李成章教练奥数笔记

第8卷

李成章　著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

LI CHENG ZHANG JIAO LIAN AO SHU BI JI

李成章教练奥数笔记

第8卷

李成章 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书为李成章教练奥数笔记第八卷，书中内容为李成章教授担任奥数教练时的手写原稿.书中的每一道例题后都有详细的解答过程，有的甚至有多种解答方法.

本书适合准备参加数学竞赛的学生及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

李成章教练奥数笔记. 第8卷/李成章著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016. 1

ISBN 978-7-5603-5727-0

Ⅰ. ①李… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①数学-竞赛题-题解 Ⅳ. ①O1－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 280424 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　杜莹雪
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 18　字数 204 千字
版　　次　2016 年 1 月第 1 版　2016 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5727-0
定　　价　48.00 元

◎ 目录

八　坐标法　//1

九　三角法　//43

十　面积法和面积题　//75

十一　几何不等式　//106

十二　全等和相似　//142

十三　位似　//173

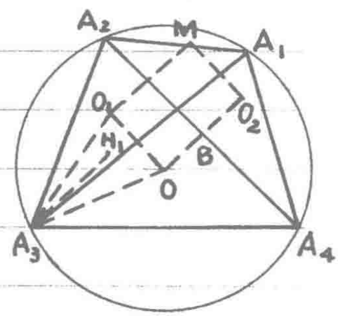
十四　旋转　//203

十五　垂直　//229

编辑手记　//265

八 坐标法

1 设四边形$A_1A_2A_3A_4$内接于⊙O，H_1，H_2，H_3，H_4分别为$\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_3A_4A_1$，$\triangle A_4A_1A_2$和$\triangle A_1A_2A_3$的垂心，求证H_1，H_2，H_3，H_4四点共圆并求出这个圆的圆心的位置．（1992年全国联赛二试1题）



证1 作点O关于A_1A_3的对称点O_1，关于A_2A_4的对称点O_2，以O_1，O，O_2为连续3个顶点作平行四边形O_1OO_2M．记$OO_2 \cap A_2A_4 = B$，连结A_3O，A_3O_1，A_3H_1．

$\because A_3H_1 \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} 2OB = OO_2 \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} O_1M$，

$\therefore$ 四边形$A_3H_1MO_1$为平行四边形．$\therefore MH_1 = O_1A_3 = OA_3 = R$，其中R为⊙O的半径长．

同理 $MH_2 = MH_3 = MH_4 = R$．$\therefore H_1$，H_2，H_3，H_4四点共圆且圆心就是点M．

证2 取以点O为原点，⊙O半径为单位长的直角坐标系，于是可设顶点A_1，A_2，A_3，A_4的坐标依次为$(\cos\alpha_1, \sin\alpha_1)$，$(\cos\alpha_2, \sin\alpha_2)$，$(\cos\alpha_3, \sin\alpha_3)$和$(\cos\alpha_4, \sin\alpha_4)$．于是由欧拉定理知$H_1$，$H_2$，$H_3$，$H_4$的坐标分别为

$H_1(\cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 + \cos\alpha_4, \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 + \sin\alpha_4)$，

$H_2(\cos\alpha_3 + \cos\alpha_4 + \cos\alpha_1, \sin\alpha_3 + \sin\alpha_4 + \sin\alpha_1)$，

$H_3(\cos\alpha_4 + \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2, \sin\alpha_4 + \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)$，

$H_4(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3, \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3)$．

令 $M(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3+\cos\alpha_4, \sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\sin\alpha_4)$，

容易验证

$$MH_i=\sqrt{\cos^2\alpha_i+\sin^2\alpha_i}=1,\quad i=1,2,3,4.$$

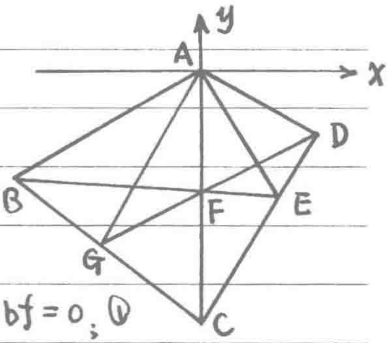
$\therefore H_1, H_2, H_3, H_4$ 四点共圆且圆心就是点 M.

