



普通高等教育“十二五”规划教材

微积分

主审 马世豪
主编 陈 静 孙 慧 司会香

普通高等教育“十二五”规划教材

微 积 分

主 审 马世豪

主 编 陈 静 孙 慧 司会香

华中师范大学出版社

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

微积分/陈静,孙慧,司会香主编. —武汉:华中师范大学出版社,2015. 8
ISBN 978-7-5622-7043-0

I. ①微… II. ①陈… ②孙… ③司… III. ①微积分 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 148944 号

微 积 分

主编:陈 静 孙 慧 司会香 ©

责任编辑:袁正科

责任校对:易 雯

编辑室:第二编辑室

出版发行:华中师范大学出版社

销售电话:027-67863426/67863280

邮购电话:027-67861321

网址:<http://press.ccnu.edu.cn/>

印刷:武汉鑫昶文化有限公司

字数:520 千字

开本:787mm×1092mm 1/16

版次:2015 年 8 月第 1 版

印数:1—2000

主审:马世豪

封面设计:罗明波

电话:027-67867362

社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号

邮编:430079

传真:027-67863291

电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn

督印:王兴平

印张:23.75

印次:2015 年 8 月第 1 次印刷

定价:45.00 元

欢迎上网查询、购书

敬告读者:欢迎举报盗版,请打举报电话 027-67861321。

前 言

微积分是高等院校工科类专业、经管类专业的一门重要的数学基础课。2003年，教育部“非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会”制定了《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，我们根据此基本要求，并参照《工科、经济学、管理学全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的要求，编写了这本《微积分》教材。

本书的特点是每章知识目标明确、思路清晰、重点突出、叙述流畅。在内容设计上首先突出了微积分的基本思想和基本方法，重视知识结构和经典理论的论述，同时本着夯实基础，重视培养抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力宗旨，选择了全面、典型的题目作为例题，以加强对知识点的理解。另外，每节后附有相应的基础性习题，每章后附有综合性复习题，使学生既能同步进行练习，也能复习、巩固整章知识点。加“*”号的章节可作为选修内容。

全书共11章，其中第3章、第5章、第9章及第10章由陈静编写，第4章、第8章及第11章由孙慧编写，第1章、第2章、第6章及第7章由司会香编写，马世豪教授对本书稿进行了缜密的审读和统稿，并提出了许多宝贵的意见。本教材在出版过程中得到了华中师范大学武汉传媒学院、华中师范大学出版社的大力支持和热心帮助，在此对他们一并表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中难免存在诸多不妥之处，恳请读者批评指正！

编 者

2015年6月

目 录

第 1 章 函数的极限与连续	(1)
1.1 函数的概念	(1)
1.1.1 数集、区间和邻域	(1)
1.1.2 函数的定义	(2)
1.1.3 函数的表示方法	(3)
1.1.4 初等函数	(4)
1.1.5 函数的性质	(7)
习题 1.1	(8)
1.2 数列的极限	(9)
1.2.1 数列的概念	(9)
1.2.2 数列的极限	(9)
1.2.3 数列极限的性质	(11)
习题 1.2	(11)
1.3 函数的极限	(12)
1.3.1 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	(12)
1.3.2 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	(14)
1.3.3 函数极限的性质	(16)
习题 1.3	(16)
1.4 极限的运算法则	(17)
1.4.1 极限的四则运算法则	(17)
1.4.2 极限的复合运算	(18)
1.4.3 无穷小与无穷大	(19)
习题 1.4	(20)
1.5 极限的存在准则与两个重要极限	(21)
1.5.1 极限的存在准则	(21)
1.5.2 两个重要极限	(21)
1.5.3 无穷小的比较	(24)
习题 1.5	(25)
1.6 函数的连续性	(25)
1.6.1 函数的连续性	(26)
1.6.2 闭区间上连续函数的性质	(29)

