SHUXUE

FANGFALUN

数学方法论

杨在荣　编著

西南交通大學出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

数学方法论

杨在荣 编著

·成 都·

图书在版编目（CIP）数据

数学方法论 / 杨在荣编著. —成都：西南交通大学出版社，2012.8
ISBN 978-7-5643-1891-8

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①数学方法－方法论
Ⅳ. ①01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 185996 号

数学方法论

杨在荣　编著

责任编辑	张宝华
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段 111 号）
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮政编码	610031
网　　址	http: //press.swjtu.edu.cn
印　　刷	四川锦祝印务有限公司
成品尺寸	170 mm×230 mm
印　　张	12.125
字　　数	217 千字
版　　次	2012 年 8 月第 1 版
印　　次	2012 年 8 月第 1 次
书　　号	ISBN 978-7-5643-1891-8
定　　价	25.00 元

前 言

数学是一门历史悠久的学科，在其发展过程中蕴含着大量的思想方法．数学思想方法是数学的核心与灵魂，它不仅是数学的重要组成部分，而且是数学发展的源泉与动力．本书从创造性思维和微观数学方法论的角度，讨论和研究了数学的思想方法，以及数学的发现、发明与创新等法则．主要内容有：数学方法论的研究内容及研究数学方法论的意义；数学发现的基本方法及其过程中的心智活动；数学论证的基本方法；数学问题的构成、分类以及问题解决的重要思想方法；数学内容的抽象性和研究方法的抽象性；数学美的客观内容与数学发展．

全书既有理论原理，又有丰富的典型例证分析，力求使读者通过实例深刻体会数学方法论原则，富有启发性．本书可作为高等院校数学与应用数学专业、高等师范院校数学专业本（专）科教材，也可供广大数学爱好者和数学教师参考．

在本书的编撰过程中，参考了许多文献，吸收了一定的研究成果，笔者谨向被列用有关文献的作者或单位表示崇高的敬意与衷心的感谢！与此同时，本书初稿的输入，得到了张卫钧同学的大力帮助，在此一并表示感谢！

由于笔者水平有限，加之数学方法论是一门新兴学科，还处在不断地发展和完善之中，许多问题还需要讨论和研究，书中论述不全或不妥之处在所难免，敬请各位专家、读者批评赐教．

杨在荣

2012 年 5 月

目 录

第一章　绪论

任何一门学科都有其发展的过程和发展的规律，并在其发展过程中形成科学的研究问题的方法，进而形成一门学科的方法论. 数学是一门历史悠久的学科，在长时间的发展过程中，也形成了自己的方法论. 数学方法论是研究和讨论数学的发展规律，数学的思想方法，以及数学的发现、发明与创新等法则的一门学科.

第一节　宏观数学方法论

数学发展的历史过程表明，数学的发展受两个方面的因素推动，一是社会生产实践及科学技术发展的客观要求（外部因素）；二是数学自身内在的要求（内部因素）. 并且，在整个发展过程中两个因素相互交叉渗透. 如果不考虑数学内在因素，只是对数学发展规律进行研究，则属于宏观的数学方法的范畴.

社会实践向数学提出新的问题，刺激数学向某个方向发展，并提供验证数学结论的真理性标准. 从数学诞生到现在已经发展成为一门分支众多、应用广泛的庞大学科，一直受到社会生产实践和科学技术发展需要的推动.

算术的产生是由于人类记数的需要.

由于人类实践活动中需要丈量土地、建造房屋、估计容器的容量等，从而产生了长度、面积、体积等一些几何量的概念. 为制造一些工具、用具等实践活动导致了直线、圆等几何元素概念的产生，逐渐发展为最初的几何学. 由于度量及数的运算的需要，使得数系不断扩充到有理数、实数，为了具有一般性，使用字母来代替这些数，于是产生了最早的代数学.

随着生产和科学技术的发展，使自然科学的中心问题转向了对运动的研究，这促进了微积分等数学分支的产生，从而数学也就进入了变量数学时期.

又由于客观世界的许多现象本身是模糊的，若用经典数学方法将模糊现

象近似看成分明的现象来处理，与客观实际相差甚远，即经典数学方法不是客观实际中模糊现象的正确反映，因此产生了模糊数学.

