普通高等教育“十二五”规划教材

微积分

主审 马世豪
主编 陈 静 孙 慧 司会香

教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

微　积　分

主　审　马世豪
主　编　陈　静　孙　慧　司会香

华中师范大学出版社

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

微积分/陈静,孙慧,司会香主编. —武汉:华中师范大学出版社,2015.8
ISBN 978-7-5622-7043-0

Ⅰ.①微… Ⅱ.①陈… ②孙… ③司… Ⅲ.①微积分 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 148944 号

微 积 分

主编:陈 静 孙 慧 司会香 ©
主审:马世豪
责任编辑:袁正科 **责任校对**:易 雯
封面设计:罗明波
编辑室:第二编辑室
电话:027-67867362
出版发行:华中师范大学出版社
社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号
销售电话:027-67863426/67863280
邮编:430079
邮购电话:027-67861321
传真:027-67863291
网址:http://press.ccnu.edu.cn/
电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn
印刷:武汉鑫昶文化有限公司
督印:王兴平
字数:520 千字
开本:787 mm×1092 mm 1/16
印张:23.75
版次:2015 年 8 月第 1 版
印次:2015 年 8 月第 1 次印刷
印数:1—2000
定价:45.00 元

欢迎上网查询、购书

前　言

微积分是高等院校工科类专业、经管类专业的一门重要的数学基础课。2003年，教育部“非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会”制定了《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，我们根据此基本要求，并参照《工科、经济学、管理学全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求，编写了这本《微积分》教材。

本书的特点是每章知识目标明确、思路清晰、重点突出、叙述流畅。在内容设计上首先突出了微积分的基本思想和基本方法，重视知识结构和经典理论的论述，同时本着夯实基础，重视培养抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力的宗旨，选择了全面、典型的题目作为例题，以加强对知识点的理解。另外，每节后附有相应的基础性习题，每章后附有综合性复习题，使学生既能同步进行练习，也能复习、巩固整章知识点。加“*”号的章节可作为选修内容。

全书共11章，其中第3章、第5章、第9章及第10章由陈静编写，第4章、第8章及第11章由孙慧编写，第1章、第2章、第6章及第7章由司会香编写，马世豪教授对本书稿进行了缜密的审读和统稿，并提出了许多宝贵的意见。本教材在出版过程中得到了华中师范大学武汉传媒学院、华中师范大学出版社的大力支持和热心帮助，在此对他们一并表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中难免存在诸多不妥之处，恳请读者批评指正！

编　者

2015年6月

目　录

第 1 章　函数的极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象，是生产实践、科学研究中各种变量之间的相互关系的数学反映。在研究函数时，离不开极限的概念及其计算方法。作为全书的开篇，本章将简要地介绍函数的基本概念及相关的基础知识。在引入极限概念的同时，本章将着重讨论极限的计算方法，此外，还将介绍几个常用的经济函数。

1.1　函数的概念

1.1.1　数集、区间和邻域

1. 常用的数集

自然数集：$\mathbf{N}, \mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$；$\mathbf{N}^{+}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$；

整数集：$\mathbf{Z}, \mathbf{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$；

有理数集：$\mathbf{Q}, \mathbf{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\,\middle|\, p\in\mathbf{Z}, q\in\mathbf{N}^{+}\text{，且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}$；

实数集：$\mathbf{R}$。

2. 区间和邻域

(1) **有限区间**

设 $a<b$，称数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 为**开区间**，记为 (a,b)，如图 1-1(1) 所示，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}。$$

