王浩高 贾尚晖／主编

微积分

WEIJIFEN

经济科学出版社
Economic Science Press

微　积　分

王浩高　贾尚晖　主编

经济科学出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分/王浩高，贾尚晖主编．—北京：经济科学出版社，2015.1
ISBN 978－7－5141－5366－8

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①微积分　Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 310082 号

责任编辑：王　丹
责任校对：徐领弟
责任印制：邱　天

微　积　分
王浩高　贾尚晖　主编
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100142
总编部电话：010－88191217　发行部电话：010－88191522
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
天猫网店：经济科学出版社旗舰店
网址：http://jjkxcbs.tmall.com
北京万友印刷有限公司印装
880×1230　32 开　4.125 印张　150000 字
2015 年 1 月第 1 版　2015 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978－7－5141－5366－8　定价：22.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换。电话：010－88191502）

前　　言

微积分是高等院校经济管理专业的基础课之一，它在经济管理、质量控制、数量经济、信息论、预测理论和最优化理论中有着广泛的应用。

本书是为了适应继续教育中经济管理类本科学生的实际需要而编写的，以深入浅出的方式介绍了微积分的基本内容，并着重介绍了微积分的思想方法。编者在中央财经大学执教多年，在总结多年教学实践经验的基础上，根据继续教育的特点，在编写中力求内容完整，做到重点突出、浅入深出、通俗易懂，既体现了学科上的系统性和科学性，又体现了教学上的灵活性和实用性。

本书共分六章，其中第一章至第四章由王浩高编写，第五章至第六章由贾尚晖编写。第一部分（第一章至第四章）由贾尚晖审定，第二部分（第五章至第六章）由王浩高审定。

本书可以作为高等院校经济管理类相应课程的教材或参考书，也可以作为高等自学考试中高等数学的自学参考书。

由于编者水平有限，书中难免存在缺点、错误，敬请读者和同行指正。

编　者

2015 年 1 月

目　　录

第一章 函　　数

函数是数学中最重要的概念之一，是经济数学的主要研究对象，在本章中，我们将在中学数学的基础上，复习总结已经学过的函数，介绍在经济学中常用的一些函数．

第一节 预备知识

一、集合及其运算

一般地，把一些具有相同性质的对象看成一个整体，就说这个整体是由这些对象的全体构成的**集合**；构成集合的每个对象叫做这个集合的**元素**．

集合的元素可以是我们看到的、听到的、闻到的、触摸到的、想到的各种各样的事物或者一些抽象符号．

下面是一些集合的例子：

例 1　小于 20 的所有偶数．

例 2　中国古代的四大发明．

例 3　直线 $y=2x$ 上所有的点．

只有有限个元素的集合，称为**有限集**，例如上述例题中的例 1、例 2；由无限多个元素构成的集合，称为**无限集**，例如上述例题中的例 3.

一般地，集合通常用大写的字母 A，B，C，…来表示，集合中的元素用小写字母 a，b，c…来表示．

集合的运算主要有以下几种：

（1）并集.

由集合 A 与 B 的所有元素构成的集合，称为集合 A 与集合 B 的并集，记作 $A\cup B$.

（2）交集.

由集合 A 与 B 的所有公共元素构成的集合，称为集合 A 与集合 B 的交集，记作 $A\cap B$.

（3）补集.

一般地，设 Ω 是一个集合，由 Ω 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做子集 A 在 Ω 中的补集，记作 $\overline{A}$.

（4）差集.

一般地，记 A，B 是两个集合，则所有属于 A 且不属于 B 的元素构成的集合，叫做 A 与 B 的差集，记作 $A\setminus B$.

集合具有以下的运算性质：

交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

对偶律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

以上性质的证明相对比较简单，请读者自行完成.

二、区间和邻域

数集通常用区间来表示，我们把集合 $\{x\mid a<x<b\}$ 记作 (a, b)，称为**开区间**；把集合 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 记作 $[a, b]$，称为**闭区间**；把集合 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 记作 $(a, b]$，称为**半开半闭区间**，其中，a，b 称为区间的端点.

