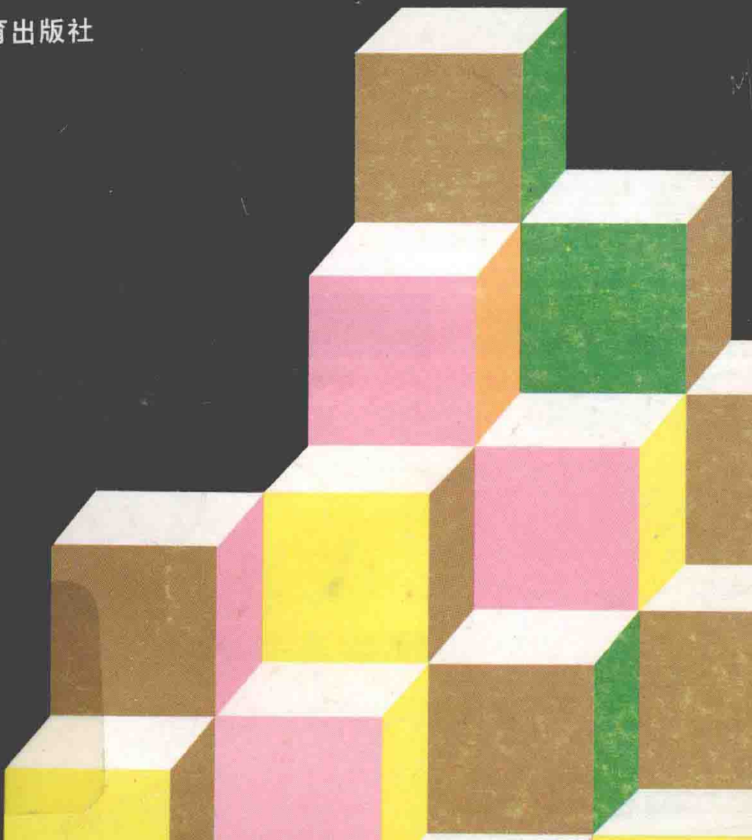
[illegible]提高丛书

初中代数

(第三册)

CHUZHONG DAISHU

上海教育出版社



自学提高丛书

初 中 代 数

（第 三 册）

顾鸿达　刘渝瑛　钟建国 编

上 海 教 育 出 版 社

自学提高丛书

初 中 代 数

（第 三 册）

顾鸿达 刘渝瑛 钟建国 编

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

上海新华书店发行　　上海市印刷十二厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 8.25 字数 170,000

1996 年 2 月第 1 版　1996 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—10,300 本

ISBN 7-5320-3879-3/G·3789　　定价：7.45 元

前　言

编写《自学提高丛书》有两个目的．一是想通过本丛书使一批对自然科学有兴趣的、学有余力的学生适当提高理科的水平．现代社会需要不同专长、不同层次和不同规格的人才，一个人的兴趣、爱好和特长也是不一样的．因此，教育必须贯彻因材施教的原则，为学生提供不同层次的课外读物．二是想通过本丛书提高中学生的自学能力，因为自学能力是一个人适应未来信息社会生活所必需的一种终生受用的综合能力．

基于上述两个目的，本丛书的编写有如下一些特点．一是可读性．力求通俗易懂、生动活泼，使学生爱读、会读；详略适度、坡度适当，突出重点、难点，以弥补教材之不足，能无师自通．二是系统性．为便于自学，注意知识之间的逻辑结构和相互关系，避免重复和脱节；注意培养学生分析、综合、比较、归纳等整理知识的能力．三是提高性．本书对象为中上水平的学生，根据提高学习兴趣、提高学习能力的需要，适当拓宽和提高对某些知识的要求．四是兼容性．本丛书充分兼顾到各套教材的要求和内容，就高不就低，以扩大它的适应性；本丛书也充分吸收各种教学经验，注意学法的传授、技能的训练和能力的培养，使课内与课外相互配合，相互促进．

