微积分

黄春棋 主编

高等教育出版社

微　积　分

Weijifen

黄春棋　主编

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是高等学校本科境外生经济管理类专业微积分课程的特色教材。全书共八章，包括初等数学与初等函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、定积分、积分法与积分应用、多元函数微分学、多元函数积分学等内容。本书根据境外生教学对象的特点，将理论和实际应用问题有机结合，深入浅出地把握知识点的介绍，增加基础应用，减少复杂理论推导，着重基础概念、基本计算和基本应用等内容的叙述。

本书可作为高等学校经济管理类专业微积分课程的教材，也可供相关科技人员学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

微积分 / 黄春棋主编. -- 北京 ： 高等教育出版社，2015.7

ISBN 978-7-04-042450-8

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①黄… Ⅲ. ①微积分－高等学校－教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第077438号

策划编辑 李晓鹏　　责任编辑 李晓鹏　　特约编辑 马兆海　　封面设计 张　楠
版式设计 马敬茹　　插图绘制 邓　超　　责任校对 陈　杨　　责任印制 张泽业

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京天时彩色印刷有限公司
开　　本 787 mm×960 mm 1/16
印　　张 13.25
字　　数 230千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2015年7月第1版
印　　次 2015年7月第1次印刷
定　　价 27.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 42450-00

前　言

随着高等教育的国际化，境外生在国内大学的就读比例逐渐增多。鉴于国内外教育背景和教育要求的差异，如何对境外生进行大学数学教学，选取合适的大学数学教材成为当前有境外本科生学校的一个突出问题。为此，本编写组结合多年的境外生教学实践和教学经验，编写了这套适合境外生教学的数学教材，以解决当前该类教材匮乏的问题。

微积分是经济管理类专业必修的一门数学公共课程，是学生提高文化素质和学习相关专业知识的重要基础。本书针对境外生教学群体，以经济管理类专业数学教育的培养目标为基本依据，遵循“拓宽基础，立足应用，加强能力”的原则，充分注意学生的基础现状，尽量做到由浅入深，由易到难，由具体到抽象，通俗直观，循序渐进。

本书由黄春棋任主编，全书各章编写人员为黄春棋（第一章）、韩雪（第二章）、谢溪庄（第三、四章）、肖占魁（第五章）、陈祥钟（第六章）、胡春英（第七章）、李锦成（第八章），全书由张金顺教授主审。

限于编者的水平，书中难免存在不足之处，欢迎同行和读者批评指正。

编者

2014年12月5日

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　初等数学与初等函数

微积分是现代科学的一门重要的基础学科，也是各个学科的重要工具，学好微积分将为各门科学的研究打下坚实的基础. 在学习微积分之前，复习和学习初等数学的部分相关内容以及初等函数内容是非常有必要的. 本章着重对初等数学的部分内容和初等函数的内容做简单地介绍.

§1.1　方程与不等式

客观世界中，相等和不等的数量关系在数学中可归结为等式和不等式. 最常用的等式为方程，最常用的不等式为一次不等式、二次不等式和绝对值不等式.

一、一元一次方程

$ax+b=0$，当 $a\neq 0$ 时，方程有唯一解 $x=-\dfrac{b}{a}$.

例 1　解方程 $\dfrac{2}{3}x-1=\dfrac{4}{3}x+5$.

解　移项得 $\dfrac{2}{3}x=-6$，即有 $x=-9$.

二、一元二次方程

$ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ 的求解方法有公式法、分解因式法、配方法等.

求根公式　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

例 2　解方程 $2x^2+4x-1=0$.

解　由求根公式可得

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+8}}{4}=-1\pm\frac{\sqrt{6}}{2},$$

所以

$$x_1=-1-\frac{\sqrt{6}}{2},x_2=-1+\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

例 3　解方程 $x^2+3x-4=0$.

解　由因式分解得 $(x-1)(x+4)=0$，即有 $x-1=0$ 或 $x+4=0$，得方程的根为 $x_1=1$ 或 $x_2=-4$.

三、一元一次不等式

$ax+b>0$ 或 $ax+b\leqslant 0$，当 $a>0$ 时，有 $x>-\dfrac{b}{a}$ 或 $x\leqslant -\dfrac{b}{a}$；当 $a<0$ 时，有 $x<-\dfrac{b}{a}$ 或 $x\geqslant -\dfrac{b}{a}$（注意当 $a<0$ 时，不等式两边同除以小于 0 的数，不等号要反向）.