习题 1.6	(30)
1.7* 几种常用的经济函数	(30)
1.7.1 需求函数与供给函数	(30)
1.7.2 成本函数、收入函数与利润函数	(32)
习题 1.7	(32)
复习题 1	(33)
第 2 章 导数与微分	(35)
2.1 导数的概念	(35)
2.1.1 引例	(35)
2.1.2 导数的定义	(36)
2.1.3 用导数定义计算函数的导数	(37)
2.1.4 左导数与右导数	(39)
2.1.5 导数的几何意义	(40)
2.1.6 函数可导性与连续性之间的关系	(40)
习题 2.1	(41)
2.2 函数的求导法则	(42)
2.2.1 求导的四则运算法则	(42)
2.2.2 反函数的求导法则	(43)
2.2.3 复合函数的求导法则	(44)
2.2.4 隐函数的求导法则	(46)
2.2.5 由参数方程确定的函数的导数	(48)
习题 2.2	(49)
2.3 高阶导数	(50)
2.3.1 高阶导数的定义	(50)
2.3.2 高阶导数的运算法则	(52)
习题 2.3	(53)
2.4 函数的微分	(53)
2.4.1 微分的定义与几何意义	(53)
2.4.2 微分运算法则与微分公式	(55)
2.4.3 微分在近似计算中的应用	(57)
习题 2.4	(58)
2.5* 经济函数的边际与弹性	(58)
2.5.1 边际分析	(58)
2.5.2 函数的弹性	(59)
习题 2.5	(61)

复习题 2	(61)
第 3 章 微分中值定理与导数的应用	(63)
3.1 微分中值定理	(63)
3.1.1 费马(Fermat)定理	(63)
3.1.2 罗尔(Rolle)定理	(64)
3.1.3 拉格朗日(Lagrange)中值定理	(66)
3.1.4 柯西(Cauchy)中值定理	(68)
习题 3.1	(69)
3.2 洛必达(L'Hospital)法则	(69)
3.2.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限	(69)
3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限	(71)
3.2.3 其他类型未定式($0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$)的极限	(72)
习题 3.2	(73)
3.3 函数的单调性与曲线的凹凸性	(73)
3.3.1 函数的单调性	(73)
3.3.2 曲线的凹凸性	(76)
习题 3.3	(77)
3.4 函数的极值与最值	(78)
3.4.1 函数的极值	(78)
3.4.2 函数的最大值和最小值	(80)
习题 3.4	(83)
3.5 函数图象的描绘	(83)
3.5.1 曲线的渐近线	(83)
3.5.2 函数图象的描绘	(85)
习题 3.5	(87)
3.6 曲率	(88)
3.6.1 平面曲线曲率的概念	(88)
3.6.2 曲率的计算公式	(90)
3.6.3 曲率圆与曲率半径	(91)
习题 3.6	(93)
复习题 3	(93)
第 4 章 不定积分	(95)
4.1 不定积分的概念与性质	(95)
4.1.1 原函数与不定积分的概念	(95)

4.1.2	不定积分的性质	(96)
4.1.3	基本积分表	(97)
习题 4.1	(98)
4.2	换元积分法.....	(99)
4.2.1	第一类换元法(凑微分法)	(99)
4.2.2	第二类换元法.....	(103)
习题 4.2	(106)
4.3	分部积分法	(106)
习题 4.3	(110)
4.4	有理函数和可化为有理函数的积分	(110)
4.4.1	有理函数的积分.....	(110)
4.4.2	三角函数有理式的积分.....	(113)
4.4.3	简单无理函数的积分.....	(115)
4.4.4	积分表的使用.....	(116)
习题 4.4	(117)
复习题 4	(117)
第 5 章	定积分及其应用	(119)
5.1	定积分的概念	(119)
5.1.1	引例.....	(119)
5.1.2	定积分的定义.....	(121)
5.1.3	定积分的几何意义.....	(122)
习题 5.1	(124)
5.2	定积分的性质	(124)
习题 5.2	(127)
5.3	微积分基本公式	(128)
习题 5.3	(131)
5.4	定积分的换元积分法和分部积分法	(132)
5.4.1	定积分的换元积分法.....	(132)
5.4.2	定积分的分部积分法.....	(134)
习题 5.4	(135)
5.5	定积分的应用	(136)
5.5.1	定积分的微元法.....	(136)
5.5.2	平面图形的面积.....	(137)
5.5.3	旋转体的体积.....	(139)
5.5.4	平面曲线的弧长.....	(141)