实际上，在数学历史发展过程中，大量事实证明了数学的概念、运算、逻辑推理方法都受到了实践活动的影响，都有其完全确定的实践来源. 就是在现代数学中许多数学分支也是由于技术、经济、战争、国家管理等需要的直接影响与推动而产生的. 这说明生产实践、科学技术不仅过去而且今后也将永远是数学发展的源泉.

数学由于内在的因素，在其发展过程中曾产生过许多理论. 然而，只有那些在实践中找到了其应用的理论才能得到发展，并且巩固地列入数学理论之中.

早在 16 世纪，数学家为了解二次和三次方程，被迫引入了负数的平方根的表示式，即 $\sqrt{-1}=\mathrm{i}$. 之后虽然也对复数 $a+b\mathrm{i}$ 进行运算，但直到在流体力学和电学等自然科学中有了广泛应用后，才产生了复变函数论学科.

罗氏几何和黎曼几何的产生也很能说明问题. 关于欧氏几何中第五公设的研究延续了许多世纪，罗巴切夫斯基关于罗氏几何的理论产生的初期，虽然这种几何在逻辑系统内没有矛盾，演绎论证的严格性也无懈可击，但由于它的背景为直观常识所不容，所以受到人们的冷嘲热讽. 而只有当它在物理学科（广义相对论）中得到证实和应用后，才获得其巩固地位，并且成为现代公理化方法的起源，而有些没有找到重要应用的“精炼化了”的几何理论（如非戴扎格、非阿基米德几何）则停滞不前.

又如概率论源于“赌博”，也只有当它在自然科学中得到了广泛应用后才成为今天的“统计学”中一门蓬勃发展的数学学科.

另外，一门数学学科的真理性也必须到实践中进行检验而最终得到证实. 当然，这里的检验不是指某一个定理而是一门学科的整个理论体系.

第二节　微观数学方法论

数学发展的另一个因素，是由数学本身内在的因素推动并发展的. 数学的发展，如果抛开生产实践与科学技术推动的外部因素，单纯考虑数学本身的内部因素，即只是关于数学思想方法，以及数学中的发现、发明与创新等法则的研究，则属于微观的数学方法论. 许多数学家在解决数学问题过程中产生了许多卓越的创造性的方法. 数学方法论中的许多方法和原

理是从数学发展历史中、从数学家的发明发现中总结并归纳出来的. 下面举例说明:

1. 关于解析几何的产生

诸如

$$x^2+y^2=a^2$$

一类的二元方程，或写成更一般的形式 $F(x,y)=0$. 这种通常有无穷多组解的所谓“不定方程”，对于 17 世纪初的代数学家来说是没有什么兴趣的. 然而笛卡儿却别具慧眼，他注意到当把这无穷多组 (x,y) 看成平面上的点的坐标，一般来说，这样的点便组成了一条平面曲线（例如 $x^2+y^2=a^2$ 就给出了一个圆）. 反之，满足某些几何条件的曲线，也可借助坐标而用代数语言建立起相应的方程. 这样，笛卡儿就开创了一门新的数学学科 ——解析几何学，从而开创了数学的新局面.

2. 关于数学中存在性证明的起源

19 世纪初，许多数学家开始研究代数不变式理论. 其大意是：比如，对二元二次型 $Ax^2+Bxy+Cy^2$ 进行线性变换

$$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=cx+dy \end{cases}$$

时，若 $ad-bc=1$, 则 $Ax^2+Bxy+Cy^2$ 可以化为 $A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2$，其中有一个 A,B,C 的关系式 $J(A,B,C)=B^2-4AC$ 在线性变换下不变，即 $B^2-4AC=B'^2-4A'C'=J(A',B',C')$. 我们把 $J(A,B,C)$ 这样的多项式称为二元二次型 $Ax^2+Bxy+Cy^2$ 在（幺模）线性变换下的不变式. 不变式理论的最核心问题是对于二元、三元乃至 n 元的情形下，能否用有限个“基本的”不变式产生出来？关于这个问题，数学家们用了半个多世纪的时间一直沿着具体构造“基本的”不变式的“构造性证明”的思路前进. 果尔丹用非常复杂的方法证明了二元形式的不变式只有有限个“基本的”不变式，从而获得“不变式之王”的雅号. 而希尔伯特却在 1888 年用逻辑演算的方法，根本不涉及具体的不变式及其个数，只用几页纸就证明了任何 n 元不变式都只有有限个“基本的”不变式. 由于这一问题的解决，使得在数学中开创了用存在性证明取代构造性证明之路，确认了存在性证明的合法性.

