

全日制普通高级中学（必修）

数学第二册（下A）

教师教学用书

人民教育出版社中学数学室 编著



人民教育出版社

全日制普通高级中学（必修）

数 学 第二册（下A）

教师教学用书

人民教育出版社中学数学室 编著

人民教育出版社

（130001）地址：北京中关村大街22号（北京）（130001）地址：北京中关村大街22号（北京）

全日制普通高级中学（必修）

数学 第二册（下 A）

教师教学用书

人民教育出版社中学数学室 编著

*

人民教育出版社 出版发行

网址：<http://www.pep.com.cn>

北京天宇星印刷厂印装 全国新华书店经销

*

开本：889 毫米×1 194 毫米 1/16 印张：4.25 字数：118 000

2006 年 10 月第 2 版 2007 年 11 月第 3 次印刷

印数：8 001 ~ 11 000

ISBN 978 - 7 - 107 - 18012 - 5 定价：5.30 元

G · 11101（课）

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与本社出版科联系调换。

（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编：100081）

第九章 直线、平面、简单几何体

说 明

(I)

(I)

一、教学要求

(6)

本书是人民教育出版社中学数学室编著的《全日制普通高级中学教科书(必修)数学第二册(下A)》的教师教学用书。编写时按教科书分章安排,每章包括概述、内容分析、习题参考解答三个部分。参加编写本书的有田载今、饶汉昌、左怀玲,责任编辑是李海东。

3. (88) 空间直线和平面的位置关系: 掌握直线和平面平行的判定定理和性质定理; 掌握直线和平面垂直的判定定理和性质定理; 掌握斜线在平面上的射影、直线和平面所成的角、直线和平面的距离的概念; 了解三垂线定理。

4. (88) 了解两个平面的位置关系: 能够画出两个平面的各种位置关系的图形; 掌握两个平面平行的判定定理和性质定理; 掌握二面角、二面角的平面角、两个互相垂直的平面的概念; 掌握两个平面垂直的判定定理和性质定理。

5. 进一步熟悉反证法, 会用反证法证明简单的问题。

6. (81) 棱柱的概念; 掌握棱柱的性质; 会用斜二测画法画水平放置的棱柱的直观图。

7. 了解棱锥的概念; 掌握正棱锥的性质; 会画正棱锥的直观图。

8. (81) 多面体: 凸多面体、正多面体的概念; 了解多面体的表面积公式。

9. (81) 球的概念; 掌握球的性质; 掌握球的体积及表面积公式。

10. (81) 本章教学, 培养辩证唯物主义观点和空间想象能力。

二、内容编排

本章分为两大节, 第一节是“空间直线和平面”, 第二节是“简单几何体”。

1. 直线和平面是最基本的几何元素, 直线和平面之间的位置关系是立体几何的基础知识。学好这一部分内容, 对于学生在已有的平面图形知识基础上, 建立空间观念, 实现从认识平面图形到认识立体图形这一飞跃, 是非常重要的。

第一节包括 6 个小节, 按照平面、空间直线、直线和平面平行、直线和平面垂直、两个平面平行、两个平面垂直的顺序编排, 这 6 个小节之间密切联系, 前面内容是后面内容的准备, 后面内容既巩固了前面内容, 又发展和推广了对前面内容的认识, 从而形成 6 个关于空间直线和平面位置关系的概念, 判定和性质的知识体系。

本大节无论在全章的知识系统中, 还是在培养学生的辩证唯物主义观点、空间想象能力和逻辑思维能力方面, 都具有重要的基础作用。

2. 简单几何体, 是指最基本、最常见的几何体。按照大纲的规定, 本章中有关简单几何体只讲棱柱、棱锥、多面体和正多面体、球。这些内容依次排列, 构成第二节所含的 3 个小节。

目 录

第九章 直线、平面、简单几何体 (1)

- I 概述 (1)
- II 内容分析 (3)
- III 习题参考解答 (17)

第十章 排列、组合和二项式定理 (29)

- I 概述 (29)
- II 内容分析 (30)
- III 习题参考解答 (38)

第十一章 概率 (48)

- I 概述 (48)
- II 内容分析 (49)
- III 习题参考解答 (57)

第九章 直线、平面、简单几何体

I 概述

一、教学要求

1. 掌握平面的基本性质，会画图表示平面。
2. 了解空间两条直线的位置关系，能够画出空间两条直线的各种位置关系的图形；掌握两条直线所成的角和距离的概念（对于异面直线的距离，只要求会利用给出的公垂线计算距离）。
3. 了解空间直线和平面的位置关系，能够画出空间直线和平面的各种位置关系的图形；掌握直线和平面平行的判定定理和性质定理；掌握直线和平面垂直的判定定理和性质定理；掌握斜线在平面上的射影、直线和平面所成的角、直线和平面的距离的概念；了解三垂线定理及其逆定理。
4. 了解两个平面的位置关系，能够画出两个平面的各种位置关系的图形；掌握两个平面平行的判定定理和性质定理；掌握二面角、二面角的平面角、两个平行平面间的距离的概念；掌握两个平面垂直的判定定理和性质定理。
5. 进一步熟悉反证法，会用反证法证明简单的问题。
6. 了解棱柱的概念，掌握棱柱的性质，会用斜二测画法画水平放置的平面图形和直棱柱的直观图。
7. 了解棱锥的概念，掌握正棱锥的性质，会画正棱锥的直观图。
8. 了解多面体、凸多面体、正多面体的概念，了解多面体的欧拉公式。
9. 了解球的概念，掌握球的性质，掌握球的体积及表面积公式。
10. 通过本章教学，培养辩证唯物主义观点和空间想象能力，发展逻辑思维能力。

二、内容编排

本章分为两大节：第一大节是“空间直线和平面”，第二大节是“简单几何体”。

1. 直线和平面是最基本的几何元素，空间直线和平面的位置关系是立体几何的基础知识。学好这一部分内容，对于学生在已有的平面图形知识基础上，建立空间观念，实现从认识平面图形到认识立体图形这一飞跃，是非常重要的。