《自学提高丛书》包括数学、物理、化学和计算机，分为初中版与高中版．读者从自己的实际出发，可以按顺序系统地

自学，也可以有选择地自学，可以配合课堂教学同步学，也可以提前自学，或在课堂教学之后再学。

虽然本书编者都是有丰富教学经验的特级教师或中学高级教师，但不足或欠妥之处在所难免，祈望读者能批评指正。

孙元清

1994年3月于上海

自学提高丛书·数学

主　编：唐盛昌
副主编：顾鸿达　杨安澜　蔡武冈

说　明

随着教育改革的不断深入，一个大纲、多本教材的局面已经出现．提高自学能力这个各类新编教材都提出的要求，也已成为广大学生的共同心声．学习人民教育出版社（以下简称人教社）新编教材的学生，希望有一本能帮助他们系统地提高自学能力，并且可望领略一点别种教材风貌的参考读物．学习其他教材的学生，则希望有一套指导丛书，能帮助他们通过自学，了解与学习人教社新编教材的基本内容．本丛书正是根据广大学员的这一要求而编写的．

我们以国家教委制订的《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲（试用）》为主线，着眼于中等学习水平以上的学生，强调重点，突破难点，发展技能，拓宽视野，以满足广大学员自修提高的需要．

本书的内容，以人教社新编教材为基础，适度地吸取了各地，特别是上海新编教材的精华，结合编写者的教学经验，着重在知识的发生与发展，有关技能、技巧的形成与熟练，教材内容的适当拓广与加深等几个方面展开．在内容的编排上，特别注意做到详略适度，坡度恰当，使本书既不同于教材，又有利于学好教材．在书写行文时，特别注意可读性、趣味性与知识性的有机结合．在习题配置方面，根据教学内容与要求，合理确定了形成性、巩固性、技巧性与发展性等不同类型习题的份量和比例，并适度介绍了一些国外常见的开放性习题．

本丛书的数学，可供初中学生、同等程度的自学者使用，也可供初中数学教师教学时参考.

这几册书的主要编写者，虽然大多是特级教师，编写者也都有丰富的教学经验，并对所撰写部分的内容有过专门的研究，但难免有欠妥之处. 我们恳切希望读者能提出宝贵意见，帮助作者进一步完善本书.

唐盛昌

1994 年2月

目录

第十二章　一元二次方程

一　一元二次方程

12.1　一元二次方程

方程的两边都是关于未知数的整式，这样的方程叫做**整式方程**．例如，方程 $3x+2=0$，$3x^2-x-5=0$，$x^3+23x=9x^2+15$，$x^2-4xy+y^2=2x-4y+3$ 都是整式方程．

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程，叫做**一元二次方程**．例如，$3x^2-x-5=0$，$5t=2-3t^2$，$(2x+1)(5-4x)=10$ 都是一元二次方程．

例 1　下列方程中，哪些方程是整式方程？而在整式方程中，又有哪些方程是一元二次方程？

(1) $3x^3-\sqrt{2}x^2=6$；

(2) $x^2-4xy+4y^2=0$；

(3) $(y+2)(1-y)=y+5$；

(4) $\dfrac{2}{x^2-4x+8}-\dfrac{3}{2x^2-8x+5}=\dfrac{3}{2}$；

(5) $(\sqrt{x})^4+2(\sqrt{x})^2-3=0$；

(6) $x^3+(x+2)^2=(x-1)(x^2+x+1)$．

解　(1) 是整式方程，但不是一元二次方程．

(2) 是整式方程，但不是一元二次方程．

(3) 是整式方程，同时也是一元二次方程．

(4) 不是整式方程.

(5) 不是整式方程.

(6) 是整式方程，同时也是一元二次方程.

说明 (1) 我们以后会学到，像 $3x^3-\sqrt{2}x^2=6$ 这样的只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 3 的整式方程，叫做**一元三次方程**.