由 H_1，A_1 及 M 的坐标表达式可知，过点 H_1 作 $H_1M \mathrel{\underline{\parallel}} OA_1$，所得的点 M 即为圆心的几何位置.

2　如图，在四边形ABCD中，对角线AC平分∠BAD，在CD上取一点E，BE∩AC = F，DF∩BC = G，求证∠GAC = ∠CAE．

（1999年全国联赛二试1题）

证　取以A为原点，直线CA为y轴的直角坐标系．因为AC平分∠BAD，所以直线AB和AD的斜率互为相反数．设$C(0,c)$，$F(0,f)$，$B(b,kb)$，$D(d,-kd)$．



于是可得下列直线方程：

BF：$\dfrac{kb-f}{b}=\dfrac{f-y}{-x}$，$(kb-f)x-by+bf=0$；①

DC：$\dfrac{-kd-c}{d}=\dfrac{c-y}{-x}$，$(kd+c)x+dy-cd=0$；②

DF：$\dfrac{-kd-f}{d}=\dfrac{f-y}{-x}$，$(kd+f)x+dy-df=0$；③

BC：$\dfrac{kb-c}{b}=\dfrac{c-y}{-x}$，$(kb-c)x-by+bc=0$．④

①×d＋②×b，得到

$$(2kbd-df+bc)x+bd(f-c)=0.$$

解得

$$x_E=\frac{bd(c-f)}{2kbd-df+bc}.\qquad ⑤$$

③×b＋④×d，得到

$$(2kbd+bf-cd)x+bd(c-f)=0.$$

解得

$$x_G=\frac{bd(f-c)}{2kbd+bf-cd}.\qquad ⑥$$

将⑤代入①，得到

$$y_E=\frac{kb-f}{b}x_E+f=\frac{d(c-f)(kb-f)}{2kbd-df+bc}+f$$
$$=\frac{kbdf+kbcd-cdf+bcf}{2kbd-df+bc}. \qquad ⑦$$

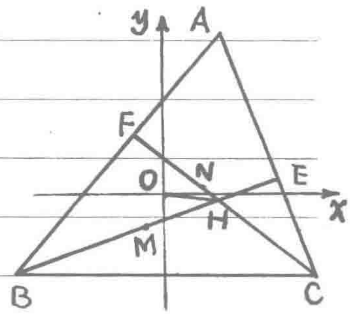
将⑥代入④，得到

$$y_G=\frac{kb-c}{b}x_G+c=\frac{d(f-c)(kb-c)}{2kbd+bf-cd}+c$$
$$=\frac{kbdf+kbcd-cdf+bcf}{2kbd+bf-cd}. \qquad ⑧$$

由⑤—⑧可得

$$k_{AG}=\frac{y_G}{x_G}=-\frac{y_E}{x_E}=-k_{AE}. \quad \therefore \angle GAC=\angle CAE.$$

3　如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A=60^\circ$，$AB>AC$，点O是外心，两条高BE和CF交于点H．在线段BH，HF上分别取点M，N，使得$BM=CN$，求$\frac{MH+NH}{OH}$的值．　　　　（2002年全国联赛二试1题）



解1　取以O为原点，过点O平行于BC的直线为x轴，$\odot O$半径为1的直角坐标系．于是点B与C关于y轴对称．设$A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\sin\beta)$，于是$C(-\cos\beta,\sin\beta)$．因$\angle A=60^\circ$，所以$\angle BOC=120^\circ$．所以$\beta=210^\circ$．$H(\cos\alpha,\sin\alpha+2\sin\beta)$．因为

$$MH+NH=BH-BM+CN-CH=BH-CH,$$

故只须算出BH，CH，OH的长度．

$$BH=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2}=\sqrt{2(1-\cos(\alpha+\beta))}$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=2\sin\frac{210^\circ+\alpha}{2}=2\cos\frac{30^\circ+\alpha}{2}.$$

$$CH=\sqrt{(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2}=\sqrt{2(1+\cos(\alpha-\beta))}$$