3. 现代形式公理化方法的萌芽

关于对欧氏几何中第五公设的不满以及数学家们为证明它而作的努力已是众所周知的了. 一千多年的困惑，消耗了许许多多数学家们的宝贵精力，最终导致非欧几何的产生，开辟了现代数学中形式公理化方法的道路.

由于阐述微观的数学方法论是本书的任务，因此这个问题在此只略谈一下，我们把它放到后边的章节中详加讨论.

第三节　数学方法论的内容

从数学分类的角度来说，数学方法论属于科学方法论的范畴. 任何一门科学发展到一定阶段都应该进行本门学科的方法论研究. 数学科学也如此，随着数学的发展，历史上有许多大数学家、数学教育家在他们对数学科学本身作出贡献的同时，也对数学方法论做出了有益的探讨，撰写出一些有影响的著作. 例如，解析几何创始人笛卡儿著《方法论》，微积分学创始人之一莱布尼兹著《论发明的技巧》，法国数学家彭加勒著《科学与方法》，法国大数学家阿达玛作《数学领域的发明心理学》等；20 世纪 50 年代以后世界上出现许多论述数学思想、数学方法的专著. 例如，美国 M.克莱因著《古今数学思想》，美籍匈牙利数学家、数学教育家 G.波利亚著《数学与猜想》、《数学的发现》、《怎样解题》，苏联亚历山大罗夫著《数学——它的内容、方法和意义》，日本米山国藏著《数学的精神、思想和方法》等. 数学方法论的研究在我国也有了很大的发展，徐利治教授所著的《数学方法论选讲》就是一部数学方法论专著. 还有一些学者发表了许多有关的著作及文章，在此不再一一赘述. 从上述材料以及国内发展的专著、文章来看，数学方法论的内容及其研究方向大致有以下诸方面：

（1）建立数学概念的方法；

（2）数学发现的方法（本书第二章论及此问题）；

（3）论证数学命题的方法（本书第三章论及此问题）；

（3）解答数学问题的方法（本书第四章、五章论及此问题）；

（5）组建数学体系的方法（例如，公理化方法，本书第五章叙述此问题）；

（6）创立数学新学科、开拓数学新领域的方法（例如，模糊数学的创立）；

（7）寻求数学应用的方法（如概率统计广泛应用于科学技术领域许多部门、非欧几何用于广义相对论）；

(8)奠定数学基础的方法;

(9)用新观点来重新整理原有数学知识的方法;

(10)数学发明创造的心智过程及数学美学的研究(本书的第二章第四节和第七章叙述了此问题).

第四节 研究数学方法论的意义

一、有利于促进数学的发展

数学方法论重在从数学与方法学的结合上总结数学的思想、方法、规则、模式,揭示数学的发展规律,因而通过数学方法论的研究,可有助于认识数学的本质,促进数学的发展.

1. 有助于认识数学的本质

数学方法论的重要内容之一,就是对数学客观基础的研究和对数学内容的辩证分析,这将使人们进一步认识数学的本质.数学的本质不仅反映在它的客观基础和数学内容的辩证性质方面,而且在它的发展方式上也有着深刻的表现.数学是人类对世界的一种认识,是客观世界在人们头脑中的反映,它源于客观世界,产生于实践之中,数学理论又必须回到实践中接受实践的检验.从这一认识过程来看,数学与所谓的经验科学是相同的,但数学的发展又具有相对于人的实践的"独立性",数学科学的体系正是这种独立性发展的结果.数学方法论是关于认识规律的科学,它不仅总结了数学科学的认识方法、数学推理的逻辑方法和非逻辑方法,而且揭示了数学发现和创造的规则,从而可以使人们从数学的发展方式中把握数学内在的本质和规律.

2. 有助于促进数学的发展

纵观数学发展历史可以清楚地看到,数学上每一项重大成果的取得,无不与数学思想的突破及方法的创新有关.因此,掌握数学方法论并努力开拓新的思想方法是数学创造的巨大动力.正是在这个意义上,研究数学方法论对于促进数学的发展具有重大意义.

