，1］，它是以 2π 为周期、有界的偶函数，如图 1-9 所示．

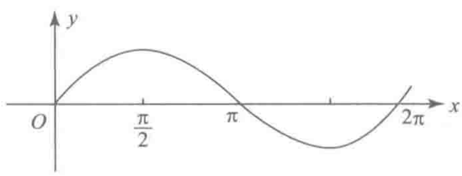

图 1-8

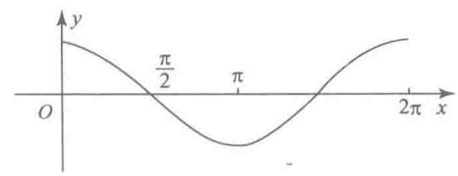

图 1-9

正切函数 $y=\tan x$：定义域为$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$（$k=0$，$\pm1$，$\pm2$，…），值域为（$-\infty$，$+\infty$），它是以 π 为周期、单调增加、无界的奇函数（在每一个周期内），如图 1-10 所示．

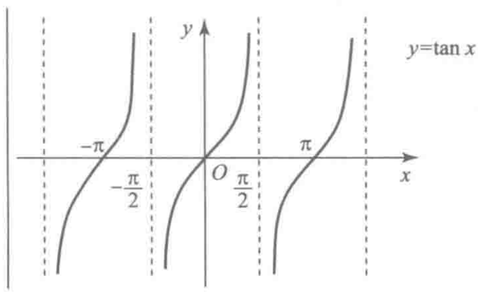

图 1-10

余切函数 $y=\cot x$：定义域为$(k\pi,\ (k+1)\pi)$（$k=0$，±1，±2，…），值域为（$-\infty$，$+\infty$），它是以 π 为周期、单调减少、无界的奇函数（在每一个周期内），如图 1-11 所示．

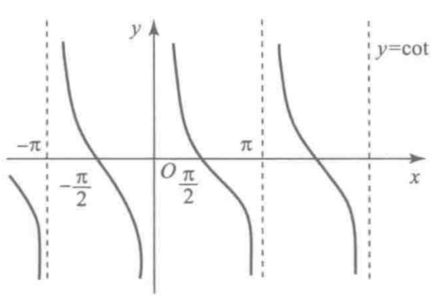

图 1-11

5）反三角函数

反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数统称为三角函数．

反正弦函数 $y=\arcsin x$：定义域为［-1，1］，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，它是有界的、单调

增加的奇函数，是正弦函数 $y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上的反函数，如图 1-12 所示．

反余弦函数 $y=\arccos x$：定义域为 $[-1,\ 1]$，值域为 $[0,\ \pi]$，它是有界的、单调减少的函数，是余弦函数 $y=\cos x$，$x\in[0,\ \pi]$ 上的反函数，如图 1-13 所示．

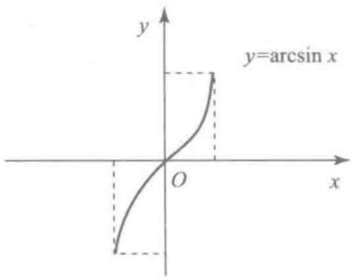

图 1-12

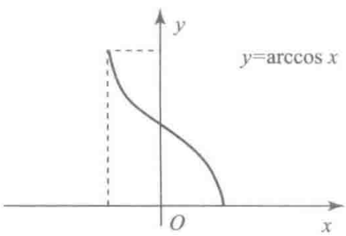

图 1-13

反正切函数 $y=\arctan x$：定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$，它是有界的、单调增加的奇函数，是正切函数 $y=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$上的反函数，如图 1-14 所示．

反余切函数 $y=\text{arccot}\,x$：定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$，值域为 $(0,\ \pi)$，它是有界的、单调减少的函数，是余切函数 $y=\cot x$，$x\in(0,\ \pi)$ 上的反函数，如图 1-15 所示．