四、一元二次不等式

$ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c\leqslant 0\ (a\neq 0)$，解二次不等式主要有图解法、因式分解法、分组讨论求解等.

1. 图解法

设抛物线 $y=ax^2+bx+c$，$a>0$，(1) $\Delta=b^2-4ac>0$，抛物线与 x 轴有 2 个交点 $x_1<x_2$，则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解为 $x<x_1$ 或 $x>x_2$；(2) $\Delta=b^2-4ac<0$，抛物线与 x 轴没有交点，则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解为 $-\infty<x<+\infty$；(3) $\Delta=b^2-4ac=0$，抛物线与 x 轴只有一个交点 x_0，则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解为 $x\in(-\infty,x_0)\cup(x_0,+\infty)$. 对 $a<0$ 和其他一元二次不等式的类型都可以通过图像找出不等式的解的范围.

例 4　解不等式 $3x^2+2x-1>0$.

解　因为 $3x^2+2x-1=0$ 有 2 个解 $x_1=\dfrac{1}{3}$，$x_2=-1$，且 $a=3>0$，所以不等式 $3x^2+2x-1>0$ 的解为 $x<-1$ 或 $x>\dfrac{1}{3}$.

2. 因式分解法

例 5　解不等式 $2x^2+5x+3\leqslant 0$.

解　由因式分解可得 $(2x+3)(x+1)\leqslant 0$，所以有

$$\begin{cases}2x+3\geqslant 0,\\ x+1\leqslant 0;\end{cases}\tag{1}$$

$$\begin{cases}2x+3\leqslant 0,\\ x+1\geqslant 0.\end{cases}\tag{2}$$

找(1)的公共解得 $-\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant -1$；(2)的公共解为空集. 所以不等式的解为 $-\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant -1$.

五、绝对值不等式

$|ax+b|<r$ 或 $|ax+b|\geqslant r, r>0$,由绝对值定义和性质可得

$$|ax+b|<r \Leftrightarrow -r<ax+b<r;$$
$$|ax+b|\geqslant r \Leftrightarrow ax+b\leqslant -r \text{ 或 } ax+b\geqslant r.$$

例 6 解绝对值不等式 $|-3x+4|<2$.

解 $|-3x+4|<2 \Leftrightarrow -2<-3x+4<2 \Leftrightarrow -6<-3x<-2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}<x<2.$

例 7 若 $\sqrt{(x+3)^2}\geqslant 5$,求 x 的取值范围.

解 $\sqrt{(x+3)^2}\geqslant 5 \Leftrightarrow |x+3|\geqslant 5 \Leftrightarrow x+3\leqslant -5$ 或 $x+3\geqslant 5 \Leftrightarrow x\leqslant -8$ 或 $x\geqslant 2$.

例 8 解不等式组

$$\begin{cases} 3x-1>0, \\ x^2-4<0, \\ |2x+4|<2. \end{cases}$$

解 $\begin{cases} 3x-1>0, \\ x^2-4<0, \\ |2x+4|<2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{3}, \\ -2<x<2, \\ -3<x<-1, \end{cases}$ 由数轴看无公共解.

习题 1.1

1. 解方程:

(1) $\dfrac{x+2}{2x-1}=1$;　(2) $5x^2+2x-1=0$;　(3) $x^2-4x+3=0$.

2. 解不等式:

(1) $x-5>4x+4$;　(2) $x^2-5x+6\leqslant 0$;　(3) $|x-2|>1$.

3. 解方程:

(1) $5x-6=4-3x$;　(2) $x^2+3x-4=0$;　(3) $\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{3x}{5x+14}$.

4. 解不等式:

(1) $4x+5>3x+4$;　(2) $x^2-6x-7\leqslant 0$;　(3) $|3x-2|>4$.