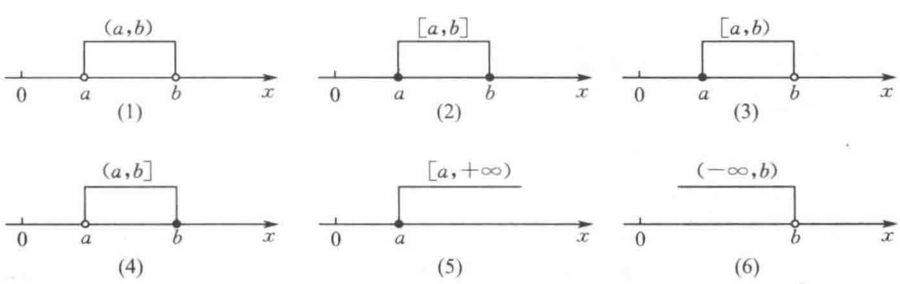


图 1-1

类似地有：

$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，如图 1-1(2) 所示。

$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$ 称为半开半闭区间，如图 1-1(3)、

图 1-1(4) 所示。

其中 a 和 b 称为区间 (a,b),$[a,b]$,$[a,b)$,$(a,b]$ 的端点,$b-a$ 称为区间的长度。

(2) **无限区间**

$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$,$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$,$(-\infty,+\infty)=\{x||x|<+\infty\}$,如图 1-1(5)、图 1-1(6) 所示。

(3) **邻域**

定义 1.1 设 δ 是一正数,则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域,简称**邻域**,记作 $N(a,\delta)$,即

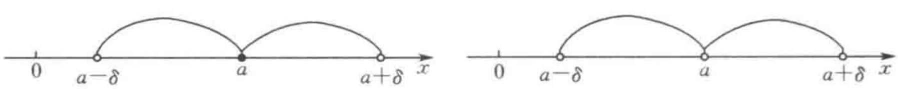
$$N(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}=\{x||x-a|<\delta\},$$

从 $N(a,\delta)$ 中去掉点 a 后所得的集合 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域,简称为**去心邻域**,记作 $N^0(a,\delta)$,即

$$N^0(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\},$$

其中,点 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径。

在几何上,邻域 $N(a,\delta)$ 是数轴上以点 a 为中心、δ 为半径的区间内的点的全体,如果不需要特别强调邻域的半径 δ,就用 $N(a)$ 表示点 a 的某一邻域,$N^0(a)$ 表示点 a 的某一去心邻域,如图 1-2 所示。



$N(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}$ $N^0(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$

图 1-2

1.1.2 函数的定义

定义 1.2 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集,如果对于每个数 $x\in D$,按照某种法则总有唯一确定的 y 值与它对应,则称变量 y 是 x 的函数,记作

$$y=f(x),x\in D,$$

其中,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,x 的变化范围 D 称为函数的**定义域**,全体函数值的集合称为函数 f 的**值域**,记作 D_f,即

$$D_f=\{y\mid y=f(x),x\in D\}。$$

关于函数定义的几点说明:

(1) 函数有三个要素,即对应法则、定义域和值域。当对应法则和定义域确定后,值域便自然确定下来。因此,函数的基本要素为两个:对应法则和定义域。所以函数也常表示为:$y=f(x)$,$x\in D$。由此,我们说两个函数相同,是指它们有相同的对应法则和定义域。

(2) 函数用解析式表示时,函数的定义域常取使该运算式子有意义的自变量的全体,通常称之为存在域(自然定义域)。此时,函数的记号中的定义域 D 可省略不写,而只用对

应法则 f 来表示一个函数。即"函数 $y=f(x)$"或"函数 f"。

(3) 函数定义中，如果对于每个数 $x\in D$，只能有唯一的一个 y 值与它对应，这样定义的函数称为**单值函数**，若对同一个 x 值，可以对应于多个 y 值，则称这种函数为**多值函数**。本书中只讨论单值函数(简称函数)。

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x^2-4}$；　　(2) $y=\ln(1-x^2)+\sqrt{x}$。

解　(1) 要使函数有意义，必须满足 $x\neq 0$，且 $x^2-4\geqslant 0$。解不等式得 $|x|\geqslant 2$。所以函数的定义域为 $D=\{x\,|\,|x|\geqslant 2\}$，或 $D=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$。

(2) 函数第一项 $\ln(1-x^2)$ 的定义域是满足不等式 $1-x^2>0$ 的值，解得 $-1<x<1$，第二项 $\sqrt{x}$ 的定义域是 $x\geqslant 0$，所以函数的定义域为 $D=\{x\,|\,0\leqslant x<1\}$。

例 2　下列函数是否相同?为什么?