例如,笛卡儿十分重视数学方法论的研究,创立的坐标法把数与形结合起来,实现了数学思想与方法的重大突破.这不仅导致了解析几何的创立,为微积分的诞生奠定了理论与方法基础,而且极大地促进了十八十九世纪数

学的发展. 对数学作出了重大贡献的许多著名数学家，如伽罗华、罗巴切夫斯基、黎曼、维纳等，也都是由于重视数学方法论的总结和创新，才开辟了群论、非欧几何、控制论等崭新的研究领域，有力地推动了数学的发展.

历史上许多著名的哲学家、物理学和数学家，都十分关注数学思想和方法的研究，强调科学方法的重要性. 现代科学大师、著名德国物理学家爱因斯坦（A. Einstein 1878—1955）在给青年人介绍他取得科学研究成功的秘诀时，写了一个公式：

$$A=X+Y+Z$$

对此，爱因斯坦解释说，这里 A 代表成功，X 代表艰苦的劳动，Z 代表少说空话，而 Y 代表科学的方法，这对于取得科学研究的成功是必不可少的. 荷兰数学家斯蒂文（S. Stevin 1548—1620）也曾经指出："比起任何特殊的科学理论来，对人类的价值影响最大的恐怕还是科学的方法论."而马克思则更深刻地指出："只有掌握了数学方法，科学才尽善尽美."这些精辟的论述都充分说明了研究数学方法论对数学和其他科学发展的重大意义.

一、有利于发挥数学的功能

作为工具和方法的科学，数学的功能是多方面的. 数学方法论的研究和实践，对于发挥数学的功能有极大的促进作用.

1. 有利于发挥数学的科学功能

数学的科学功能，是指数学在自然科学、社会科学和哲学等领域中的工具性作用. 数学不仅为科学研究提供简洁精确的形式化语言和推理依据，而且也提供数量分析和计算的方法，因此，数学已成为各门科学不可缺少的工具. 现代科学发展的重要特征之一，就是各门科学发展的数学化趋势，这不仅表现为各门科学普遍运用数学知识，更重要的是数学的思想方法向各门科学广泛渗透，以至数学成为科学的方法论. 正如我国著名数学家华罗庚教授所说："宇宙之大、粒子之微、火箭之速、地球之变、生物之谜、化工之巧、日用之繁，无处不用数学，就是社会学方面也开始越来越多地运用数学了."

这里所说的"运用数学"，不仅是运用数学的语言、符号和理论，更重要的是运用数学的思想和方法. 现在，一门科学从定性的描述进入定量的分析和计算，是这门科学达到比较成熟阶段的重要标志，也是数学的科学功能的主要表现，由此也可以看出研究数学方法论在发挥数学的科学功能中的作用.

2. 有利于发挥数学的社会功能

数学的社会功能，是指数学在社会生产、经济、文化等方面具有工具和方法的作用. 数学的社会功能的发挥，不在于数学知识的学习和积累，而在于把数学的思想和方法灵活应用于社会的实践，以便运用数学知识去解决各种实际问题. 因此，加强数学方法论的学习和研究，提高思想方法的素养，对于发挥数学的社会功能是至关重要的. 历史上许多数学家不仅在数学的发展中有着伟大的建树，而且在其他科学和社会生产中同样也作出了巨大的成就，这正是他们非常注重数学方法研究和总结的结果.

例如，瑞士著名数学家欧拉（L. Euler 1707—1783）不仅在代数、几何、三角、数论、微积分、复变函数、微分方程等几乎所有的数学领域中都有所发现和创造，而且在物理学、天文学、航海、造船、建筑业等非数学领域和生产部门也作出了重大贡献，其根本原因就是他具有深邃的数学思想，有运用数学知识和方法解决实际问题的才能，所以人们把欧拉和阿基米德（Archimedes 公元前 287—前 212）、牛顿、高斯（C. Gauss 1777—1855）并列为人类有史以来贡献最大的四位数学家.