第一大节包括6个小节，按照平面、空间直线、直线和平面平行、直线和平面垂直、两个平面平行、两个平面垂直的顺序编排。这6个小节之间密切联系，前面内容是后面内容的根据，后面内容既巩固了前面内容，又发展和推广了对前面内容的认识，从而形成了一个关于空间直线和平面位置关系的概念、判定和性质的知识体系。

本大节无论在全章的知识系统中，还是在培养学生的辩证唯物主义观点、空间想象能力和逻辑思维能力方面，都具有重要的基础作用。

2. 简单几何体，是指最基本、最常见的几何体。按照大纲的规定，本章中有关简单几何体只列入棱柱、棱锥、多面体和正多面体、球。这些内容依次排列，构成第二大节所含的3个小节。

由于初中几何已学过圆柱和圆锥的有关内容,台体(圆台、棱台)又可以通过从大锥体截去小锥体得出,为节约课时以实现高中数学教学内容的更新,本章中的简单几何体比原立体几何必修本在内容上精简幅度较大,删减了圆柱、圆锥、圆台、棱台等,只保留了最基本的多面体(棱柱和棱锥)、一般多面体的有关概念和球.

关于棱柱和棱锥,教学内容包括有关概念、性质、直观图的画法三部分.其中直观图的画法仅重点讨论直棱柱和正棱锥的直观图.为了对有关体积的计算形成统一认识,第二大节中第一个阅读材料安排了“柱体和锥体的体积”,介绍了祖暅原理,并根据这一原理对柱体和锥体的体积公式作了理论上的说明.

关于多面体,教学内容包括有关概念和欧拉公式.其中关于欧拉公式的内容,是以研究性学习课题的形式让学生进行探究学习的.此外,还安排了阅读材料“欧拉公式和正多面体的种类”.

关于球,教学内容包括有关概念、性质、球的体积和表面积.本章中通过“分割——求近似和——化为准确和”的方法,即运用“化整为零,又积零为整”的极限思想,对于球的体积和表面积公式进行了推导.这种处理方法与原立体几何必修本相比较有较大变化.教学中对这两个公式的推导,只要求了解其基本思想方法即可,重点在于掌握公式本身,而不要求学生掌握公式推导的细节.

第二大节的内容,既是对简单几何体基础知识的重点讨论,又是第一节中空间直线和平面位置关系相关知识的综合运用.

3. 本章教科书的重点,是平面的基本性质、空间直线的位置关系、直线与平面之间及两平面之间的平行和垂直关系.其中关于平面基本性质的公理,是研究立体几何的重要基础.掌握好上述内容,就抓住了立体几何中最根本的内容,其他部分就容易学习了.

使学生建立正确的空间观念,在对图形的认识方面实现由平面到立体的过渡,是本章教学中的难点.为了克服这一难点,可注意以下几点.

(1) 联系实际提出问题和引入概念,合理运用教具,加强由模型到图形,再由图形返回模型的基本训练.由对照模型画直观图入手,逐步培养由图形想象出空间位置关系的能力.

(2) 从图形入手,有序地建立图形、文字、符号这三种数学语言的联系.

在“直线、平面、简单几何体”这章中,立体图形是研究的对象,对它的一般描述是按“三维对象(几何模型)——图形——文字——符号”这种程序进行的.其中,图形是将考察对象第一次抽象后的产物,是首先使用的数学工具,也是形象、直观的语言.完成了由对象到图形的飞跃,才有可能顺利进行后续内容的学习.因此,加强图形的运用十分重要.教学中应该首先强调图形语言,在图形的典型性、简明性、直观性、概括性及趣味性等方面下功夫,充分发挥其作用.文字语言是对图形的描述、解释与讨论,符号语言则是文字语言的简化和再次抽象.显然,首先建立的是图形语言,其次是文字语言,再次是符号语言,最后形成的应是对对象的三种数学语言的综合描述,即整体认识.如果有了这种整体认识,三种语言达到融汇贯通的程度,即能由一种描述转化为其他描述,就基本把握住对象了.

用文字和符号描述对象时,必须紧密联系图形,使抽象与直观结合起来,即在图形的基础上发展其他数学语言.如果能在阐述定义、定理、公式等重要内容时,先给出图形,再用文字和符号进行描述,综合运用几种数学语言,使其优势互补,就有可能收到更好的效果,给人留下的印象更为深刻.

(3) 联系平面图形的知识,利用对比、引申、联想等方法,找出平面图形和立体图形的异同,以及两者的内在联系,逐步培养学生将立体图形转化为平面图形的能力.

4. 在本章教科书中,证明占有较重要的地位.进一步发展学生的逻辑思维能力,是教学目的之一.教科书中所用的证明方法,除大量使用通常的直接证法外,还用间接证法中的反证法以及同一法的思想.这些证明方法都是根据具体命题的需要而选择采用的,证法简明是选择的主要标准.教学中应要求学生会

用反证法证明简单的问题；至于同一法的思想的应用，只限于教科书所界定的程度，不要求出现同一法的名词，也不要求学生掌握用同一法证题。

三、课时分配

本章教学时间约需 39 课时，具体分配如下（仅供参考）：

- | | |
|--------------------|--------|
| 9.1 平面 | 约 3 课时 |
| 9.2 空间直线 | 约 5 课时 |
| 9.3 直线与平面平行的判定和性质 | 约 3 课时 |
| 9.4 直线与平面垂直的判定和性质 | 约 4 课时 |
| 9.5 两个平面平行的判定和性质 | 约 3 课时 |
| 9.6 两个平面垂直的判定和性质 | 约 3 课时 |
| 9.7 棱柱 | 约 4 课时 |
| 9.8 棱锥 | 约 4 课时 |
| 研究性学习课题：多面体欧拉定理的发现 | 约 3 课时 |
| 9.9 球 | 约 4 课时 |
| 小结与复习 | 约 3 课时 |