5.5.5 定积分的物理应用举例·····	(142)
习题 5.5·····	(144)
5.6 广义积分·····	(145)
5.6.1 无限区间的广义积分·····	(145)
5.6.2 无界函数的广义积分·····	(147)
习题 5.6·····	(149)
复习题 5·····	(149)
第 6 章 常微分方程 ·····	(152)
6.1 常微分方程的基本概念·····	(152)
6.1.1 有关微分方程概念的引例·····	(152)
6.1.2 微分方程的概念及其类型·····	(153)
6.1.3 微分方程的解·····	(154)
习题 6.1·····	(155)
6.2 一阶常微分方程·····	(156)
6.2.1 可分离变量方程·····	(157)
6.2.2 齐次方程·····	(159)
6.2.3 一阶线性微分方程·····	(161)
6.2.4 伯努利方程·····	(163)
习题 6.2·····	(164)
6.3 可降阶的高阶微分方程·····	(164)
6.3.1 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程·····	(164)
6.3.2 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程·····	(165)
6.3.3 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程·····	(166)
6.3.4 二阶齐次线性方程的常用定理介绍·····	(167)
习题 6.3·····	(168)
6.4 二阶常系数线性微分方程·····	(168)
6.4.1 二阶常系数齐次线性微分方程·····	(168)
6.4.2 二阶常系数非齐次线性微分方程·····	(171)
习题 6.4·····	(174)
6.5 微分方程的应用·····	(174)
6.5.1 微分方程在几何上的应用·····	(174)
6.5.2 微分方程在其他方面的应用·····	(175)
习题 6.5·····	(175)
复习题 6·····	(176)

第7章 向量代数与空间解析几何	(177)
7.1 空间直角坐标系	(177)
7.1.1 空间直角坐标系	(177)
7.1.2 空间两点间的距离	(179)
习题 7.1	(180)
7.2 向量及其线性运算	(180)
7.2.1 向量概念	(180)
7.2.2 向量的线性运算	(181)
习题 7.2	(183)
7.3 向量的坐标	(183)
7.3.1 向量的坐标表示	(183)
7.3.2 向量的模、方向角、投影	(185)
习题 7.3	(186)
7.4 向量间的乘法	(187)
7.4.1 两向量的数量积	(187)
7.4.2 两向量的向量积	(188)
7.4.3 向量的混合积	(190)
习题 7.4	(190)
7.5 平面及其方程	(191)
7.5.1 平面的点法式方程	(191)
7.5.2 平面的一般方程	(192)
7.5.3 两平面的夹角	(194)
习题 7.5	(195)
7.6 空间直线及其方程	(195)
7.6.1 空间直线的一般方程	(195)
7.6.2 空间直线的对称式方程与参数方程	(196)
7.6.3 两直线的夹角	(197)
7.6.4 直线与平面之间的常见问题	(198)
7.6.5 综合例题	(202)
习题 7.6	(203)
7.7 空间曲面与曲线的一般概念	(204)
7.7.1 空间曲面及其方程	(204)
7.7.2 二次曲面	(208)
7.7.3 空间曲线及其方程	(212)

习题 7.7	(213)
复习题 7	(214)
第 8 章 多元函数微分学	(215)
8.1 多元函数、极限与连续性	(215)
8.1.1 平面点集与区域	(215)
8.1.2 多元函数的概念	(216)
8.1.3 二元函数的极限	(217)
8.1.4 二元函数的连续性	(218)
习题 8.1	(219)
8.2 偏导数与全微分	(220)
8.2.1 偏导数的概念	(220)
8.2.2 高阶偏导数	(222)
8.2.3 全微分	(223)
习题 8.2	(225)
8.3 多元复合函数与隐函数的微分法	(226)
8.3.1 复合函数的微分法	(226)
8.3.2 一阶全微分形式的不变性	(229)
8.3.3 隐函数的微分法	(230)
习题 8.3	(231)
8.4 多元函数的极值	(232)
8.4.1 多元函数的极值与最值	(232)
8.4.2 条件极值	(234)
习题 8.4	(236)
8.5 多元函数微分法在几何上的应用	(236)
8.5.1 空间曲线的切线与法平面	(236)
8.5.2 空间曲面的切平面与法线	(236)
习题 8.5	(242)
8.6 方向导数与梯度	(243)
8.6.1 方向导数	(243)
8.6.2 梯度	(245)
习题 8.6	(247)
复习题 8	(247)
第 9 章 重积分	(250)
9.1 二重积分的概念与性质	(250)