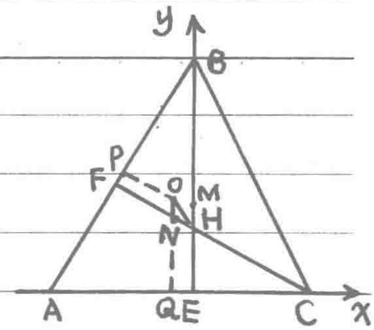
$$=2\cos\frac{\beta-\alpha}{2}=2\cos\frac{210^\circ-\alpha}{2}=-2\sin\frac{30^\circ-\alpha}{2}.$$

$$OH=\sqrt{\cos^2\alpha+(\sin\alpha+2\sin\beta)^2}=\sqrt{2(1-\cos(90^\circ-\alpha))}$$

$$=2\sin\frac{90^\circ-\alpha}{2}$$

$$\therefore\ \frac{MH+NH}{OH}=\frac{BH-CH}{OH}=\frac{\cos\frac{30^\circ+\alpha}{2}+\sin\frac{30^\circ-\alpha}{2}}{\sin\frac{90^\circ-\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{150^\circ-\alpha}{2}+\sin\frac{30^\circ-\alpha}{2}}{\sin\frac{90^\circ-\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{90^\circ-\alpha}{2}\cos30^\circ}{\sin\frac{90^\circ-\alpha}{2}}=2\cos30^\circ=\sqrt{3}.$$



解2 取以E为原点，AC为x轴，EB为y轴的直角坐标系，设$A(-a,0)$，$C(c,0)$。因$\angle A=60^\circ$，所以点B的坐标为$(0,\sqrt{3}a)$。

$$\because MH+NH=BH-BM+CN-CH$$
$$=BH-CH,$$

$$CH=\frac{2}{\sqrt{3}}c,\ EH=\frac{1}{\sqrt{3}}c,\ BH=\sqrt{3}a-\frac{1}{\sqrt{3}}c,$$

$$\therefore BH-CH=\sqrt{3}a-\frac{1}{\sqrt{3}}c-\frac{2}{\sqrt{3}}c=\sqrt{3}(a-c).$$

过点O作$OP\perp AB$于点P，作$OQ\perp AC$于点Q，于是P，Q分别为AB，AC的中点。

$$\therefore P\left(-\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a\right),\ Q\left(\frac{c-a}{2},0\right).\ k_{PO}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

直线OP的方程为

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{a}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}a.\quad \therefore y_0=-\frac{\sqrt{3}}{6}c+\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

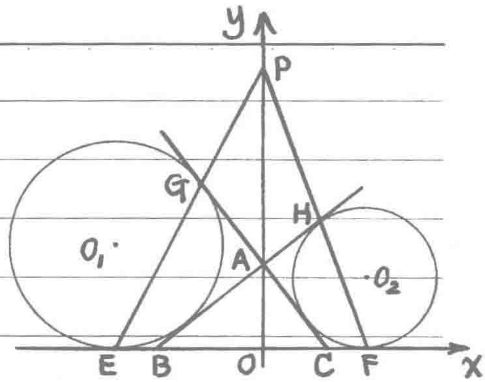
$$\therefore O\left(\frac{c-a}{2},-\frac{\sqrt{3}}{6}c+\frac{\sqrt{3}}{2}a\right),\ H\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}c\right).$$

$$\therefore OH=\sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(a-c)\right)^2}=a-c.$$

$$\therefore \frac{MH+NH}{OH}=\frac{BH-CH}{OH}=\sqrt{3}.$$

4　如图，$\odot O_1$与$\odot O_2$和$\triangle ABC$的3边所在的直线都相切，E，F，G，H为切点，EG和FH的延长线交于点P，求证 $PA \perp BC$。

（1996年全国联赛二试1题）



证　取以BC为x轴，以$\triangle ABC$的边BC上的高AO的垂足O为原点的直角坐标系。设$\angle ABC=2\alpha$，$\angle ACB=2\beta$，$x_B=-b$，$x_C=c$，因为点A在y轴上，故有

$$x_A=x_C \operatorname{tg}2\beta=x_B\operatorname{tg}2\alpha，\quad c\operatorname{tg}2\beta=b\operatorname{tg}2\alpha，$$

$$c\operatorname{ctg}2\alpha=b\operatorname{ctg}2\beta. \tag{1}$$

因为直线BO_2的斜率为$\operatorname{tg}\alpha$，所以BO_2的方程为

$$y=\operatorname{tg}\alpha(x+b). \tag{2}$$

又因$\angle CO_2F=\beta$，所以CO_2的方程为

$$y=\operatorname{ctg}\beta(x-c). \tag{3}$$

将②和③联立，解得点O_2的坐标为

$$\left(\frac{b\operatorname{tg}\alpha+c\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}，\frac{b+c}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right).$$