II 内容分析

引言

1. 本章一开始安排了天安门广场升国旗的照片，并配了旗杆、旗杆在地面内的影子，以及地面内的直线的示意图。这些照片及图和引言中所举的实际问题的例子直接相关。

引言首先从几何图形就是点的集合说起，然后结合具体图形的例子，给出平面图形和立体图形的概念，即各点都在同一个平面内的图形是平面图形，各点不都在同一个平面内的图形是立体图形。平面图形和立体图形都是空间图形。这里的“空间”包括平面（二维空间），平面是三维空间的一部分。

土木建筑、机械设计、航行测绘等大量的实际问题，都要涉及对立体图形的研究。引言以旗杆垂直立在地平面上为例，提出“旗杆与地平面内的直线存在什么样的位置关系？竖立旗杆时怎样才能保证它垂直立于地平面上？如果旗杆的高度为 h ，旗杆底端与地平面内某条直线 l 间的距离为 d ，那么旗杆顶端到 l 的距离是多少”等问题，并指出要解决这类问题，就要用到有关立体图形的知识，由此激发学习立体图形的兴趣。

2. 引言在引出立体图形后，指出研究立体图形，一方面要注意立体图形问题与平面图形问题的区别，考虑问题需要着眼于整个空间，而不能只局限于一个平面；另一方面要注意立体图形与平面图形的联系，立体图形中有些点在同一平面内，对平面图形的研究是讨论立体图形的基础，立体图形的问题常常转化为平面图形的问题来解决。教学中应注意借助学生已有的平面图形知识基础，引入新知识，提出新问题，使学生自然地进入新的学习阶段。

3. 引言指出：学习立体图形的知识，需要空间想象力，即对于几何图形的形状、大小、位置关系及其运动变化的认识与处理的能力。空间想象力，是学习立体几何时应着重培养的能力。但在学习的初始阶段，

学生对它不了解. 教学中可结合例子简要地说明它的含义, 并提醒学生要注意培养这一能力.

4. 引言的最后部分对本章的主要内容作了概述, 即本章将在初中几何知识的基础上, 进一步研究有关立体图形的基础知识, 研究对象主要包括最基本的立体图形——空间的直线、平面和简单几何体, 研究内容主要是这些对象的几何性质、位置关系的判定、画法、度量计算以及相关的应用问题等. 教学中可结合例子简要地对上述内容作出适当的解释, 使学生对本章的概貌有一个初步的印象.

9.1 平面

1. 平面是最基本的几何概念, 对它只加以描述而不定义. 教学中借助实例来引入平面的概念是必要的, 但需指出几何中的平面是无限伸展的, 可以联系直线的无限伸展性来理解.

讲平面的表示法时, 应说明所画的平行四边形表示它所在的平面, 必要时可以将它伸展出去. 有时根据需要也用其他平面图形(例如三角形等)表示平面.

2. 以点作为元素, 直线、平面等都是由点构成的集合. 从点集的角度认识几何图形问题, 是数学发展的结果. 这对于利用数形结合, 深入研究数学, 是非常必要的.

几何中许多符号的规定都出自将图形视为点集. 例如, 点 A 在平面 α 内, 记作 $A \in \alpha$; 点 A 不在平面 α 内, 记作 $A \notin \alpha$. 直线 l 在平面 α 内, 记作 $l \subset \alpha$; 直线 l 不在平面 α 内, 记作 $l \not\subset \alpha$. 这里的点 A 是平面 α 的元素, 而直线 l 是平面 α 的子集, 因此, 在符号的使用上有区别. 在介绍有关符号的使用时, 结合前面所学的集合知识讲一讲规定符号的背景, 可以帮助学生正确使用符号.

3. 平面的基本性质, 即教科书中三个公理, 是研究立体图形的基本理论基础, 必须要求学生很好地掌握. 所谓公理, 就是不必证明而直接承认的真命题, 它们是进一步推理的出发点和根据.

数学语言是在数学思维中产生和发展的, 又是数学思维不可缺少的重要工具. 在对数学语言的研究中, 通常按数学语言所使用的主要词汇, 将数学语言分为三种: 文字语言、符号语言和图形语言. 例如, “垂直于同一平面的两条直线平行”是一个立体几何定理的文字语言形式; “ $a \perp \alpha, b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b$ ”是该定理的符号语言形式. 几种语言各有特点, 发挥着不同的功能, 又互相依存, 互相制约. 对于上述三个公理, 教科书都用了三种形式的数学语言即图形、文字、符号加以描述. 加强三种数学语言功能的发挥, 更有效地培养学生的空间想象力, 是本章教学中必须认真考虑的问题.

4. 公理 1 的内容有关直线与平面的结合关系, 从集合的角度看, 这个公理就是说, 如果一条直线(点集)中有两个元素(点)属于一个平面(点集), 那么这条直线就是这个平面的真子集. 用它既可判定直线是否在平面内, 又可检验平面.

5. 公理 2 的内容有关两个平面的结合关系. 在原立体几何必修本中这个公理是这样叙述的: “如果两个平面有一个公共点, 那么它们有且仅有一条通过这个点的公共直线.” 显然, 这里所说的两个平面是不会重合的, 否则就不是“有且仅有一条通过这个点的公共直线”了. 事实上, 严格地说, 作为公理, 以上结论应叙述为“如果两个平面有一个公共点, 那么它们有一条通过这个点的公共直线”. 至于“仅有”两字, 对于不重合的两个平面是可以推出的, 对于重合的两个平面, 则不应提“仅有”. 教科书为了降低难度, 只针对两个不同平面而言, 将公理内容作了扩大处理, 把可推出的“仅有”也直接写入结论. 读了原必修本上的文字, 可能有人会问: 这两个平面的过这个点的公共直线有且仅有一条, 此外还有没有不过这个点的公共直线? 它们除这条公共直线外还会有公共点吗? 产生这样的疑问的原因是上述公理的文字中“有且仅有一条”的对象交代得不够清楚, 是指“公共直线有且仅有一条, 它通过这个点”呢? 还是单指“通过这个点的公共直线”而不包括其他公共直线呢? 因此, 本章中这个公理就改述为“如果两个平面有一个公共点, 那么它们还有其他公共点, 且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线”. 这样就能结合已学

的集合知识准确清楚地说明这个问题.