9.1.1	两个典型的问题	(250)
9.1.2	二重积分的定义	(252)
9.1.3	二重积分的性质	(253)
习题 9.1		(255)
9.2	二重积分的计算	(256)
9.2.1	直角坐标系下二重积分的计算	(256)
9.2.2	极坐标系下二重积分的计算	(262)
习题 9.2		(266)
9.3	三重积分	(267)
9.3.1	三重积分的概念	(267)
9.3.2	三重积分的计算	(268)
习题 9.3		(276)
9.4	重积分的几何应用举例	(276)
9.4.1	平面图形的面积	(277)
9.4.2	空间立体的体积	(277)
9.4.3	空间曲面的面积	(278)
习题 9.4		(280)
复习题 9		(281)
第 10 章	曲线积分与曲面积分	(283)
10.1	第一型曲线积分	(283)
10.1.1	第一型曲线积分的概念	(283)
10.1.2	第一型曲线积分的性质	(284)
10.1.3	第一型曲线积分的计算	(285)
习题 10.1		(288)
10.2	第二型曲线积分	(288)
10.2.1	第二型曲线积分的概念	(288)
10.2.2	第二型曲线积分的计算	(290)
习题 10.2		(293)
10.3	格林公式	(293)
10.3.1	格林公式	(293)
10.3.2	平面定向曲线积分与路径无关的条件	(298)
习题 10.3		(300)
10.4*	第一型曲面积分	(301)
10.4.1	第一型曲面积分的概念	(301)

10.4.2 第一型曲面积分的计算	(302)
习题 10.4	(303)
10.5* 第二型曲面积分	(303)
10.5.1 第二型曲面积分的概念	(303)
10.5.2 第二型曲面积分的性质	(306)
10.5.3 第二型曲面积分的计算	(307)
习题 10.5	(308)
复习题 10	(309)
第 11 章 无穷级数	(311)
11.1 数项级数	(311)
11.1.1 级数的收敛与发散	(311)
11.1.2 无穷级数的基本性质	(313)
习题 11.1	(315)
11.2 正项级数与任意项级数的敛散性	(315)
11.2.1 正项级数	(316)
11.2.2 任意项级数	(320)
习题 11.2	(323)
11.3 幂级数	(324)
11.3.1 幂级数的收敛半径与收敛域	(324)
11.3.2 幂级数的性质	(328)
11.3.3 初等函数的幂级数展开式	(329)
11.3.4 幂级数的和函数	(333)
习题 11.3	(335)
复习题 11	(336)
附录 I 希腊字母表	(338)
附录 II 简易积分表	(339)
习题参考答案	(347)
参考文献	(366)

第 1 章 函数的极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象,是生产实践、科学研究中各种变量之间的相互关系的数学反映。在研究函数时,离不开极限的概念及其计算方法。作为全书的开篇,本章将简要地介绍函数的基本概念及相关的基础知识。在引入极限概念的同时,本章将着重讨论极限的计算方法,此外,还将介绍几个常用的经济函数。

1.1 函数的概念

1.1.1 数集、区间和邻域

1. 常用的数集

自然数集: $\mathbf{N}, \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}; \mathbf{N}^+ = \{1, 2, \dots, n, \dots\};$

整数集: $\mathbf{Z}, \mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\};$

有理数集: $\mathbf{Q}, \mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^+, \text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质} \right\};$

实数集: $\mathbf{R}.$

2. 区间和邻域

(1) 有限区间

设 $a < b$, 称数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为开区间, 记为 (a, b) , 如图 1-1(1) 所示, 即 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$