数学的科学功能和社会功能，实质上是运用数学知识去解决各门科学和社会实践中的实际问题. 这里，首先要运用数学模型方法把实际问题抽象为数学问题，然后运用化归原则把面临的数学问题转化为规范问题，最后再运用已知数学方法求出问题的答案并具体化为实际问题的解答. 显然，各种实际问题的解决过程都是运用数学的模型方法、抽象化方法、具体化方法、化归原则等各种思想和方法的过程. 因此，研究数学方法论对指导实践具有十分重要的意义.

3. 有利于发挥数学的思维功能

一方面，数学在人们的思维活动与思维发展中具有独特的作用. 恩格斯指出，数学是“研究思想事物”的科学，数学的研究对象是一种抽象的思维创造物. 人们正是在这个抽象的数学王国中不断地研究和发现数学结构内部的固有联系和规律，揭示数学的知识和方法. 同时，数学的思想和方法又提供了思维活动的路线、程序和方式，具有“训练思维的体操”的作用. 因此，加强数学方法论的学习与研究，对于发挥数学的思维功能大有裨益.

另一方面，逻辑思维能力是各种思维能力的核心，培养逻辑思维能力是发展思维的重要途径. 众所周知，逻辑推理是数学中重要的推理形式，逻辑方法是贯穿于整个数学的基本思维方法，也是数学方法论的重要内容. 因此，

数学在培养逻辑思维能力方面具有一般科学不可比拟的作用，而加强数学方法论的研究，掌握逻辑思维的形式和规律，对于发挥数学的思维功能无疑具有巨大的促进作用.

三、有利于数学教育的改革

社会的不断发展必然对人才智能提出更高的要求，也就必然引起数学教育的任务和性质的根本改革. 加强数学方法论的研究，对于促进数学教育的改革具有极大的指导和推动作用.

1. 促进教学思想的更新

千百年来传统的教学以“传道、授业、解惑”为根本宗旨，以传授知识作为教学的根本目标，不研究学习规律，忽视能力特别是创造能力的培养，而数学教学也停留在数学结果的教学上，不注重体现知识的发生发展过程，不注重揭示蕴含在知识中的数学思想和数学方法. 然而，现代教学理论认为，数学教学的任务是“形成和发展学生具有思维特点的智力活动结构”. 也就是说，现代数学教学不仅要向学生传授知识，而且要培养数学能力，特别是发展他们的思维能力.

现代教学思想主要体现在教学的目的观、结构观、质量观和发展观等方面. 目的观反映了现代教学的目的，结构观反映了教学过程的规律，质量观是教学的评价意识和评价准则，发展观是教学思想的辩证观念. 在现代教学思想中，目的观是核心，结构观是关键. 苏联著名数学教育家斯托利亚尔在《数学教育学》一书中指出：“数学教学是教学活动（思维活动）的教学，而不能是数学知识即数学结果的教学.”这种数学教学的结构观明确指出了揭示数学的思维过程才是数学教学中最重要、最有意义的成分，是现代教学思想的重大发展. 在数学概念、命题、问题解决等各种数学活动中，通过充分展示概念形成、命题发现、思路探求、问题解决的思维过程，提炼出数学的思想方法，揭示数学发现、发明和发展的规律，不仅有利于加强基础知识的教学和基本技能的训练，而且可以培养分析和解决实际问题的数学能力，促进思维能力的不断提高.

由此可见，善于提炼数学的思想方法，在教学中揭示数学思维活动过程，既是现代教学思想的要求，又是数学教学的艺术. 数学方法论是研究数学的发展规律的科学，通过数学方法论的研究，可有助于理解数学的本质和规律，理解数学的思维过程和思想方法，在这个意义上，研究数学方法论对于更新教学思想和促进数学教育的改革具有深刻的现实意义.

2. 促进教学方法的改革

促进随着现代教学思想的发展，从 20 世纪 70 年代以来，国外已把教学方法的研究提到了发展智力、培养人才的高度，教学方法的改革有了很大的进展. 现代数学教学方法发展的显著标志之一，就是把重点从接受性学习转向发现性学习，从理解性教学转向发展性教学. 围绕教学方法的改革，国外开展了许多实验和研究，我国也进行了许多有益的探索，出现了许多新的教学方法. 例如，在国外有布鲁纳的“发现式教学法”、斯金纳的“程序教学法”、赞可夫的“实验教学法”、瓦·根舍因的“范例教学法”等，而在国内有卢仲衡的“自学辅导法”、黎世法的“单元目标教学法”，等等. 这些教学方法虽然在结构、程序等方面各具特色，但在揭示思维过程和思想方法方面都具有现代教学思想的特征.