讲公理 2 时, 应强调对于不重合的两个平面, 只要它们有公共点, 它们就是相交的位置关系, 交集是一条直线.

6. 公理 3 及其推论的内容关系到确定平面的条件. 应使学生透彻理解公理中“有且只有一个”的含义. 这里“有”是说图形存在, “只有一个”是说图形唯一. 本公理强调的是存在和唯一两方面, 因此, “有且只有一个”必须完整地使用. 应向学生指出, 不能仅用“只有一个”来替代“有且只有一个”, 否则就未表达存在性.

7. 讲解公理 3 时, 应突出“不在同一直线上”和“三点”几个字. 可引导学生认识到经过一点、两点或同一直线上的三点可有无数的平面; 过不在同一直线上的四点, 不一定有平面. 这样可使学生重视“不在同一直线上的三点”这一条件的重要性.

8. 公理 3 的推论 1 的证明包括存在性和唯一性两部分, 另外两个推论的证明也要有这两部分.

推论 2 和推论 3 可证明如下.

推论 2 经过两条相交直线, 有且只有一个平面.

证明: 如图 9-1, 设直线 a 、 b 相交于点 C , 在 a 、 b 上分别取不同于点 C 的点 A 和 B , 点 A 、 B 、 C 是不在同一直线上的三点 (否则与 a 、 b 为两条相交直线矛盾).

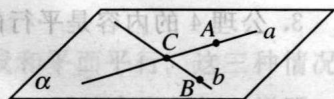


图 9-1

由公理 3, 过 A 、 B 、 C 三点有且只有一个平面 α . 因为 a 、 b 上各有两点在 α 内, 所以 a 、 b 在 α 内. 因此, 过 a 、 b 有平面 α .

因为点 A 、 B 、 C 分别在直线 a 、 b 上, 所以它们在过 a 、 b 的平面内. 又由公理 3, 过点 A 、 B 、 C 的平面只有一个, 所以过直线 a 、 b 的平面只有一个.

推论 3 经过两条平行直线, 有且只有一个平面.

证明: 设直线 a 、 b 满足 $a \parallel b$. 由平行线的定义, a 、 b 在同一平面内. 这就是说, 过 a 、 b 有平面 α (图 9-2).

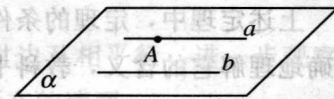


图 9-2

设点 A 为直线 a 上任一点, 则点 A 在直线 b 以外. 点 A 和直线 b 在过 a 、 b 的平面 α 内. 又由公理 3 的推论 1, 过点 A 和直线 b 的平面只有一个, 所以过直线 a 、 b 的平面只有一个.

9. 本小节中使用了 $\in$ 、 $\notin$ 、 $\subset$ 、 $\cap$ 等符号, 它们源自集合符号, 在读法上仍用几何语言. 例如, $A \in \alpha$, 读作“点 A 在平面 α 内”; $a \subset \alpha$, 读作“直线 a 在平面 α 内”; $\alpha \cap \beta = l$, 读作“平面 α 、 β 相交于直线 l ”. 本章中有关的这类符号, 在读法上一般都这样处理. 需要附带指出, 本章中几何符号的用法符合有关国家标准的规定. 使用时原则上与集合符号的含义一致, 但为方便起见, 个别地方的用法与集合符号略有不同. 例如, 直线 a 与 b 相交于点 A , 记作 $a \cap b = A$, 而不记作 $a \cap b = \{A\}$. 这里的 A 既是一个点, 又可以理解为只含一个元素 (点) 的集合.

10. 本小节的练习中, 安排了一些关于图形、符号和文字表示之间互相转化的内容, 这对于初学立体几何的学生来说是很重要的. 它有利于训练学生正确地认识和描述空间的几何图形. 这样的练习在后面也有安排.

9.2 空间直线

1. 空间直线的三种位置关系在现实中大量存在, 学生对它们已有一定的感性认识, 且在初中几何中也学习过一些. 其中, 相交直线和平行直线都是共面直线, 学生对它们已很熟悉. 异面直线的概念是学生比

较生疏的内容,也是本小节的重点和难点.在第9.1节“平面”之后继续学习本小节,有利于学生实现由认识平面图形到认识立体图形的飞跃,逐步改变学生只习惯于在一个平面内考虑问题的状态.

2. 空间两条不重合的直线有三种位置关系,若从有无公共点的角度看,可分为两类:

(1) 有且仅有一个公共点——相交直线;

(2) 没有公共点—— $\begin{cases} \text{平行直线,} \\ \text{异面直线.} \end{cases}$

若从是否共面的角度看,也可分为两类:

(1) 在同一平面内—— $\begin{cases} \text{相交直线,} \\ \text{平行直线;} \end{cases}$

(2) 不同在任一平面内——异面直线.

从上述任一角度都只能把空间直线的位置关系粗略地加以区分.只有两种角度结合起来,才能对三种位置关系作出精确的描述.

3. 公理4的内容是平行的传递性,即

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ c \parallel b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel c.$$

平行的传递性在初中几何中也讲过,只是当时将直线 a 、 b 、 c 限制在同一平面内.本小节中则对此作了推广—— a 、 b 、 c 可以不共面,而是两两共面.应向学生指出上述变化.

4. 本小节中公理4后面的定理及推论,也是由平面图形推广到立体图形的.教学中应提醒学生,并非所有关于平面图形适用的结论对于立体图形仍然适用.对此可用反例适当解释、提醒学生:一般说,要把关于平面图形的结论推广到立体图形,必须经过证明.