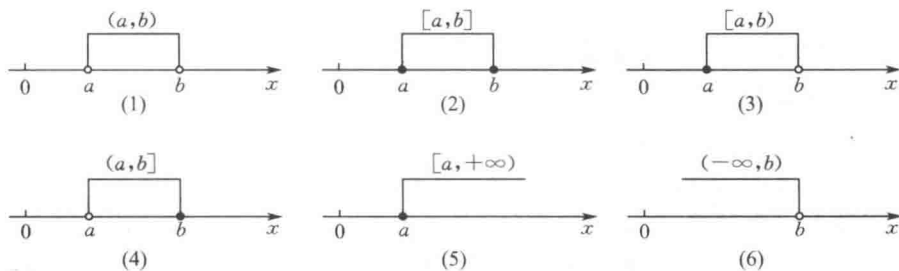


图 1-1

类似地有:

$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 如图 1-1(2) 所示。

$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}, (a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ 称为半开半闭区间, 如图 1-1(3)、

图 1-1(4) 所示。

其中 a 和 b 称为区间 $(a, b), [a, b], [a, b), (a, b]$ 的端点, $b - a$ 称为区间的长度。

(2) 无限区间

$$[a, +\infty) = \{x | a \leq x\}, (-\infty, b) = \{x | x < b\}, (-\infty, +\infty) = \{x | |x| < +\infty\},$$

如图 1-1(5)、图 1-1(6) 所示。

(3) 邻域

定义 1.1 设 δ 是一正数, 则称开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 为点 a 的 δ 邻域, 简称邻域, 记作 $N(a, \delta)$, 即

$$N(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\} = \{x | |x - a| < \delta\},$$

从 $N(a, \delta)$ 中去掉点 a 后所得的集合 $\{x | 0 < |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域, 简称为去心邻域, 记作 $N^0(a, \delta)$, 即

$$N^0(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\},$$

其中, 点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径。

在几何上, 邻域 $N(a, \delta)$ 是数轴上以点 a 为中心, δ 为半径的区间内的点的全体, 如果不需要特别强调邻域的半径 δ , 就用 $N(a)$ 表示点 a 的某一邻域, $N^0(a)$ 表示点 a 的某一去心邻域, 如图 1-2 所示。

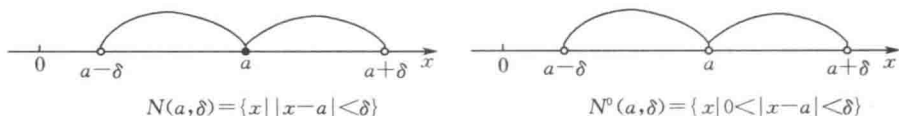


图 1-2

1.1.2 函数的定义

定义 1.2 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的非空数集, 如果对于每个数 $x \in D$, 按照某种法则总有唯一确定的 y 值与它对应, 则称变量 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f(x), x \in D,$$

其中, x 称为自变量, y 称为因变量, x 的变化范围 D 称为函数的定义域, 全体函数值的集合称为函数 f 的值域, 记作 D_f , 即

$$D_f = \{y | y = f(x), x \in D\}.$$

关于函数定义的几点说明:

(1) 函数有三个要素, 即对应法则、定义域和值域。当对应法则和定义域确定后, 值域便自然确定下来。因此, 函数的基本要素为两个: 对应法则和定义域。所以函数也常表示为: $y = f(x), x \in D$ 。由此, 我们说两个函数相同, 是指它们有相同的对应法则和定义域。

(2) 函数用解析式表示时, 函数的定义域常取使该运算式子有意义的自变量的全体, 通常称之为存在域(自然定义域)。此时, 函数的记号中的定义域 D 可省略不写, 而只对

应法则 f 来表示一个函数。即“函数 $y = f(x)$ ”或“函数 f ”。

(3) 函数定义中, 如果对于每个数 $x \in D$, 只能有唯一的一个 y 值与它对应, 这样定义的函数称为单值函数, 若对同一个 x 值, 可以对应于多个 y 值, 则称这种函数为多值函数。本书中只讨论单值函数(简称函数)。

例 1 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 - 4}; \quad (2) y = \ln(1 - x^2) + \sqrt{x}.$$