在实数集上，集合 $\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta, \delta>0\}$ 称为以 x_0 为中心，半径为 δ 的**邻域**，记作 $U(x_0, \delta)$. 它表示在实数轴上以 x_0 为中心，长度为 2δ 的对称开区间.

三、常用的一些基础知识

（1）完全平方 $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

（2）n 方差 $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots ab^{n-2} + b^{n-1})$，其中 n 为正整数.

（3）有理化因式 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a - b$.

（4）阶乘　前 n 个正整数 1，2，3，…，n 的连乘积称为 n 的阶乘，记作 $n!$，规定 $0! = 1$.

（5）对数公式

$$\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N,\ \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N,$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},\ \log_a b^n = n\log_a b,\ \log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1.$$

（6）三角函数

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},\ \sec x = \frac{1}{\cos x},\ \csc x = \frac{1}{\sin x},$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ 1 + \tan^2 x = \sec^2 x,\ 1 + \cot^2 x = \csc^2 x,$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x,\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1,$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

（7）数列公式

若等比数列为 a，aq，aq^2，…，aq^n，…，其中 $a \neq 0$，$q \neq 1$，则前 n 项和为

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

（8）几个符号

连加号：$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

连乘号：$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1a_2\cdots a_n$.

最大值：$\max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中最大者.

最小值：$\min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 表示 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中最小者.

第二节 函 数

一、函数的概念

定义1 一般的，在一个变化过程中，有两个变量 x 和 y，如果给定一个 x 值，相应的有唯一的 y 与之对应，那么就称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，其中 x 是**自变量**，y 是**因变量**，f 称为**对应法则**，x 的取值范围叫做这个函数的**定义域**，相应 y 的取值范围叫做函数的**值域**.

定义域与对应法则构成了函数的两个基本要素，若两个函数的定义域相同，且对应法则也相同，则我们称这两个函数是相同的；否则，这两个函数是不同的函数.

对于未说明实际背景的函数表达式，若没有指明自变量的取值范围，则函数的定义域为使得函数表达式有意义的 x 的所有取值. 一般来说，求函数定义域的基本情况只有以下四种：

(1) 对于分式$\frac{1}{P(x)}$，要求分母 $P(x)\neq 0$；

(2) 对于偶次方根$\sqrt[2n]{P(x)}$，要求 $P(x)\geqslant 0$；

(3) 对于对数式 $\log_a P(x)$，其中 $a>0$，$a\neq 1$，要求真数 $P(x)>0$；

(4) 对于反三角函数 $\arcsin S(x)$，$\arccos S(x)$，要求 $-1\leqslant S(x)\leqslant 1$.

例1 函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$ 的定义域为 $x\in(-\infty,$

$+\infty)$，值域为 $[0, +\infty)$，称为**绝对值函数**.

例 2 函数 $y=\mathrm{Sgn}\, x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 称为**符号函数**，定义域为 $x\in(-\infty, +\infty)$，值域为 $\{-1, 0, 1\}$.

从例 1 和例 2 中可以看到，有的函数在定义域不同部分用不同的公式来表示，这种函数称为**分段函数**.

定义 2 已知函数 $y=f(x)$，经过代数恒等变换，把变量 x 表示成变量 y 的表达式，在这个对应法则下，变量 x 为变量 y 的函数，则称它为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上，我们把自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，把 x，y 互换，所以反函数通常写成 $y=f^{-1}(x)$. 函数和反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 3 求函数 $y=\dfrac{x}{2x+1}$ 的反函数.

解 由 $y=\dfrac{x}{2x+1}$ 可解的 $x=\dfrac{y}{1-2y}$，变换 x，y 的位置，得到 $y=\dfrac{x}{1-2x}$，定义域为 $\left\{x \,\middle|\, x\neq\dfrac{1}{2}\right\}$.