上述定理中,定理的条件涉及“一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同”.为了使准确地理解它的含义,教科书中通过注解的形式,利用前面已学过的向量的知识进行了描述.将“ $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的边 $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$,并且方向相同”,解释为向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{A'B'}$ 的方向相同,向量 $\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{A'C'}$ 的方向相同.对此,教学中可结合具体图形作出解释,这里所说的向量是空间向量,但因都可平移到同一平面内,所以也可视为平面向量.

5. 异面直线的概念的教学,应遵循由具体例子到抽象概念.教学中应结合正反两方面的例子,说明“不同在任何一个平面内的两条直线”,是指这两条直线不能同在任何平面内,而不能由 $l_1 \subset \alpha$, $l_2 \subset \beta$ 就说 l_1 、 l_2 一定是异面直线.这是因为在上述情况下,还可能有 $l_1 \subset \gamma$ 且 $l_2 \subset \gamma$ (图9-3).两条直线是异面直线,等价于这两条直线既不相交也不平行.

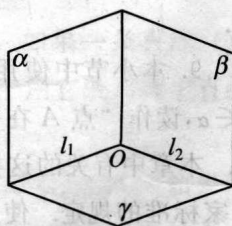


图9-3

6. 表示异面直线时,以平面为衬托(图9-4(1)),可以显示得更清楚.否则,就难以画出使人一目了然的两条异面直线,而容易与两条相交直线互相混淆(图9-4(2)).

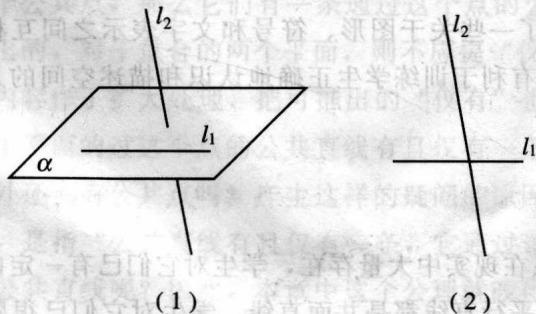


图9-4

7. 与异面直线相关的概念包括异面直线所成的角、两条异面直线互相垂直、异面直线间的距离等.

异面直线所成的角是由两条相交直线所成的角扩充而生成的. 由平移原理可知, 当两条异面直线在空间的位置确定后, 它们所成的角的大小也就随之确定了. 异面直线所成的角, 是指这两条直线经过平移后处于相交位置时所成的锐角或直角. 因此, 异面直线所成的角的范围是 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

两条异面直线互相垂直, 即它们所成的角是直角, 这是两条直线异面的一种特殊的位置情况.

异面直线间的距离是建立在异面直线的公垂线的基础上的. 异面直线间的距离就是异面直线间的公垂线段的长度. 对于任意两条异面直线, 它们的公垂线有且只有一条. 因此, 它们的公垂线段也是存在且唯一的. 这就是说, 对于任意两条异面直线, 它们间的距离是唯一确定的.

异面直线的公垂线的存在性和唯一性的证明, 要用到后面的知识, 并且有一定难度. 教科书中只列出了这一结论而将证明略去, 教学中可结合模型演示使学生直观接受.

9.3 直线和平面平行的判定和性质

1. 直线和平面的位置关系有三种: 直线在平面内, 直线和平面相交, 直线和平面平行. 这三种情况分别对应于直线和平面的公共点的个数为: 无数个, 1 个, 0 个. 引入这些概念时, 可结合实例加以说明.

2. 直线和平面平行的判定定理, 是通过直线和直线平行来判定直线和平面平行. 这里所说的直线和直线, 是指平面内的一条直线和平面外的一条直线. 这个定理用符号来表示, 即

$$\left. \begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a // b \end{array} \right\} \Rightarrow a // \alpha.$$

应用此定理时, 要注意 3 个条件必须齐备.

3. 讲直线和平面平行的判定定理时, 可以从实例引入. 例如, 由门扇的对边互相平行, 进一步观察出门扇不论转动到什么位置, 它能活动的竖直的一边始终平行于固定的竖直边所在的墙面.

反证法是一种重要的间接证法, 学生在初中和高一已学过. 在证明直线和平面平行的判定定理时, 又一次使用了反证法, 这可使学生进一步熟悉反证法的实质及其一般步骤.

4. 直线和平面平行的性质定理, 是由直线和平面平行推出直线和直线平行. 这里所说的直线和直线, 是指与平面平行的那条直线和过这条直线的平面与已知平面的交线. 这个定理用符号来表示, 即

$$\left. \begin{array}{l} a // \alpha \\ a \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = b \end{array} \right\} \Rightarrow a // b.$$

要防止学生误解为“一条直线平行于一个平面, 就平行于这个平面内的一切直线”. 教学中可以结合具体模型或实物, 纠正学生的错误理解.

9.4 直线与平面垂直的判定和性质

1. 直线和平面垂直, 是直线和平面相交中的一种特殊情况. 教科书中通过结合章头图和引言中旗杆与地面的位置关系问题, 引出了直线和平面垂直的概念.

在讲直线和平面垂直的定义时, 应强调指出: 一条直线垂直于一个平面, 是指这条直线垂直于这个平面内的任何一条直线. 由此, 我们经常使用下面的命题:

$$\left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp b.$$

2. 本小节的例1给出了一个判定直线和平面垂直时常用的命题:

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ a \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp \alpha.$$

3. 利用直线和平面垂直的定义, 直接判定直线和平面垂直要考虑平面内的每一条直线, 这在运用时有困难(由于平面内的直线有无数条). 直线和平面垂直的判定定理则解决了上述困难. 根据这一定理, 只要在平面内选择两条相交直线, 考虑它们是否与平面外的直线垂直即可. 这个定理将原本判定直线和平面垂直的问题, 通过判定直线和直线垂直来解决. 这里的“直线和直线”是指平面外的一条直线和平面内的两条相交直线.