(2) 方程 $\frac{2}{x^2-4x+8}-\frac{3}{2x^2-8x+5}=\frac{3}{2}$ 的分母中含有未知数，这样的方程不是整式方程，而是分式方程.

(3) 方程 $(\sqrt{x})^4+2(\sqrt{x})^2-3=0$ 的未知数含在根号下，这样的方程不是整式方程. 我们以后会学到，像这样根号下含有未知数的方程，叫做**无理方程**.

(4) 方程 $x^3+(x+2)^2=(x-1)(x^2+x+1)$ 初看上去像一个一元三次方程，但实际上，这个方程在经过去括号、移项、合并同类项等一系列整理后，可化为 $x^2+4x+5=0$ 的形式，所以它是一个一元二次方程.

任何一个关于 x 的一元二次方程，经过整理，都可以化为

$$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$$

的形式. 我们把这种形式叫做**一元二次方程的一般形式**. 其中 ax^2 叫做**二次项**，a 叫做**二次项系数**；bx 叫做**一次项**，b 叫做**一次项系数**；c 叫做**常数项**. 显然，b 和 c 可以是任何实数，而 a 则应是不等于零的实数. 如果 $a=0$，那么方程 $ax^2+bx+c=0$ 就不是一个二次方程了.

例 2 把下列方程化为一元二次方程的一般形式，并分别用 a、b、c 表示它的二次项系数、一次项系数和常数项：

(1) $x(5-2x)=3$;

(2) $\left(\frac{1}{2}x-3\right)^2-9=0$;

(3) $3y^2+2(y+1)^2=(2y+1)^2+5$.

解 (1) 去括号，得

$$5x-2x^2=3.$$

移项，得

$$-2x^2+5x-3=0.$$

方程的两边都乘以 -1，得

$$2x^2-5x+3=0.$$

$$\therefore\quad a=2,\ b=-5,\ c=3.$$

(2) 去括号，得

$$\frac{1}{4}x^2-3x+9-9=0.$$

合并同类项，得

$$\frac{1}{4}x^2-3x=0.$$

方程的两边都乘以 4，得

$$x^2-12x=0.$$

$$\therefore\quad a=1,\ b=-12,\ c=0.$$

(3) 去括号，得

$$3y^2+2y^2+4y+2=4y^2+4y+1+5.$$

移项，合并同类项，得

$$y^2-4=0.$$

$$\therefore\quad a=1,\ b=0,\ c=-4.$$

说明 (1) 把方程 $x(5-2x)=3$ 化为一元二次方程的一般形式，其结果不是唯一的，$-2x^2+5x-3=0$ 和 $2x^2-5x+3=0$ 都是原方程的一般形式．同样，把方程 $\left(\frac{1}{2}x-3\right)^2-9$

$=0$ 化为一元二次方程的一般形式，其结果也不是唯一的. $\frac{1}{4}x^2-3x=0$ 和 $x^2-12x=0$ 都是原方程的一般形式. 如果一个一元二次方程的二次项系数、一次项系数和常数项都是有理数，习惯上，我们总是把它化为二次项系数是正整数，一次项系数和常数项都是整数的形式.

(2) 在方程 $2x^2-5x+3=0$ 中，$b=-5$; 在方程 $x^2-12x=0$ 中，$b=-12$; 在方程 $y^2-4=0$ 中，$c=-4$. 初学者常会把这三个数误作为 5、12、4，这一点应多加注意.

(3) 方程 $x^2-12x=0$ 缺常数项，这时 $c=0$; 方程 $y^2-4=0$ 缺一次项，这时 $b=0$.

练 习

1. 下列方程中，哪些方程是整式方程？而在整式方程中，又有哪些方程是一元二次方程？

   (1) $(x^2)^2+7x^2-18=0$;

   (2) $x^3+16=4x\left(x+\frac{1}{4}x^2\right)$;

   (3) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-2=0$;

   (4) $\sqrt{x^2+3x+2}=0$;

   (5) $(t+1)^2=(t+2)(t-2)$;

   (6) $(2y+1)^2=(3y-1)^2$.