定义 3 已知函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U_1，函数 $u=u(x)$ 的值域为 U_2，若交集 $U_1\cap U_2$ 非空，则称变量 y 为变量 x 的**复合函数**，记作 $y=f(u(x))$，其中 x 称为自变量，u 称为中间变量，y 称为因变量.

只有一个自变量的函数称为一元函数，有两个自变量的函数称为二元函数，依次类推，二元以上函数统称为多元函数.

例 4 设 $y=f(u)=\ln u$，$u>0$；$u=g(v)=\sin^2 v$，$v\in(-\infty, +\infty)$；$v=g(x)=2x$，$v\in(-\infty, +\infty)$，则由以上三个函数复合而成的函数为 $y=f(u(g(x)))=\ln\sin^2 2x$，定义域为 $\left\{x \,\middle|\, x\neq\dfrac{k\pi}{2}\right\}$.

在微积分中，我们经常需要对复杂函数进行分解，或者考虑某

个函数由哪些函数复合而成.

例 5 试把函数 $y=f(x)=(\arcsin\sqrt{x^2-1})^3$ 分解成几个简单函数的复合.

解 取 $y=f(u)=u^3$，$u=g(v)=\arcsin v$，$v=h(w)=\sqrt{w}$，$w=s(x)=x^2-1$，则有 $y=f(g(h(s(x))))$.

二、基本初等函数与初等函数

1. 幂函数

函数 $y=x^{\mu}$，其中 μ 为常数，称为**幂函数**，幂函数的定义域与 μ 的取值有关，例如当 $\mu=\dfrac{1}{2}$ 时，定义域为 $[0, +\infty)$；当 $\mu=3$ 时，定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 但不管 μ 取何值，幂函数总是在 $(0, +\infty)$ 上有定义. 其函数图像如图 1－1 所示.

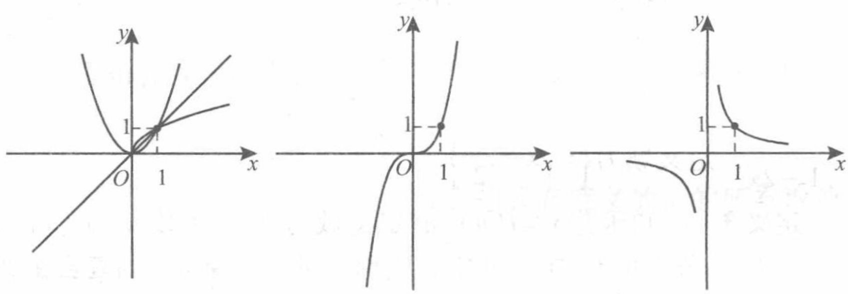


图 1－1

2. 指数函数

函数 $y=a^x$，其中 a 为常数，且 $a>0$，$a\neq1$，称为指数函数，定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 其图像如图 1－2 所示.

3. 对数函数

函数 $y=\log_a x$，其中 a 为常数，且 $a>0$，$a\neq1$，称为对数函数，定义域为 $(0, +\infty)$. 其图像如图 1－3 所示.

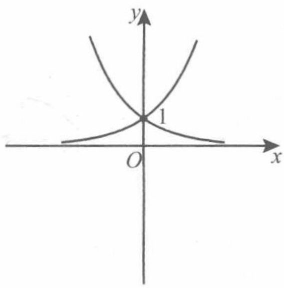


图 1－2

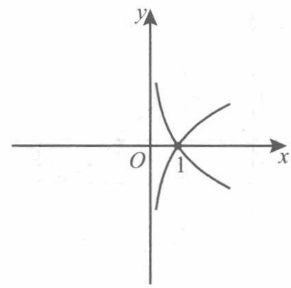


图 1－3

4. 三角函数

常用三角函数有:

正弦函数 $y=\sin x$，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[-1, 1]$；

余弦函数 $y=\cos x$，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[-1, 1]$；

正切函数 $y=\tan x$，定义域为 $\left\{x \mid x\neq\dfrac{k\pi}{2}\right\}$，其中 k 为任意整数，值域为 $(-\infty, +\infty)$；

余切函数 $y=\cot x$，定义域为 $\{x \mid x\neq k\pi\}$，其中 k 为任意整数，值域为 $(-\infty, +\infty)$；

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，定义域为 $\left\{x \mid x\neq\dfrac{k\pi}{2}\right\}$，其中 k 为任意整数；

余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$；定义域为 $\{x \mid x\neq k\pi\}$，其中 k 为任意整数.