直线和平面垂直的判定定理的证明, 是通过作辅助线(实际上是关于平面的反射变换)完成的. 这个证明较长, 且要分两种情况分别考虑. 教学中应将证明的思路作为分析的主要内容, 而不一定要学生死记证明的叙述过程. 讲这个定理时, 可以通过反例来强调“平面内的两条相交直线”这个条件中的“两条”和“相交”是必须满足的. 至于这两条相交直线是否与已知直线(即要证为垂线的那条)有公共点, 则并不重要.

4. 直线和平面垂直的性质定理, 实际上是本小节中例1所说命题的逆命题. 这两个命题的关系可用符号表示如下:

当 $a \perp \alpha$ 时, 有

$$a \parallel b \Leftrightarrow b \perp \alpha.$$

一般说, 判定定理与性质定理之间有密切的联系. 判定定理给出了某结论成立的充分条件, 性质定理给出了相关的必要条件.

5. 在本小节例2中, 把直线上的点到平面的距离转化为两条平行线间的距离问题. 这种化立体几何问题为平面几何问题的方法, 应逐步让学生学会.

6. 斜线在平面内的射影, 是斜线和平面所成的角的一条边. 这部分内容中涉及的概念较多, 为了便于学生理解记忆, 可以边讲边画图, 同时在图上注出有关概念的名称.

“斜线和平面所成的角, 是这条斜线和这个平面内的直线所成的一切角中最小的角.” 这一结论的证明如下:

证明: 设 l 是平面 α 的一条斜线, l' 是 l 在 α 内的射影, 点 O 是斜足, m 是 α 内任一条与 l' 不平行的直线.

若直线 m 过点 O , 则由教科书所述, l 与 m 所成的角小于 l 与 l' 所成的角 θ .

若直线 m 不过点 O (图 9-5), 则过点 O 作直线 m' , 使 $m' \parallel m$. m 与 l 所成的角等于 m' 与 l 所成的角, 从而 m 与 l 所成的角小于 θ .

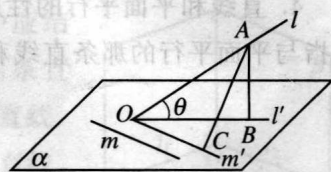


图 9-5

7. 三垂线定理及其逆定理可以合起来表述如下:

设 l 是平面 α 的一条斜线, l' 是 l 在 α 内的射影, m 是 α 内的一条直线, 则有

$$m \perp l' \Leftrightarrow m \perp l.$$

这个定理及其逆定理是证明空间直线互相垂直时经常使用的, 应要求学生了解它们. 这两个命题的实质在于揭露了这样的规律: 斜线和它在平面内的射影必定同时垂直于平面内的某条直线. 也就是说, 斜线和它在平面内的射影, 在对于平面内的一条直线是否有垂直关系上具有一致性.

三垂线定理及其逆定理的证明思路是一致的, 都是利用直线和平面垂直的判定定理. 教学中可以让学生仿照定理的证明, 了解逆定理的证明过程.

9.5 两个平面平行的判定和性质

1. 讲两个平面的位置关系时, 可以让学生观察教室的墙壁、地面、屋顶等, 或观察实物模型 (如立方体). 由观察结果归纳出两个平面的两种不同位置关系的区别在于它们是否有公共点.

两个平面要么有无数个公共点, 且这些公共点的集合是一条直线; 要么没有公共点. 当两个平面没有公共点时, 它们互相平行. 表示两个平面平行时, 应把表示这两个平面的平行四边形画成对应边平行 (图 9-6 (1)), 而不应画成图 9-6 (2) 那样.

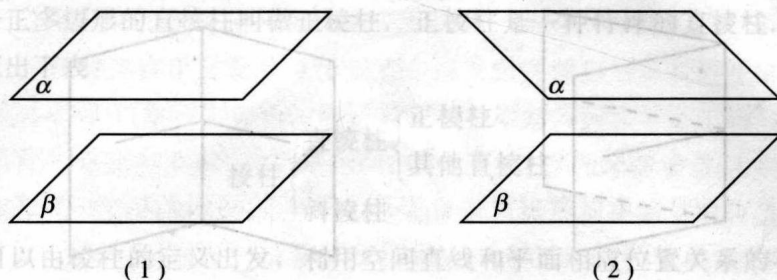


图 9-6

2. 如果两个平面平行, 那么在其中一个平面内的所有直线一定与另一平面无公共点, 即这些直线都平行于另一平面. 反之, 如果一个平面内的所有直线都平行于另一平面, 那么这两个平面一定无公共点, 即这两个平面平行. 这样, 我们就可以由一个平面内的所有直线与另一平面平行, 推断两个平面平行. 但是实际上难以对一个平面内的所有直线逐一考虑, 于是就需找其中能起决定作用的代表——相交的两条直线, 这就引出了两个平面平行的判定定理. 在选择两条相交直线为代表这一方法上, 直线和平面垂直的判定定理与此类似.

3. 用反证法证明判定定理时, 可以按以下顺序启发学生.

(1) 如果 α 不平行于 β , 那么 α 与 β 的公共部分是什么图形?

(2) 如果 $\alpha \cap \beta = c$, 那么 a 与 c 、 b 与 c 是什么关系?

(3) $a \parallel c$ 且 $b \parallel c$ 合理吗?

4. 本小节的例 1 也可以用来判定两平面平行, 它可与定理“垂直于同一平面的两直线平行”联系起来记忆. 例 2 也可以作为两个平面平行的一个性质, 它可与定理“一个平面垂直于两条平行线中的一条直线, 那么它也垂直于另一条直线”联系起来记忆.

5. 两个平面平行的性质定理中涉及三个平面 (其中一个平面与两个平行平面相交) 和两条交线, 并由两个平面平行得出两条直线平行. 需要向学生指出: 两个平面平行时, 分别在这两个平面内的两条直线不一定平行. 它们可能平行, 也可能是异面直线.