从而点F作为点O_2在x轴上的投影，其坐标为

$$\left(\frac{b\operatorname{tg}\alpha+c\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}，0\right).$$

又因$BO_2\perp HF$，所以直线HF的斜率为$-\operatorname{ctg}\alpha$，方程为

$$y=-\operatorname{ctg}\alpha\left(x-\frac{b\operatorname{tg}\alpha+c\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}\right). \qquad ④$$

同理，EG的方程为

$$y=\operatorname{ctg}\beta\left(x-\frac{b\operatorname{ctg}\alpha+c\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}\right). \qquad ⑤$$

将④与⑤联立，解得点P的坐标：

$$x_p=\frac{\operatorname{ctg}\alpha(b\operatorname{tg}\alpha+c\operatorname{ctg}\beta)(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha)+\operatorname{ctg}\beta(b\operatorname{ctg}\alpha+c\operatorname{tg}\beta)(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{tg}\alpha)}{(\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha)}. \qquad ⑥$$

$$⑥\text{的分子}=(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-1)\left(\operatorname{ctg}^2\alpha(b\operatorname{tg}\alpha+c\operatorname{ctg}\beta)-\operatorname{ctg}^2\beta(b\operatorname{ctg}\alpha+c\cdot\operatorname{tg}\beta)\right). \qquad ⑦$$

$$\begin{aligned}⑦\text{中后一括号}&=b\operatorname{ctg}\alpha-b\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}^2\beta+c\operatorname{ctg}^2\alpha\operatorname{ctg}\beta-c\operatorname{ctg}\beta\\&=b\operatorname{ctg}\alpha(1-\operatorname{ctg}^2\beta)+c\cdot\operatorname{ctg}\beta(\operatorname{ctg}^2\alpha-1). \qquad ⑧\end{aligned}$$

接倍角公式有

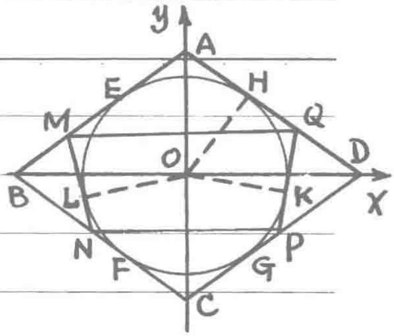
$$\operatorname{ctg}2\theta=\frac{\operatorname{ctg}^2\theta-1}{2\operatorname{ctg}\theta}. \qquad \operatorname{ctg}^2\theta-1=\operatorname{ctg}2\theta\cdot2\operatorname{ctg}\theta.$$

接⑧式可得

$$\begin{aligned}⑦\text{中后一括号}&=-b\operatorname{ctg}\alpha\cdot2\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}2\beta+c\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}2\alpha\\&=2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta(-b\operatorname{ctg}2\beta+c\operatorname{ctg}2\alpha)=0.\end{aligned}$$

所以 $x_p=0$，即点P在y轴上．所以 $PA\perp BC$．

5　如图，菱形ABCD的内切圆⊙O与各边分别切于点E，F，H，G，在$\overset{\frown}{FE}$和$\overset{\frown}{GH}$上分别作⊙O的切线交AB于点M，交BC于点N，交CD于点P，交DA于点Q．求证MQ∥NP．（1995年全国联赛二试3题）



证　取以O为原点，对角线BD，AC分别为x轴和y轴，⊙O半径为1的直角坐标系．设点H的坐标为$(\cos\theta,\sin\theta)$，于是点A和D的坐标分别为$\left(0,\dfrac{1}{\sin\theta}\right)$和$\left(\dfrac{1}{\cos\theta},0\right)$，直线AD的方程为

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1. \qquad ①$$

由对称性知菱形的另外3条边所在直线的方程分别为

$$AB\quad -x\cos\theta+y\sin\theta=1, \qquad ②$$

$$BC\quad -x\cos\theta-y\sin\theta=1, \qquad ③$$

$$CD\quad x\cos\theta-y\sin\theta=1. \qquad ④$$

设PQ与⊙O的切点K的坐标为$(\cos\alpha,\sin\alpha)$，于是直线PQ的方程为

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=1. \qquad ⑤$$

将④与⑤联立并解得点P的坐标：

$$x_P=\frac{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\theta}{2}},\quad y_P=\frac{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}. \qquad ⑥$$