在本书中，一律用弧度表示度量角的单位．图像如图 1－4 所示.

5. 反三角函数

若 $\sin y=x$，$\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，则将 y 表示成 x 的函数为 $y=\arcsin x$，称为反正弦函数，定义域为 $[-1, 1]$，值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

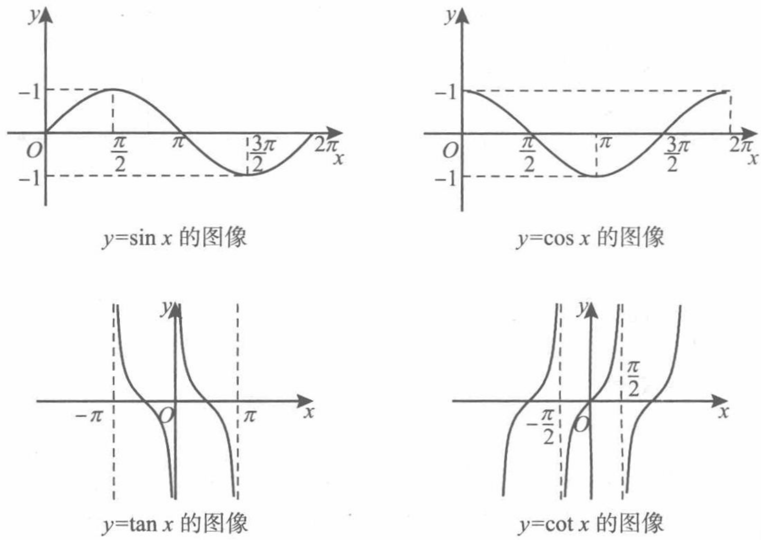


图 1-4

若 $\cos y=x$，$(0\leqslant y\leqslant \pi)$，则将 y 表示成 x 的函数为 $y=\arccos x$，称为反余弦函数，定义域为 $[-1, 1]$，值域为 $[0, \pi]$.

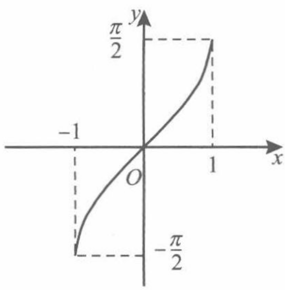
若 $\tan y=x$，$\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则将 y 表示成 x 的函数为 $y=\arctan x$，称为反正切函数，定义域为 $(-\infty, \infty)$，值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

若 $\cot y=x$，$(0<y<\pi)$，则将 y 表示成 x 的函数为 $y=\operatorname{arccot} x$，称为反余切函数，定义域为 $(-\infty, \infty)$，值域为 $(0, \pi)$.

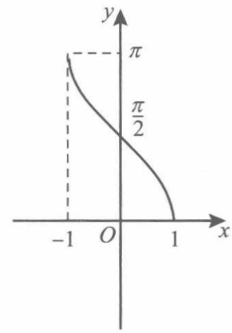
图像如图 1-5 所示.

下面给出初等函数的定义.

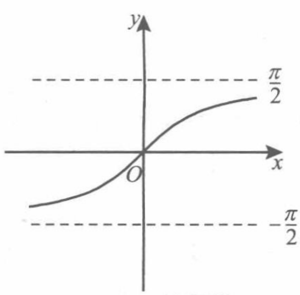
定义 4 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**，由常数和基本初等函数通过有限次的四则混合运算和有限次的函数复合运算所构成的并可以用一个表达式表示的函数，称为**初等函数**. 例如 $y=2\sin^3 x-x^3$，$y=\ln(1+x)$，等等.