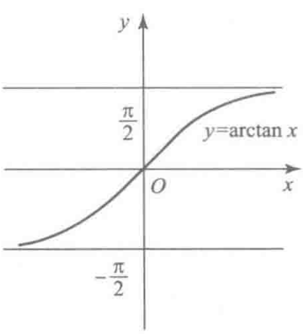

图 1-14

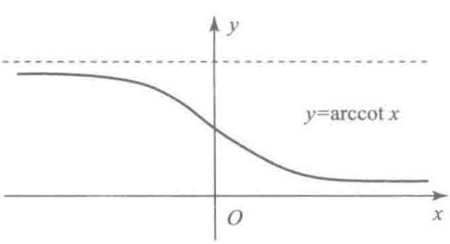

图 1-15

2. 复合函数

在同一现象中，两个变量的关系有时不是直接的，而是通过另一个变量间接联系起来的．

定义 3 设函数 $y=f(u)$，定义域为 D_u，函数 $u=\varphi(x)$，定义域为 D_x，值域为 W_u，当函数 $u=\varphi(x)$ 的值域 W_u 全部或部分落在函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_u 时，称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是 x 的复合函数．它是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，其定义域为 D_x，称 u 为中间变量．

例如，有两个函数 $y=\sin u$，$u=3x+1$，而函数 $u=3x+1$ 的函数值全部落在函数 $y=\sin u$ 的定义域内，所以这两个函数复合而成的函数为 $y=\sin(3x+1)$，其定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$.

必须指出，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的．例如，$y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+2$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $u=x^2+2$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[2, +\infty)$，而 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1, 1]$，在 $u=x^2+2$ 中无论 x 取什么值，对应的 u 值都不属于区间 $[-1, 1]$，因而不能使 $y=\arcsin u$ 有意义．

例 5　写出 $y=\cos^2 x$ 的复合过程．

解　设 $u=\cos x$，$y=u^2$．

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合而成．例如，设 $y=\sqrt{u}$，$u=\tan v$，$v=\dfrac{x^2}{8}$，则得复合函数 $y=\sqrt{\tan\dfrac{x^2}{8}}$，这里 u 及 v 都是中间变量．

3. 初等函数

定义 4　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和复合步骤构成且用一个数学式子表示的函数，称为初等函数．

例如，$y=e^{\cos(2x+1)}$，$y=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 等都是初等函数．

不满足此定义的函数均称为非初等函数．一般地，分段函数不是初等函数．

1.1.4　常见的经济函数模型

1. 需求函数

影响人们消费的因素多种多样，除了商品的价格因素外，还与人们的年龄层次、收入、偏好、区域、环境等诸多因素有关．如果不考虑价格以外的其他因素，商品价格越低，消费者购买欲越强；商品价格越高，购买欲越弱．

需求函数：设 p 表示商品的价格，Q 表示需求量，称 $Q=f(p)$ 为需求函数．

常见的需求函数有如下类型：

线性函数：$Q=b-ap$，a，$b>0$

幂函数：$Q=kp^{-a}$，a，$k>0$

指数函数：$Q=ae^{-bp}$，a，$b>0$

2. 供给函数

需求是对消费者而言，供给则是对生产者而言．商品的市场供给量 Q，除了要满足一定消费群体的需求外，也受到商品价格 p 的制约，价格上涨将刺激生产者向市场提供更多的商品，使供给量增加；反之，价格下跌将使供给量减少．

供给函数：设 p 表示商品的价格，Q 表示供给量，称 $Q=g(p)$ 为供给函数．

常见的供给函数有如下类型：

线性函数：$Q=ap-b$，a，$b>0$

幂函数：$Q=kp^{a}$，a，$k>0$

指数函数：$Q=ae^{bp}$，a，$b>0$

均衡价格：当市场上某种商品的需求量与供给量相等时，此时的商品价格 p_0 称为均衡

价格．

例 6 一季度鸡蛋的供给量 Q（kg）与价格 p（元）的函数模型为 $Q(p)=-3+12p$，需求量 Q（kg）与价格 p（元）的函数模型为 $Q(p)=-2p+27$，求一季度鸡蛋的均衡价格 p_0．

解 由供需均衡条件，可得

$$-3+12p=-2p+27$$

解得 $p=2.5$（元），因此一季度鸡蛋的均衡价格 $p_0=2.5$（元）．

3. 总成本函数

总成本包括固定成本和可变成本两部分．固定成本与产量和销售量无关，即包括设备的固定费用和其他管理费用，而可变成本随着产量（或销售量）的不同而发生变化．

总成本函数：设 C_0 为固定成本，q 表示产量（或销售量），则可变成本为 $C_1(q)$，称 $C(q)=C_0+C_1(q)$ 为总成本函数，简称成本函数．