6. 讲过两个平行平面的公垂线段后, 接着证明这些公垂线段相等是必要的, 这说明两个平行平面间的距离是唯一确定的量.

7. 讲完本小节后, 可以把两条直线平行、直线与平面平行、两个平面平行这三种平行的情况进行比较, 使学生的知识系统化.

9.6 两个平面垂直的判定和性质

1. 两个平面相交时, 它们的相对位置由两个平面所成的“角”所确定. 教科书上举出修筑水坝、发射人造卫星这两个实例, 引出二面角的概念. 教师还可以再举一些学生熟悉的实例, 增加学生对二面角的感性认识.

2. 对二面角的概念可与平面角的概念进行对比讲解. 平面角概念中的顶点和边, 分别对应于二面角概念中的棱和面. 平面角可以看作一条射线绕其端点旋转而成的图形, 二面角可以看作一个半平面绕其边界(直线)旋转而成的图形. 二面角的平面角, 则是用来刻划二面角大小的一个概念. 讲述这个概念时, 必须强调二面角的平面角所在平面垂直于二面角的棱, 二面角的平面角的两条边分别在二面角的两个面内. 画二面角及其平面角常用如下方式:

(1) 直立式 (图 9-7).

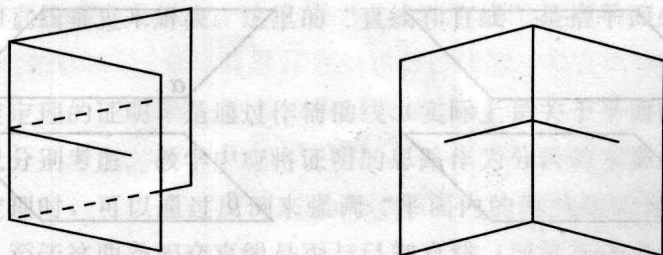


图 9-7

(2) 平卧式 (图 9-8).

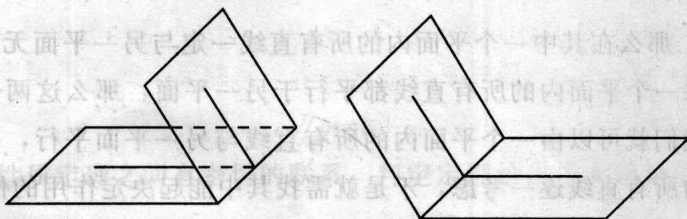


图 9-8

3. 两个平面互相垂直是两个平面相交的特殊情况. 在日常生活中, 两个平面互相垂直的例子大量存在, 讲课时可以结合实例. 两个平面互相垂直的概念, 与两条直线互相垂直的概念, 都是通过所成的角是直角定义的. 教学中可以由两条直线互相垂直的概念引申迁移到两个平面互相垂直的概念.

4. 证明两个平面垂直的判定定理时, 可以这样分析证明思路:

(1) 要证明两个平面互相垂直, 在没有得到判定定理时, 需要根据两个平面互相垂直的定义, 即证明相应的二面角是直二面角.

(2) 要证明一个二面角是直二面角, 需要从它的平面角是直角证起. 由此, 应先作出这个二面角的平面角.

对证明思路分析透彻, 有助于学生自然地想出构造辅助图形的正确方法, 克服教学中的“画辅助线”这一难点.

5. 两个平面垂直的判定定理和性质定理, 前者是由直线和平面垂直得出两个平面垂直, 后者是由两个平面垂直得出直线和平面垂直. 这一方面说明两种垂直之间有密切联系, 另一方面说明两者可以互相转化. 在解决有关问题时, 经常利用这样的转化.

6. 本小节的例 2 证明了直线与平面的一种结合关系 (直线在平面内). 证明中使用了“同一法”, 即为了证明 $a \subset \alpha$, 先作出 $b \subset \alpha$, 然后证明 a 与 b 是同一直线. 这种证法只要求学生理解其思路即可, 不必安排较多的用同一法证明的练习题.

7. 本小节的例 3 可以用不同的方法得出直线与平面垂直的结论, 应让学生体会这些方法.

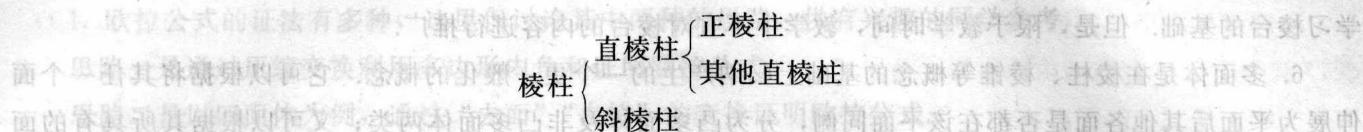
8. 与上一小节类似, 在讲完本小节, 可以把两条直线垂直、直线和平面垂直、两个平面垂直这三种垂直的情况进行比较, 使学生的知识系统化.

9.7 棱柱

1. 学生在日常生活中曾多次接触过形状为棱柱的实物, 因此, 引出棱柱概念时, 应注意在学生感性认识的基础上进行归纳, 得出能反映棱柱特征的定义. 棱柱的本质特征有两个:

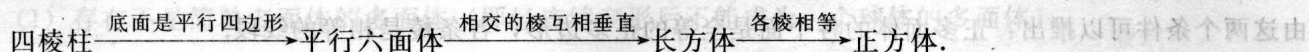
- (1) 有两个面(所在平面)互相平行;
- (2) 其余各面中每相邻两个面的公共边互相平行.

2. 棱柱按底面边数可以分为三棱柱、四棱柱、五棱柱……按侧棱与底面垂直与否, 棱柱又可以分为直棱柱和斜棱柱. 底面是正多边形的直棱柱叫做正棱柱. 正棱柱是一种特殊的直棱柱. 为了使弄清这些概念间的关系, 可以列出下表:



3. 棱柱的性质, 可以由棱柱的定义出发, 利用空间直线和平面相应位置关系的有关知识推出. 虽然这些性质很直观, 但是不妨让学生说说推导它们的思路. 这样做有助于复习前面的知识, 也有助于加深对棱柱性质的认识.