将①与⑤联立，解得点Q的坐标为

$$x_Q=\frac{\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}},\quad y_Q=\frac{\sin\frac{\alpha+\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}}. \qquad ⑦$$

设MN与⊙O的切点L的坐标为$(\cos\beta,\sin\beta)$，同理可求得点M和N的坐标分别为：

$$M\left(\frac{\sin\frac{\theta-\beta}{2}}{\sin\frac{\theta+\beta}{2}},\frac{\cos\frac{\theta-\beta}{2}}{\sin\frac{\theta+\beta}{2}}\right),\quad N\left(\frac{\sin\frac{\theta+\beta}{2}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}},\frac{-\cos\frac{\theta+\beta}{2}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}}\right). \quad ⑧$$

由⑥—⑧即可求得直线MQ与NP的斜率：

$$k_{MQ}=\frac{\dfrac{\cos\frac{\theta-\beta}{2}}{\sin\frac{\theta+\beta}{2}}-\dfrac{\sin\frac{\alpha+\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}}}{\dfrac{\sin\frac{\theta-\beta}{2}}{\sin\frac{\theta+\beta}{2}}-\dfrac{\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}}}=\frac{\cos\frac{\theta-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\theta}{2}-\sin\frac{\alpha+\theta}{2}\sin\frac{\theta+\beta}{2}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\theta}{2}-\cos\frac{\alpha+\theta}{2}\sin\frac{\theta+\beta}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\cancel{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}+\cos\left(\theta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\cos\left(\theta+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\cancel{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\theta}{2}-\cos\frac{\alpha+\theta}{2}\sin\frac{\theta+\beta}{2}}.$$

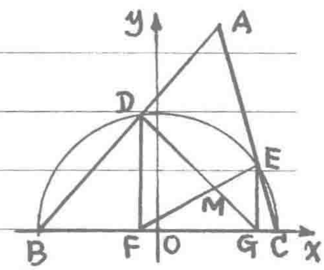
$$k_{NP}=\frac{\dfrac{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}+\dfrac{\cos\frac{\theta+\beta}{2}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}}}{\dfrac{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}-\dfrac{\sin\frac{\theta+\beta}{2}}{\sin\frac{\theta-\beta}{2}}}=\frac{\sin\frac{\alpha-\theta}{2}\sin\frac{\theta-\beta}{2}+\cos\frac{\theta+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}\sin\frac{\theta-\beta}{2}-\sin\frac{\theta+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\cos\left(\theta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\cancel{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}+\cos\left(\theta+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\cancel{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)}{\cos\frac{\alpha-\theta}{2}\sin\frac{\theta-\beta}{2}-\sin\frac{\theta+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\theta}{2}}.$$

$\therefore k_{MQ}=k_{NP}$. $\therefore MQ\parallel NP$.

6　以$\triangle ABC$的底边BC为直径作半圆，分别交AB、AC于点D和E。分别过点D、E作BC的垂线，垂足分别为F、G，$DG\cap EF=M$，求证$AM\perp BC$。　（1996年中国集训队选拔考试1题）

证　取以BC中点O为原点，以直线BC为x轴，以OC为单位长的直角坐标系。因D、E在半圆上，故可设两点坐标分别为$(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$(\cos\beta,\sin\beta)$。于是$F(\cos\alpha,0)$，$G(\cos\beta,0)$。因B和C的坐标分别为$(-1,0)$和$(1,0)$，故直线AB和AC的方程分别为



$$AB:\ \frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha}=\frac{x+1}{y}\ ;\quad AC:\ \frac{\cos\beta-1}{\sin\beta}=\frac{x-1}{y}.$$

两式联立，解得点A的横坐标为

$$x_A=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)+\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

另一方面，直线DG和EF的方程分别为

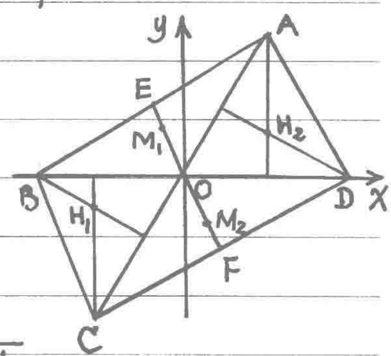
$$DG:\ \frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha}=\frac{x-\cos\beta}{y}\ ;\quad EF:\ \frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\sin\beta}=\frac{x-\cos\alpha}{y}.$$

两式联立，解得点M的横坐标为

$$x_M=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=x_A.$$

$\therefore AM\perp BC$.