5. 解不等式组:

(1) $\begin{cases} 3x+1>x-1, \\ x^2+10x+21\leqslant 0; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x^2>9, \\ 5x>20, \\ x^2-8x+6>0. \end{cases}$

§1.2　指数与对数

指数和对数在实际应用和计算中是很重要的. 例如,你有现金 A_0 元存入银行,年利率是 r,按复利计息(即每年自动转存),则 n 年后的本利和为 $A_0(1+r)^n$,这就要用到指数的运算. 再例如,要存多少年以后可以使本利和达到 A 元,也就是求 n,这就要用到对数运算了.

一、指数及其性质

1. **定义 1**　$a^b=N$ 称为指数幂,a 称为底数,b 称为指数,N 称为以 a 为底、b 为指数的幂.

2. 性质

(1) $a^n\times a^m=a^{n+m}$;　(2) $a^n\div a^m=a^{n-m}$;　(3) $(ab)^n=a^nb^n$;

(4) $(a^n)^m=a^{nm}$;　(5) $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$;　(6) $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$;

(7) $a^0=1$((6)、(7)要求 $a\neq0$).

例 1　$\dfrac{2^5\times5^3}{20^3}=\dfrac{2^5\times5^3}{(4\times5)^3}=\dfrac{2^5\times5^3}{(2^2\times5)^3}=\dfrac{2^5\times5^3}{2^6\times5^3}=2^{-1}\times5^0=\dfrac{1}{2}.$

二、对数及其性质

1. **定义 2**　由 $a^b=N$ 得 $b=\log_a N$,称 $b=\log_a N$ 为以 a 为底 N 的对数($a>0,a\neq1,N>0$).

当 $a=10$ 时称为常用对数,记为 $b=\lg N$;当 $a=\mathrm{e}$($\mathrm{e}=2.718\ 28\cdots$)时称为自然对数,记为 $b=\ln N$.

2. 性质

(1) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$;　(2) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$;

(3) $\log_a M^p=p\log_a M$;　(4) $\log_a \sqrt[n]{M}=\dfrac{1}{n}\log_a M$;

(5) $\log_a a=1$;　(6) $\log_a 1=0$.

换底公式　$\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}.$

恒等式　$a^{\log_a N}=N.$

例 2　1980 年到 2000 年我国的国民生产总值平均每年增长 9.6%,那么我国的国民生产总值这 20 年增长了多少倍?

解 设 1980 年的国民生产总值为 A_0，则 2000 年的国民生产总值为 $A_0(1+0.096)^{20}$，$F=\dfrac{A_0 1.096^{20}}{A_0}=1.096^{20}$，两边取常用对数 $\lg F=20\lg 1.096$，通过查表得 $\lg F=20\lg 1.096\approx 20\times 0.03981=0.7962$，查反对数表 $F\approx 6.2546$.

国民生产总值 20 年增长了 6.254 6 倍.

例 3 已知 $\log_{18}9=a(a\neq 2)$，$18^b=5$，求 $\log_{36}45$.

解 因为 $18^b=5$，所以 $\log_{18}5=b$，又因为 $\log_{18}9=a(a\neq 2)$，所以

$$\log_{36}45=\frac{\log_{18}45}{\log_{18}36}=\frac{\log_{18}(5\times 9)}{\log_{18}(18\times 2)}=\frac{\log_{18}5+\log_{18}9}{\log_{18}18+\log_{18}2}=\frac{b+a}{1+\log_{18}\dfrac{18}{9}}=\frac{b+a}{2-a}.$$

习题 1.2

1. 计算：

(1) $\dfrac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$； (2) $\lg\dfrac{1000}{\sqrt{0.001}}$； (3) $e^{\ln 35}$.

2. 证明换底公式：$\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$.

3. 计算：

(1) $\dfrac{\sqrt[3]{64}\sqrt{48}}{\sqrt{6}}$； (2) $\dfrac{\ln 1000}{\lg\sqrt{0.001}}$； (3) $2^{\log_2 45}$.

4. 比较大小：

(1) $7^{0.2}$__$7^{0.3}$； (2) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1.2}$__$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1.3}$； (3) $\ln 0.3$ __ $\ln 0.5$.

5. 求 $\log_3 8\cdot\log_{16}81$.

§1.3 集 合

一、集合的概念

集合论起源于 19 世纪后期，是现代数学的重要分支，也是现代数学的最基础概念. 先看下面的例子.

(1) 1 到 10 的所有自然数；

(2) 一个班级的全体学生；

(3) 所有直角三角形；

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(4) 数轴上一段线段上所有的实数点.