4. 四棱柱是最常见的一种棱柱, 其中包括平行六面体、长方体、正方体等, 它们之间有如下的关系:



5. 长方体对角线长的计算公式应用较广, 是立体几何中的一个基本计算公式, 应让学生熟练掌握.

6. 直棱柱直观图的斜二测画法包括两个主要步骤:

- (1) 水平放置的平面图形(直棱柱的下底面)的画法;
- (2) 直棱柱的侧棱及上底面的画法.

其中, 第一个步骤是基础, 画图时关键在于将 Ox 、 Oy 轴变换为 $O'x'$ 、 $O'y'$ 轴, 使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ (或 135°), 即将水平放置的直角坐标系用斜二测法画出. 然后把平行于 Ox 轴的线段保持原来长度, 画成与 $O'x'$ 轴平行的线段; 把平行于 Oy 轴的线段缩短为原来长度的一半, 画成与 $O'y'$ 轴平行的线段. 在第二个步骤中, 注意正确地将 Oz 轴变换为 $O'z'$ 轴, 并把平行于 Oz 轴的线段保持原来长度, 画成与 $O'z'$ 轴平行的线段. 此外, 把各条线段的起点选在适当位置是必须注意的.

直棱柱及后面的正棱锥的直观图的画法, 在原理上是一致的. 只是画直棱柱时不必画它的高, 画出它的侧棱后就能直接画出整个直棱柱; 而画正棱锥时必须先画出它的高, 然后才能画出它的侧棱. 因此, 在讲直棱柱直观图的画法时, 应使学生通过练习切实掌握, 这可为讲正棱锥直观图的画法作些准备.

9.8 棱锥

1. 棱锥形状的物体也是学生早已熟悉的. 引出棱锥的概念时, 也应注意由分析实物形状特征到归纳定义. 棱锥的形状特征主要是:

- (1) 有一个形状是多边形的底面;
- (2) 其他各面是有一个公共顶点的三角形.

2. 棱锥按底面多边形的边数可以分为三棱锥、四棱锥、五棱锥……

正棱锥是一种特殊的棱锥, 它满足以下条件:

- (1) 底面是正多边形;
- (2) 顶点在底面的射影是底面的中心.

只有正棱锥才有斜高(顶点到底边的垂线段), 其他棱锥的顶点到各底边的垂线段不都等长.

3. 一般棱锥的性质定理,反映了棱锥平行于底面的截面与底面的相似关系.

正棱锥有一些特殊的性质,在正棱锥中包含了一些等腰三角形和直角三角形.利用这些三角形可以进行有关的证明和计算.正棱锥的性质可由定义推出,虽然这些性质的直观性很强,但在教学中不妨让学生进行适当推导,以复习已学知识,并加深对这些性质的认识.

4. 正棱锥直观图的画法可与直棱柱直观图的画法进行比较,由已掌握的直棱柱的画法推想出正棱锥的画法.这里关键在于启发学生对如何确定正棱锥顶点的位置进行思考.

5. 本章中按大纲要求未列入棱台的内容.实际上,掌握了有关棱锥的知识后,利用两个相关棱锥(它们有同一顶点,底面互相平行且相对应的侧棱在同一直线上)容易推出有关棱台的知识,即学生已具备了学习棱台的基础.但是,限于教学时间,教学中不宜对棱台的内容进行推广.

6. 多面体是在棱柱、棱锥等概念的基础上归纳产生的一个更一般化的概念.它可以根据将其任一个面伸展为平面后其他各面是否都在该平面同侧,分为凸多面体及非凸多面体两类;又可以根据其所具有的面的个数,分为四面体、五面体……教学中应结合模型或实物来讲述多面体的概念.

7. 正多面体是一种特殊的凸多面体,它有两个特点:

(1) 每个面都是有相同边数的正多边形;

(2) 每个顶点都有相同数目的棱.

由这两个条件可以推出:正多面体的各个面是全等的正多边形,各条棱是相等的线段.

正多面体只有5种:正四面体,正六面体(正方体),正八面体,正十二面体和正二十面体.本章的第二个阅读材料中解释了为什么只有这5种正多面体.教学中只要求学生了解正多面体有几种就可以了.

阅读材料 柱体和锥体的体积

1. 学生们在以前的数学课中,已经学习过有关圆柱和圆锥的内容,本章中又学习了棱柱和棱锥.为此,可以将柱体(圆柱、棱柱)和锥体(圆锥、棱锥)的一些共同的性质统一起来认识.柱体和锥体的体积计算,是经常要解决的问题.虽然有关公式学生已有所了解,但是进一步了解这些公式的推导,有助于学生理解和掌握这些公式.本阅读材料的目的就在于此.

2. 祖暅原理是体积公式的重要基础,也是我国古代数学的光辉成就之一.通过学习这部分内容,既可以扩大学生的知识面,加深对体积公式的理解,又可以对学生进行爱国主义教育.

3. 长方体的体积公式是

$$V=abc,$$

其中 a 、 b 、 c 分别是长方体的长、宽、高.这个公式在原立体几何必修本中曾作为公理,由于学生早在接受义务教育阶段对它已非常熟悉,所以本阅读材料中直接利用它,而对其本身不作更多讨论.

4. 锥体体积公式的导出,是通过以一个特殊的锥体——三棱锥为典型而实现的.三棱锥的体积公式的推导,又是通过分割棱柱,使之转化为棱锥而完成的.在上述推导过程中体现了“由特殊到一般”的认识规律和“创造条件促成事物的转化”的思想.

研究性学习课题:多面体欧拉定理的发现

1. 本内容设计为“研究性学习课题”形式,目的在于以学生主动参与的发现式学习活动,培养他们通