平均成本函数可表示为

$$\overline{C}(q)=\frac{C(q)}{q}$$

例 7 某食用油加工厂加工菜籽油，日产能力为 60 t，固定成本为 6 000 元，每加工 1 t 食用油成本增加 200 元，求出每日成本与日产量的函数关系，并分别求出当日产量是 30 t、40 t 时的总成本及平均成本．

解 设每日成本为 C，日产量为 q，则每日的成本与日产量的函数关系为

$$C(q)=6\ 000+200q(0\leqslant q\leqslant 60)$$

当产量 $q=30$ t 时：

$$C(30)=6\ 000+200\times 30=12\ 000\text{（元）}$$

平均单位成本：

$$\overline{C}(30)=\frac{C(30)}{30}=400\text{（元）}$$

当产量 $q=40$ t 时：

$$C(40)=6\ 000+200\times 40=14\ 000\text{（元）}$$

平均单位成本：

$$\overline{C}(40)=\frac{C(40)}{40}=350\text{（元）}$$

所以，在一定范围内，日产量越大，平均单位成本越低．

4. 收益（入）函数

收益函数是描述收入、销售价格和销售量之间关系的表达式，一般有两种表示方法．

收益函数：设 q 表示销售量，P 表示价格，R 表示收益，则收益函数可表示为

$$R=q\cdot P$$

当销售量 q 是价格的函数，即 $q=q(P)$ 时，收益函数可表示为

$$R=q(P)\cdot P$$

例 8 LX3 电脑无线鼠标的销售价格为 80 元时，月销售量为 5 000 个，销售价格每提高 2 元，月销售量会减少 100 个．在不考虑降价及其他因素时，求：

(1) 这种商品月销售量与价格之间的函数关系；

(2) 当价格提高多少元时，这种商品会卖不出去；

(3) 月销售量与价格之间函数关系的定义域.

解　(1) 设无线鼠标的价格为 P 元/个，月销售量为 q 个，则

$$q=5\ 000-100\left(\frac{P-80}{2}\right)=5\ 000-50P+4\ 000=9\ 000-50P$$

(2) 无线鼠标卖不出去时，则 $q=0$，即

$$9\ 000-50P=0$$

解得

$$P=180 \text{ 元}$$

(3) 月销售量与价格之间函数关系的定义域为

$$\text{定义域 } D=[80,\ 180]$$

而且，从理论上讲，当价格提高到 180 元时，这种商品就会卖不出去.

5. 利润函数

在经济学中，收益与成本之差称为利润.

利润函数：当产量等于销售量时，利润 L 可以表示为产量 q 的函数，即

$$L(q)=R(q)-C(q)$$

6. 关于利息的函数模型

在金融业务中，常用两种计息方式：单利和复利.

1) 单利方式

单利是指仅计算本金利息，每一计息期的利息都是固定不变的.

单利方式：设 P_0 为本金，r 是计息期的利率，n 是计息期，则

$$P=P_0+P_0rn=P_0(1+rn)$$

2) 复利方式

复利是指不仅就本金计算利息，利息也同样生息.

复利方式：设 P_0 为本金，r 是计息期的利率，n 是计息期，则第 n 个计息期满后的本利和为

$$P_n=P_0\ (1+r)^n$$

如果每年计息 m 次，则一年后的本利和为 $P_0\ \left(1+\frac{r}{m}\right)^m$.

例 9　王女士存入银行 20 000 元人民币，年利率为 3.6%，存期一年. 用复利方法分别计算本利和与利息：(1) 年计息一次；(2) 半年计息一次；(3) 3 个月计息一次的.

解　本金 $P_0=20\ 000$ 元，$r=3.6\%$，计息期 $n=1$ 年.

(1) 若一年计息一次，则一年的本利和与利息为

$$P_1=20\ 000(1+3.6\%)=20\ 720\ (\text{元})$$

$$\text{利息 } I=20\ 720-20\ 000=720\ (\text{元})$$

(2) 若半年计息一次，则每期利率为 $\frac{3.6\%}{2}$，计息期为 2，则 1 年的本利和与利息为

$$P_2=20\ 000\left(1+\frac{3.6\%}{2}\right)^2=20\ 726.48\ (\text{元})$$