(1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；　　(2) $w=\sqrt{u}$ 与 $y=\sqrt{x}$。

解　(1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 不是相同的函数，因为它们的定义域不相同。

(2) $w=\sqrt{u}$ 与 $y=\sqrt{x}$ 是相同的函数，它们的定义域和对应法则都相同，只是表示函数所用的字母不同而已。

1.1.3　函数的表示方法

1. 主要方法

(1) **解析法(公式法)**：

前面例 1、例 2 中表示函数所用的方法便是解析法。

(2) **列表法**：

例如，某超市 2010 年第一季度各月销售额(万元) 如表 1-1 所示：

表 1-1

月份 t	1	2	3
销售额	86.2	102.3	64.8

表 1-1 表示的是两个量的函数关系。

(3) **图象法**：

例如，某地某日气温 T 和时间 t 是两个变量，由气温自动记录仪描得一条曲线(见图 1-3)，这条曲线表示了 t 为自变量，T 为因变量的函数关系。

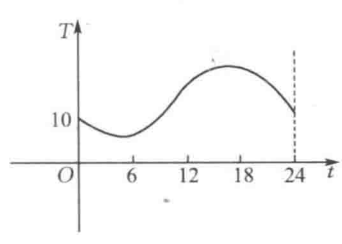


图 1-3

2. 用"特殊方法"来表示的函数

(1) **分段函数**：在定义域的不同部分用不同的公式来表示。

例如,符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, x>0,\\ 0, x=0,\\ -1, x<0,\end{cases}$ 其函数图象如图 1-4 所示。

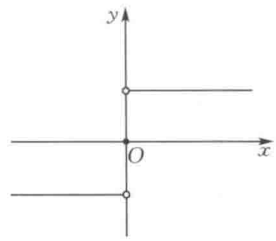


图 1-4

(2) **用语言叙述的函数:**

例如,① **取整函数** $y=[x]$,$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

② **狄里克雷(Dirichlet) 函数**

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{当 } x \text{ 为有理数},\\ 0, \text{当 } x \text{ 为无理数}。\end{cases}$$

③ **黎曼(Riemann) 函数**

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, \text{当 } x=\dfrac{p}{q}\left(p,q\in\mathbf{N}^{+}, \dfrac{p}{q} \text{ 为假分数}\right),\\ 0, \text{当 } x=0,1 \text{ 和}(0,1) \text{ 内的无理数}。\end{cases}$$

注意 以上三种函数都不是分段函数。

1.1.4 初等函数

1. 基本初等函数及其图象

(1) **常值函数** $y=C$(C 为常数);

(2) **幂函数** $y=x^{a}(a\in\mathbf{R})$,如图 1-5 所示。

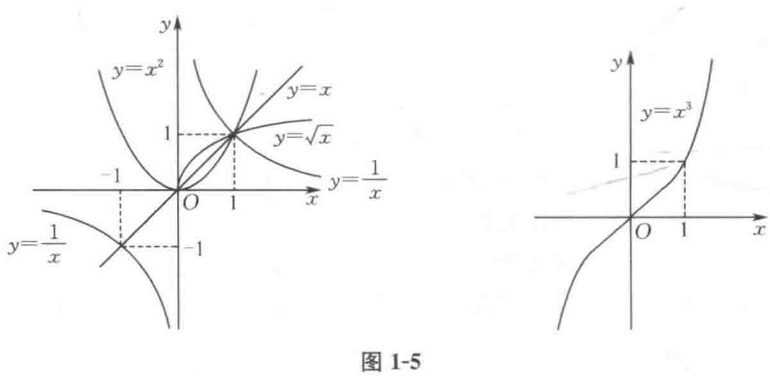


图 1-5