上述各例都是指**一类东西的全体**."类"指具有某种特性,"东西"指可以包罗万象的对象,"全体"指可以确定范围的所有个体.我们把具有某种特性的对象的全体叫作**集合**,其中的对象叫作**元素**.这是集合的概念,是一种描述,而不是定义.通常我们用 $A,B,\cdots$ 表示集合,用 $a,b,\cdots$ 表示元素.

元素与集合的关系用 $\in$(**属于**)与 $\notin$(**不属于**)表示,例如 $A=\{a,b,c\}$,则 $a\in A,d\notin A$.

集合元素具有下列性质:(1)**确定性**,一个集合的元素是能判断 $\in$ 或 $\notin$,例如"本校高个子的学生的全体"就不能构成一个集合;(2)**无序性**,例如 $A=\{a,b,c\}=\{c,a,b\}$;(3)**唯一性**,例如 $A=\{a,b,a\}=\{a,b\}$.

集合可分为**有限集**和**无限集**两大类.如上述例子中的(1)、(2)就是有限集,(3)、(4)就是无限集.下面介绍三个特殊集合概念.

单元素集　只有一个元素的集合叫作单元素集.如方程 $(x-1)^2=0$ 的解集就是单元素集.

空集　没有元素的集合叫作空集.如方程 $x^2+1=0$ 的实数解集就是空集.一般空集记为 $\varnothing$ 或 $\{\ \}$.

数集　由数组成的集合.现将常用的数集及符号列表如下:

数集	自然数集	整数集	正整数集	有理数集	实数集
记号	$\mathbf{N}$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}^+$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

二、集合的表示法

集合的表示方法通常有两种:

(1) 列举法　将集合的元素一一列举在花括号内表示一个集合的方法.例如 $A=\{a,b,c\}$,$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$ 都是列举法.

(2) 描述法　将集合的元素所具有的特性描述出来,写在花括号内表示一个集合的方法.例如 $A=\{$直角三角形$\}$,$B=\{x\mid x^2-9>0\}$ 都是描述法.特别地 $B=\{x\mid x^2-9>0\}$ 又称**迭代表元**方法,x 代表集合的任一元素,竖线后描述集合元素所具有的特性.

三、集合的关系

(1) **子集**　$\forall x\in A\Rightarrow x\in B$,则称 A 是 B 的子集,记为 $A\subset B$ 或 $A\subseteq B$(图 1-1).如 $\varnothing\subset A$,$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

真子集　当集合 A 是 B 的子集,且 $A\neq B$ 时,则称 A 是 B 的真子集.

注　① 空集是任何集合的子集且是非空集合的真子集,$\varnothing\subset A$,$\varnothing\subset\{0\}$,

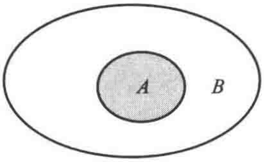
$\varnothing\subset\{\varnothing\}$；

② 任何集合 A 是自身的子集，即 $A\subset A$.

(2) **集合的相等** 当 $A\subset B, B\subset A$ 时，称集合 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

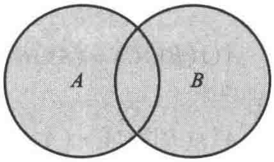
四、集合的运算

(1) **并集** 把集合 A 或集合 B 的所有元素组成的集合 C 称为 A 与 B 的并集，记为 $A\cup B$. $C=A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$. 文氏图为图 1－2.



$A\subset B$

图 1－1



$A\cup B$

图 1－2

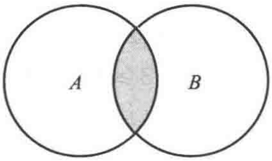
例 设 $A=\{x\mid x^2-5x+6<0\}$，$B=\left\{x\mid 1\leqslant x<\dfrac{5}{2}\right\}$，求 $A\cup B$.

解 $A=\{x\mid x^2-5x+6<0\}=\{x\mid 2<x<3\}$，所以 $A\cup B=\{x\mid 1\leqslant x<3\}$.

(2) **交集** 把既属于集合 A，又属于集合 B 的所有元素组成的集合 C 称为 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$. $C=A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$. 文氏图为图 1－3.