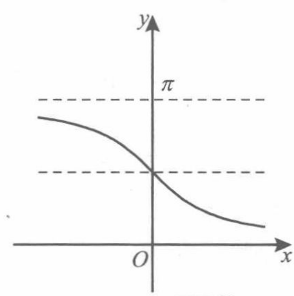
$y=\arcsin x$ 的图像



$y=\arccos x$ 的图像



$y=\arctan x$ 的图像



$y=\text{arccot}\, x$ 的图像

图 1－5

三、函数的基本性质

1. 奇偶性

定义 5　设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对于定义域中的任一个 x，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**；若恒有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**．既不是奇函数，也不是偶函数的函数，称为非奇非偶函数．

显然，奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称．有许多函数既不属于奇函数，也不属于偶函数．

例 6　判断 $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ 的奇偶性．

解　对于 $f(-x)$，有 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$，分子分母同时乘以 e^x

得

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{1-e^{x}}{1+e^{x}}=-\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}=-f(x),$$

所以，函数 $y=\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$ 为奇函数.

例 7 证明函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

证明
$$\begin{aligned} f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})\\ &=\ln\left(\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\\ &=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x). \end{aligned}$$

所以函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

2. 周期性

定义 6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使得对于定义域内任意的 x，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**. 例如函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

3. 单调性

定义 7 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果对于定义域内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，函数值 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 满足 $f(x_1)<f(x_2)$，则称该函数在定义域内**单调递增**；当 $x_1<x_2$ 时，函数值 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 满足 $f(x_1)>f(x_2)$，则称该函数在定义域内**单调递减**.

单调递增的函数说明函数的函数值随自变量的增大而增大，单调递减函数说明函数的函数值随自变量的增大而减小. 如图 1－6 所示.

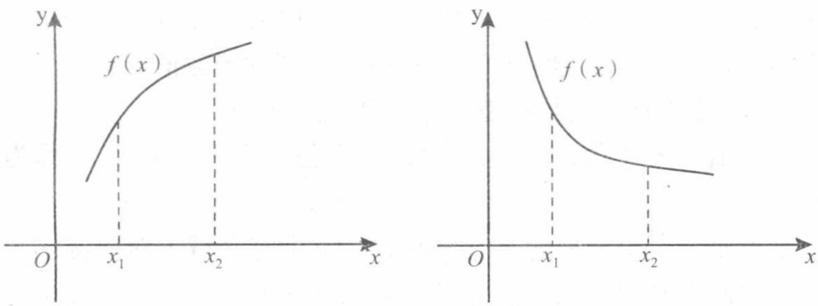


图 1-6

4. 有界性

定义 8　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果对于定义域内任意一点 x，存在一个常数 $M>0$，使得 $|f(x)|<M$，则称函数 $f(x)$ 在定义域 D 上**有界**；否则称函数 $f(x)$ 在定义域 D 上**无界**.

例如，函数 $y=\sin x$ 在定义域 $(-\infty,\infty)$ 上是有界的，而函数 $y=\tan x$ 在定义域 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是无界的.

5. 极值

定义 9　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内有定义，如果对于该邻域内任意的 $x\neq x_0$，恒有 $f(x)<f(x_0)$，则称函数值 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的**极大值**，x_0 称为**极大值点**；如果对于该邻域内任意的 $x\neq x_0$，恒有 $f(x)>f(x_0)$，则称函数值 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的**极小值**，x_0 称为**极小值点**. 极大值和极小值统称为极值，极大值点和极小值点统称为极值点.

需要注意的是，极值是一个局部概念，它只是函数在 x_0 点左右很小范围内对应的函数值比较而得到的. 极值点只能是定义域内部的点.

6. 最值

定义 10　设函数 $f(x)$ 在定义域 D 上有定义，且点 $x_0\in D$，如果对于定义域上任意一点 x，恒有 $f(x)\leqslant f(x_0)$，则称函数值 $f(x_0)$