2. 指出下列一元二次方程的二次项系数、一次项系数和常数项：

   (1) $2x^2+4x+3=0$; (2) $2x^2-4x-3=0$;

   (3) $4x^2-3=0$; (4) $3x^2-x=0$.

3. 把下列方程化为一元二次方程的一般形式，并指出二次

项系数、一次项系数和常数项：

(1) $4x^2=2x+3$；　　(2) $3x(x-5)=2$；

(3) $(x+3)(3-x)=(x+3)^2$；

(4) $\left(\frac{1}{2}x-3\right)\left(\frac{1}{3}x-2\right)=1-2x$.

4. 当实数 k 取什么值时，下列关于 x 的方程是一元二次方程？

(1) $(2k-5)x^2+kx-4=0$；

(2) $(k^2+2)x^2-4x+(4-5k)=0$.

12.2 一元二次方程的解法

使一元二次方程左右两边的值相等的未知数的值，叫做**一元二次方程的解**. 一元二次方程的解，也可叫做**一元二次方程的根**.

例 1 检验 $\frac{2+\sqrt{67}}{6}$ 和 $\frac{2-\sqrt{67}}{6}$ 是不是一元二次方程

$$12x^2-8x-21=0$$

的根.

解 把 $x=\frac{2+\sqrt{67}}{6}$ 代入方程，

$$\begin{aligned}左边&=12\times\left(\frac{2+\sqrt{67}}{6}\right)^2-8\times\frac{2+\sqrt{67}}{6}-21\\&=\frac{12}{36}\times(4+4\sqrt{67}+67)-\frac{4}{3}\times(2+\sqrt{67})-21\\&=\frac{71}{3}+\frac{4}{3}\sqrt{67}-\frac{8}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{67}-21=0,\end{aligned}$$

右边$=0$.

$\because$ 左边$=$右边，

$\therefore\quad x=\dfrac{2+\sqrt{67}}{6}$ 是原方程的根.

把 $x=\dfrac{2-\sqrt{67}}{6}$ 代入方程,

$$\text{左边}=12\times\left(\frac{2-\sqrt{67}}{6}\right)^2-8\times\left(\frac{2-\sqrt{67}}{6}\right)-21$$

$$=\frac{12}{36}\times(4-4\sqrt{67}+67)-\frac{4}{3}\times(2-\sqrt{67})-21$$

$$=\frac{71}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{67}-\frac{8}{3}+\frac{4}{3}\sqrt{67}-21=0,$$

右边=0.

$\because$ 左边=右边,

$\therefore\quad x=\dfrac{2-\sqrt{67}}{6}$ 是原方程的根.

说明 由上面的检验知,$x=\dfrac{2+\sqrt{67}}{6}$ 和 $x=\dfrac{2-\sqrt{67}}{6}$ 都是原方程的根. 为示区别, 我们可以把这两个根记为 $x_1=\dfrac{2+\sqrt{67}}{6}$, $x_2=\dfrac{2-\sqrt{67}}{6}$ 或 $x_1=\dfrac{2-\sqrt{67}}{6}$, $x_2=\dfrac{2+\sqrt{67}}{6}$.

例 2 设 x_1、x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根,求代数式

$$a(x_1^3+x_2^3)+b(x_1^2+x_2^2)+c(x_1+x_2)$$

的值.

解 $\because$ x_1、x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根,

$$\therefore\ ax_1^2+bx_1+c=0,$$
$$ax_2^2+bx_2+c=0.$$

$$\therefore\ a(x_1^3+x_2^3)+b(x_1^2+x_2^2)+c(x_1+x_2)$$
$$=ax_1^3+ax_2^3+bx_1^2+bx_2^2+cx_1+cx_2$$
$$=(ax_1^3+bx_1^2+cx_1)+(ax_2^3+bx_2^2+cx_2)$$