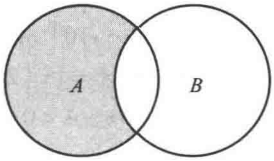
如上例中 $A\cap B=\left\{x\mid 2<x<\dfrac{5}{2}\right\}$.

(3) **差集** 把属于集合 A 且不属于集合 B 的所有元素组成的集合 C 称为 A 与 B 的差集，记为 $A-B$. $C=A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$. 文氏图为图 1－4.



$A\cap B$

图 1－3



$A-B$

图 1－4

如上例中 $A-B=\left\{x\mid \dfrac{5}{2}\leqslant x<3\right\}$.

(4) **全集、补集** 在研究集合的时候，如果集合 Ω 能使所研究的集合都是它的子集，这时将集合 Ω 叫作**全集**.

全集是相对而言的，与研究的集合有关.

设 A 是 Ω 的子集，则把 $\Omega - A$ 叫作 A 的**补集**，记为 $\overline{A}$，即 $\overline{A} = \Omega - A$，文氏图为图 1－5.

显然有 $A \cup \overline{A} = \Omega, A \cap \overline{A} = \varnothing, A \cup \Omega = \Omega, A \cap \Omega = A$.

(5) 集合的运算规律

同一律　$A \cup A = A, A \cap A = A$;

交换律　$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

吸收律　$A \cup \Omega = \Omega, A \cap \Omega = A; A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B, A \cap B = A$;

结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

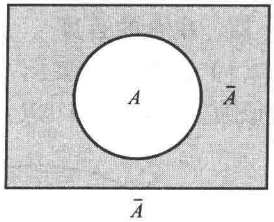


图 1－5

分配律　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

反演律(德·摩根定律)　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

习题 1.3

1. 设全集 $\Omega = \{x \mid -6 < x < 5, x \in \mathbf{Z}\}$，$A = \{1,2,3\}$，求 $\overline{A}$.

2. 设 $A = \{x \mid x \leqslant 5, x \in \mathbf{Z}^+\}$，$B = \{x \mid x^2 = 25\}$，求 $A \cup B, A \cap B$.

3. 设 A = {圆柱合格品}，B = {圆柱长度合格品}，C = {圆柱直径合格品}，试描述下列集合为哪些产品：(1) $A \cup B$；(2) $A \cap C$；(3) $B - A$.

4. 填空题(填上符号 $\in$，$\notin$，$\subset$，$\subseteq$)

(1) $\varnothing$__$\mathbf{N}$;　(2) 0__$\mathbf{N}$;　(3) $\sqrt{2}$__$\mathbf{R}$;　(4) π__$\mathbf{Q}$;

(5) $\{a\}$__$\{a,b,c\}$;　(6) $\varnothing$__$\{\varnothing\}$;　(7) 0__$\varnothing$;　(8) $\varnothing$__A.

5. 设 $A = \{1,2,3,4,5\}$，$B = \{1,2,3\}$，$C = \{x \mid x(x-2)(x-4) = 0\}$，求 $A \cup B$，$A \cap C, B - C$.

6. 设 $\Omega = \{1,2,3,\cdots,10\}$，$A = \{1,3,5,7,9\}$，$B = \{1,2,3,4\}$，求 $\overline{A}, \overline{A \cup B}$.

7. 已知全集 $\Omega = \mathbf{R}$，$A = \{x \mid 2x - 5 < 0\}$，$B = \{x \mid x - 3 \geqslant 0\}$，求 $\overline{A \cap B}, \overline{A} \cup \overline{B}$.

8. 设 $A = \{x \mid x^2 - 3x - 4 < 0\}$，$B = \{x \mid x^2 > 1\}$，求：$A \cup B, A \cap B, A - B, B - A$.

§1.4　函　　数

一、区间与邻域

设 $a < b$ 且都是实数，则把满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的一切实数 x 构成的集合叫做**闭区间**，记为 $[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$；同样有**开区间** $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$；**半开区间** $[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$，$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$；**无穷区间** $(-\infty, +\infty) =$

$\{x \mid x\in \mathbf{R}\}$，$(-\infty,a)=\{x \mid x<a\}$，$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\}$.