7　凸四边形ABCD的对角线AC和BD交于点O，$\triangle AOB$和$\triangle COD$的重心分别为M_1，M_2，$\triangle BOC$和$\triangle AOD$的垂心分别为H_1，H_2，求证直线$M_1M_2\perp H_1H_2$.　（1972年全苏数学奥林匹克）



证　取以点O为原点，以BD为x轴的直角坐标系. 于是可设$B(b,0)$，$D(d,0)$，$A(a_1,a_2)$和$C(\lambda a_1,\lambda a_2)$. 从而点$M_1$和$M_2$的坐标分别为

$$M_1\left(\frac{a_1+b}{3},\frac{a_2}{3}\right),\ M_2\left(\frac{\lambda a_1+d}{3},\frac{\lambda a_2}{3}\right).$$

$$\therefore k_{M_1M_2}=\frac{a_2-\lambda a_2}{(a_1+b)-(\lambda a_1+d)}=\frac{(1-\lambda)a_2}{(1-\lambda)a_1+b-d}.$$

另一方面，显然有$x_{H_2}=a_1$，$x_{H_1}=\lambda a_1$.

$$\because k_{OA}=\frac{a_2}{a_1},\quad \therefore k_{DH_2}=-\frac{a_1}{a_2}.$$

所以直线DH_2的方程为

$$y=-\frac{a_1}{a_2}(x-d).\qquad y_{H_2}=-\frac{a_1}{a_2}(a_1-d)=\frac{a_1}{a_2}(d-a_1).$$

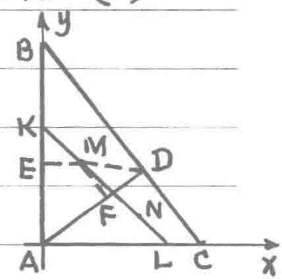
$$\therefore H_2\left(a_1,\frac{a_1}{a_2}(d-a_1)\right).$$

同理　$H_1\left(\lambda a_1,\frac{a_1}{a_2}(b-\lambda a_1)\right)$.

$$\therefore k_{H_1H_2}=\frac{\frac{a_1}{a_2}(b-\lambda a_1-d+a_1)}{\lambda a_1-a_1}=\frac{(1-\lambda)a_1+b-d}{a_2(\lambda-1)}=-\frac{1}{k_{M_1M_2}}.$$

$\therefore M_1M_2\perp H_1H_2$.

8　在直角$\triangle ABC$中，AD是斜边BC上的高，M，N分别是$\triangle ABD$与$\triangle ACD$的内心，连结MN并双向延长，分别交AB，AC于点K和L，求证$S_{\triangle ABC} \geqslant 2S_{\triangle AKL}$．　　　　（1988年IMO 5题）



证　取以A为原点，AC为x轴的直角坐标系．设$\triangle ABD$和$\triangle ACD$的内切圆半径分别为r_1和r_2．过M作$ME \perp AB$于点E，作$MF \perp AD$于点F，连结MD．于是$\triangle FDM$为等腰直角三角形且$ME = MF = r_1$．设$AB = c$，$AC = b$，于是$d = AD = \dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$．所以点$M$的坐标为$(r_1, d-r_1)$．同理，点$N$的坐标为$(d-r_2, r_2)$．

按两点式方程公式可得MN的方程为

$$\frac{y-(d-r_1)}{x-r_1} = \frac{r_2-(d-r_1)}{(d-r_2)-r_1} = -1. \quad y-d+r_1 = r_1 - x.$$

$$y+x-d=0.$$

这表明直线MN在x轴和y轴上的截距都是d，即$AK = AL = d$．所以

$$2S_{\triangle AKL} = d^2 = \frac{b^2c^2}{b^2+c^2} \leqslant \frac{b^2c^2}{2bc} = \frac{1}{2}bc = S_{\triangle ABC}.$$