解 (1) 要使函数有意义, 必须满足 $x \neq 0$, 且 $x^2 - 4 \geq 0$ 。解不等式得 $|x| \geq 2$ 。所以函数的定义域为 $D = \{x \mid |x| \geq 2\}$, 或 $D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ 。

(2) 函数第一项 $\ln(1 - x^2)$ 的定义域是满足不等式 $1 - x^2 > 0$ 的值, 解得 $-1 < x < 1$, 第二项 \sqrt{x} 的定义域是 $x \geq 0$, 所以函数的定义域为 $D = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$ 。

例 2 下列函数是否相同? 为什么?

$$(1) y = \ln x^2 \text{ 与 } y = 2 \ln x; \quad (2) w = \sqrt{u} \text{ 与 } y = \sqrt{x}.$$

解 (1) $y = \ln x^2$ 与 $y = 2 \ln x$ 不是相同的函数, 因为它们的定义域不相同。

(2) $w = \sqrt{u}$ 与 $y = \sqrt{x}$ 是相同的函数, 它们的定义域和对应法则都相同, 只是表示函数所用的字母不同而已。

1.1.3 函数的表示方法

1. 主要方法

(1) 解析法(公式法):

前面例 1、例 2 中表示函数所用的方法便是解析法。

(2) 列表法:

例如, 某超市 2010 年第一季度各月销售额(万元) 如表 1-1 所示:

表 1-1

月份 t	1	2	3
销售额	86.2	102.3	64.8

表 1-1 表示的是两个量的函数关系。

(3) 图象法:

例如, 某地某日气温 T 和时间 t 是两个变量, 由气温自动记录仪描得一条曲线(见图 1-3), 这条曲线表示了 t 为自变量, T 为因变量的函数关系。

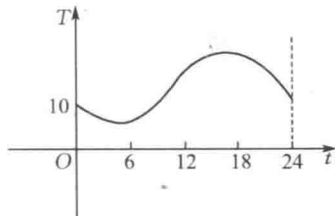


图 1-3

2. 用“特殊方法”来表示的函数

(1) 分段函数: 在定义域的不同部分用不同的公式来表示。

例如,符号函数 $\operatorname{sgn}x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ 其函数图象如图 1-4 所示。

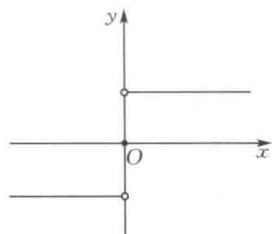


图 1-4

(2) 用语言叙述的函数:

例如,① 取整函数 $y = [x]$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

② 狄里克雷(Dirichlet) 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

③ 黎曼(Riemann) 函数

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{当 } x = \frac{p}{q} (p, q \in \mathbf{N}^+, \frac{p}{q} \text{ 为假分数),} \\ 0, & \text{当 } x = 0, 1 \text{ 和 } (0, 1) \text{ 内的无理数.} \end{cases}$$

注意 以上三种函数都不是分段函数。

1.1.4 初等函数

1. 基本初等函数及其图象

(1) 常值函数 $y = C$ (C 为常数);

(2) 幂函数 $y = x^a$ ($a \in \mathbf{R}$), 如图 1-5 所示。

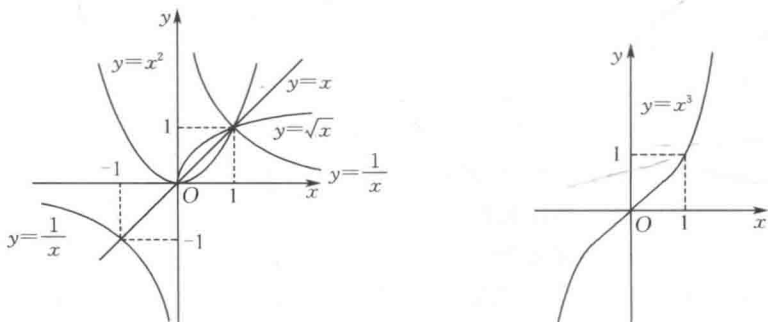


图 1-5