设 $x_0\in\mathbf{R}$，把开区间 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 称为 x_0 的一个 **$\boldsymbol{\varepsilon}$ 邻域**，记为 $U(x_0,\varepsilon)$；$(x_0-\varepsilon,x_0)\cup(x_0,x_0+\varepsilon)$ 称为 x_0 的一个**去心的 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 邻域**，记为 $\mathring{U}(x_0,\varepsilon)$.

二、映射

定义 1 设 A,B 是两个集合，对于 A 中的任一元素 a，按照某个对应法则 ϕ，在 B 中都有唯一确定的元素 b 与之相对应，则称 ϕ 是集合 A 到集合 B 的**映射**，记为 $\phi:A\to B$. 这时 b 称为 a 在 ϕ 下的**象**，a 称为 b 在 ϕ 下的**原象**.

例 1 $A=\{$某班级学生的学号$\}$，$B=\{$该班级学生的数学期中考试成绩$\}$，ϕ 是每个学生的数学期中考试成绩，则 ϕ 是 A 到 B 的映射.

例 2 $A=\{$某班级学生的年龄段$\}$，$B=\{$该班级学生的学号$\}$，ϕ 是每个学生的年龄段所对应的学号，则 ϕ 就不是 A 到 B 的映射.

三、函数

定义 2 设某研究过程中有两个变量 x,y，$x\in D$，$y\in M$，如果对任一 $x\in D$，按照一定的对应关系 f 都可以唯一地确定一个 $y\in M$，则称 y 是 x 的**函数**，记为 $y=f(x)$. x 称为函数的自变量，y 称为函数的因变量，也称为 x 的函数，D 称为函数的**定义域**，M 称为函数的**值域**，f 为**函数关系**（图 1－6）.

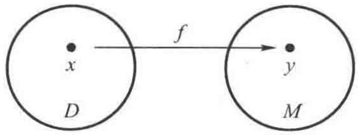


图 1－6

例 3 设 $y=f(x)=\sqrt{x^2-4}$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(3)$，$f(a)$.

解 $f(0)$ 没有意义；$f(-1)$ 也没意义；$f(3)=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$；$f(a)=\sqrt{a^2-4}$ $(a^2\geqslant 4)$，若 $a^2<4$，$f(a)$ 没意义.

注 （1）函数是一种特殊的映射，是数集之间的映射.

（2）函数的定义域 D 和对应关系 f 是函数的**二要素**.

（3）函数的对应关系 f 一般有表格、平面曲线、公式或解析式等几种方式.

如 x 表示某班级学生的学号，y 表示学生的数学期中考试成绩，则 $y=f(x)$ 表示学号到成绩的对应关系，就是学号和成绩的表格.

再如温度自动记录仪在纸上画出的温度曲线 $T=f(t)$ 表示了时间 t 与温度 T 之间的函数关系，就是一条平面曲线.

例 4 求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}$；（2）$y=\sqrt{4x-8}$；（3）$y=\ln(7x+21)$；

（4）$y=\sqrt{x}+\sqrt{-x}$；（5）$y=x^2+x$.

解 （1）由分母不为 0 得 $x^2-5x+6\neq 0\Rightarrow(x-2)(x-3)\neq 0\Rightarrow x\neq 2,x\neq 3$，

所以 $D=(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$;

(2) 由偶次根式内大于等于 0 得 $4x-8\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant 2$,所以 $D=[2,+\infty)$;

(3) 由对数的真数大于 0 得 $7x+21>0\Rightarrow x>-3$,所以 $D=(-3,+\infty)$;

(4) $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ -x\geqslant 0 \end{cases}\Rightarrow x=0$,所以 $D=\{0\}$;

(5) 因为函数为二次多项式,所以 $D=(-\infty,+\infty)$.

例 5　用 18 m 长的篱笆靠墙围一个矩形的院子,设与墙相对的矩形的一边长为 x,求矩形的面积关于 x 的函数.

解　由题意设矩形的另一边长为 h,则 $h=\dfrac{18-x}{2}$,故矩形的面积为 $A=x\dfrac{18-x}{2}=-\dfrac{x^2}{2}+9x,x\in(0,18)$.

例 6　在一个边长为 $2a$ 的等边三角形内依托一边做一内接矩形,设在三角形边上的矩形的边长为 x,求矩形的对角线 L 关于 x 的函数关系.