教学方法从属于一定的教学思想，而教学思想的发展也必然导致教学方法的深刻变革. 现代教学论认为，任何富有成效的数学教学方法，都必须有利于发挥教师主导和学生主体的“两主”的和谐作用，必须注重揭示数学思维过程和数学思想方法. 这里，后者是前者的基础，只有使学生经历数学活动的思维过程并认识数学的思想，掌握数学的方法，才能保证学生在学习中的主体地位，也只有在学生主动获取知识的过程中，教师的主导作用才能得到充分地发挥.

3. 促进数学的学习和数学人才的成长

从系统论的观点来看，数学教学中有两个重要的系统：一个是数学的知识系统，主要是古今中外的数学大师们早已发现、论证和整理而形成的数学知识系统；另一个是能力系统，主要是指人们获取数学知识的能力、运用数学知识解决实际问题的能力和从事数学发明创造的能力. 长期以来数学教育对第一系统不遗余力地去追求，而对第二系统则注意不够，这种教育只能培养继承型人才，因此，两个系统都必须重视.

实践表明，一个人数学学习的优劣和数学才能的大小不仅仅只是在于数学知识的多寡，更重要的还在于数学思想和方法的素养，也就是能否领会贯穿于数学中的思想和方法，以及能否灵活运用它们解决各种实际问题和进行数学的发明创造，这是人所共知的事实. 笛卡儿之所以能创立解析几何学，伽罗华之所以能创立群论，罗巴切夫斯基、黎曼之所以能创立非欧几何等，正是由于他们注重数学方法的研究，并实现了数学思想方法的革命性变革.

人们获得知识大体上有两种途径：一种是学习前人已经获得的旧知识，另一种是通过实践探索和理论研究获得新知识. 这里，前一种属于继承，后

一种属于创新. 但无论继承还是创新，要想有效地获得知识，都必须具备数学方法论的素养. 掌握数学方法论的基本知识，不仅有助于加深对数学知识的理解，而且有助于掌握数学理论和数学方法的精神实质，从而提高分析和解决实际问题的能力. 因此，研究数学方法论对于促进数学的学习是大有益处的.

数学方法论是研究数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的学问，它的基本内容是研究发展数学的方法，基本着眼点在于数学的创新. 通过数学方法论的学习和研究，既可以使人们自觉地掌握正确的数学思想方法和工作方法，掌握数学创造的规律与法则，而且可以提高科学的素养和鉴赏能力，这对于培养数学人才具有十分积极的作用.

第二章　数学发现的基本方法

在数学上要有所发现、发明和创新，首先要将具有一定数量和质量的经验材料，进行加工变成数学材料，从而形成数学猜想，建立数学命题，这种思维方法属于数学的发现方法.正如波利亚所指出的“数学的创造过程是和其他任何知识的创造过程是一样的，在证明一个数学命题之前，你得猜想这个命题的内容；在你完全作出详细证明之前，你得先推测证明的思路.”只要数学的学习过程稍能反映出数学的发明过程，那么就应当让猜测、合情推理占有适当的位置. 归纳和类比是数学发现的两个重要方法，而它们的重要基础又在于观察、实验及其过程中的心理活动（联想）. 因此，本章分别讨论观察法和实验法，归纳法，类比法，联想等内容.

第一节　观察法与实验法

欧拉说过：“数学这门学科，需要观察还需要实验.”观察法与实验法是获取经验材料的基本途径，是形成、发展和检验科学理论的实践基础，也是导致数学发现和理论创新的重要基础.

一、观察法

观察法是人们对周围世界的客观事物和现象在自然条件下，按照客观事物本身存在的实际情况，研究和确立它们的性质和关系的方法（又称自然观察法）.

观察法作为科学研究必不可少的手段，历来受到人们的高度重视. 许多知名数学家都特别强调观察的作用，如大数学家欧拉就曾经指出：“在被认为是纯粹数学的那部分数学中，观察无疑地也占有极其重要的地位”. 在自然科学包括数学中的许多成就，都起始于观察.

例 1　利用观察发现数学命题.