解　等边三角形的高 $h=\sqrt{3}a$,矩形的高为 m,由相似三角形的性质有 $\dfrac{x/2}{a}=\dfrac{\sqrt{3}a-m}{\sqrt{3}a}\Rightarrow m=\sqrt{3}a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$. 所以矩形的对角线 $L=\sqrt{x^2+3\left(a-\dfrac{x}{2}\right)^2},x\in(0,2a)$.

例 7(分段函数例子)　分段函数是一个在不同的区间上表达式不同的函数. 设飞机行李托运费规定小于等于 20 kg 免费,20 kg 到 50 kg 部分每千克 1 元,50 kg 以上部分每千克 2 元,试求飞机行李托运费 y 关于行李重量 x 的函数关系.

解　(1) 当 $x\leqslant 20$ 时,$y=0$;

(2) 当 $20<x\leqslant 50$ 时,$y=x-20$;

(3) 当 $x>50$ 时,$y=2(x-50)+30=2x-70$.

所以

$$y=\begin{cases} 0, & x\leqslant 20, \\ x-20, & 20<x\leqslant 50, \\ 2x-70, & x>50. \end{cases}$$

例 8　在一个半径为 R 的圆内做一个内接等腰三角形,设三角形的底边为 x,求等腰三角形的周长 L、面积 A 关于 x 的函数关系.

解　等腰三角形底边上的高 $h=R+l,l=\sqrt{R^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}$. 所以腰长

$$m=\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+h^2}=\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+(R+l)^2}=\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(R+\sqrt{R^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{2\left(R^2+R\sqrt{R^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)}.$$

周长

$$L=x+2m=x+2\sqrt{2\left(R^2+R\sqrt{R^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)}.$$

面积

$$A=\frac{1}{2}xh=\frac{1}{2}x(R+l)=\frac{1}{2}x\left(R+\sqrt{R^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right),\quad x\in(0,2R).$$

四、反函数

在函数关系中,自变量和因变量的位置是相对的,如工资是工时的线性函数 $y=3x+5$,由工时 x 可计算出工资 y,但有时候要由工资 y 反过来计算工时 x,则 $x=\frac{y-5}{3}$,我们把后者就叫作反函数.

定义 3 设函数 $y=f(x)$,$x\in D$,$y\in M$,如果反对应 $y\to x$ 也是唯一的,即 $y=f(x)$是**1-1 对应关系**的,则称函数 $y=f(x)$存在**反函数** $x=f^{-1}(y)$,$y\in M$,$x\in D$. 习惯上我们以 x 为自变量,y 为因变量,故把 x 与 y 对调,将它改写为 $y=f^{-1}(x)$,$x\in M$,$y\in D$.

注 (1) $x=f^{-1}(y)$,$y\in M$,$x\in D$ 叫作 $y=f(x)$的**直接反函数**,x,y,D,M 以及函数图形都是原来不变的;

(2) $y=f^{-1}(x)$,$x\in M$,$y\in D$ 叫作**矫形反函数**,定义域和值域对调,$y=f^{-1}(x)$的图形与 $y=f(x)$的图形关于直线 $y=x$ 轴对称,如图 1-7 所示.

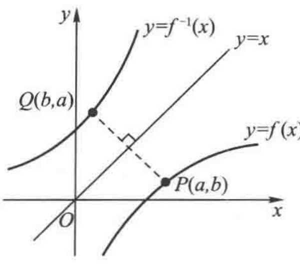


图 1-7

一般求反函数时只求矫形反函数.

例 9 求下列函数的反函数:

(1) $y=\frac{2x+1}{x-2}(x\neq2)$; (2) $y=\sqrt{x-1}-1(x\geqslant1)$; (3) $y=e^{-x}-2$.

解 (1) 由 $y=\frac{2x+1}{x-2}\Rightarrow x=\frac{2y+1}{y-2}(y\neq2)$,把 x 与 y 对调,所以所求反函数为$y=\frac{2x+1}{x-2}(x\neq2)$.

(2) 由 $y=\sqrt{x-1}-1(x\geqslant1)\Rightarrow x=(y+1)^2+1$,把 x 与 y 对调,所以所求反函数为 $y=(x+1)^2+1$,$x\in\mathbf{R}$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com