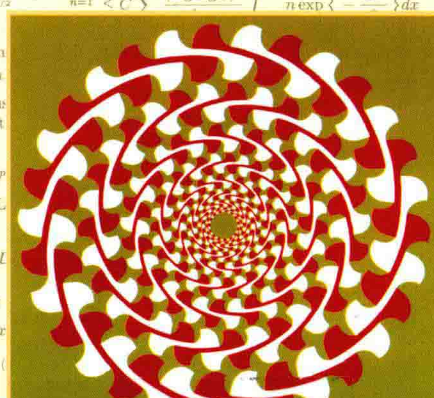
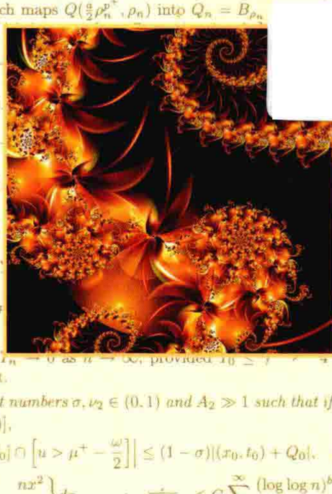
数学美与创造力

MATHEMATICAL BEAUTY AND CREATIVITY

许 康 著



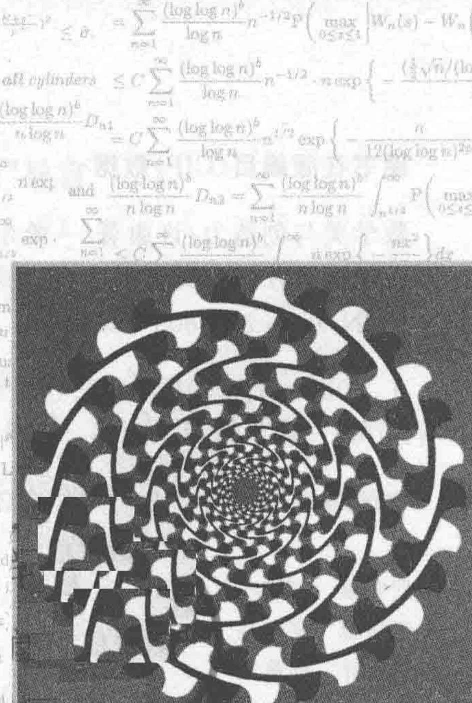


哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学美与创造力

MATHEMATICAL BEAUTY AND CREATIVITY

许康 著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书主要从两个方面研究和探讨了数学与美之间有什么联系？什么叫作美？数学美又是什么等.书的前半部分介绍的是数学学科中内在的美，如数学的构造美、逻辑美、对称美和整体美等；后半部分论述的是数学与其他一些学科联结和渗透的美，如艺术、诗、画、音乐、建筑等，使读者通过对数学美及其应用的感悟，显著提高在学习、工作、科研和社会活动中的创造力.

本书适合数学爱好者参考阅读，也启示广大读者增强对数学美和它的妙用之了解.

图书在版编目（CIP）数据

数学美与创造力/许康著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016.3

ISBN 978-7-5603-5857-4

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①许…　Ⅲ.①数学-美学-普及读物
Ⅳ.①O1-05

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 032482 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　穆　青　张永文
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 21.75　字数 379 千字
版　　次　2016 年 3 月第 1 版　2016 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5857-4
定　　价　48.00 元

◎ 目录

“数学与美”导言

第 1 章

1.1 什么是美？

爱美之心，人皆有之. 近年来，“美学热”在社会生活中持续不衰. 青少年首先要做到心灵美、行为美，培养美的情操，在社会主义精神文明建设中，不断追求真、善、美.

这本小书本着上述宗旨，力图帮助青少年读者学会揭示数学中的美，分析数学在美的事物中的作用. 显然，这是两个不同的概念，希望读者在阅读过程中注意加以区分. 但是，两者又是相互关联的，加之书中涉及到较广阔的知识领域，各种学科往往相互交叉、渗透，这体现了当代科学的整体性发展，所以我们关于数学与美的论述，经常分中有合，合中有分.

美是什么？可以意会，难于言传. 庄子说，“各美其美”，认为没有客观、公认的美的绝对标准. 东汉许慎《说文解字》和清代段玉裁注“羊大为美”，这反映远古人类造字时，正处于游牧生活年代，一饱羊肉口福时味美难忘，“民以食为天”，所以把味觉上的美感作为美的典型. 孔子闻韶乐，也说“三月不知肉味”，然而，这正表明孔子把音乐听觉上的美感摆到了更高的位置，体现了对美的认识的深化.

现代关于美的问题，包括美的本质（究竟什么是美？），美的内容（指自然美、社会美以及在此基础上的艺术美、科学美），美的形式（指能够引起我们美感的事物的存在形式）等，至今各派观点仍在争执不休，促使人们作更深入的研究.

我们认为，美是引起人的愉悦情绪的一种客观属性，依赖于人们对事物的认识和所要达到的功利目的. 美是符合社会和自然规律而存在的，又是人的能动创造的精神成果. 它是具有多层次、多方面联系的概念，它是主客观相互作用的产物.

通常人们把美粗略分为两个层次：

1. 事物以其外在的感性形式所呈现的美.

2. 事物以其内在结构的和谐、秩序而具有的理性美，即事物蕴含的这些美的信息被人的感觉器官察知，并经过同构变换而被理性加工之后，形成的美的映象，这已上升为意识和观念.

因为所谓美感，即人在审美活动中，对于美的主观反映、感受、欣赏和评价，其基本特点之一是形象的直接性和可感性. 但人的思想意识、知识水平等，也无不以形象思维的方式，渗入到美感的形象里面，构成美感的具体内容. 因此，美感是形象性、思想性和社会性的统一. 进而，只有理解了的东西才能更好地感受它. 所以，两个层次是互相联系，互相沟通的.

本书要谈的数学美，正是处在这第二层次的东西. 按照法国数学全才庞加莱（J. H. Poincaré，1854—1912）（图 1）的说法，“我的意思是说那种深奥的美，这种美在于各个部分的和谐秩序，并且纯理智能够把握它. 正是这种美使物体，也可以说使结构具有让我们感官满意的彩虹一般的外表. 没有这种支持，这些倏忽即逝的梦幻之美结果就是不完美的，因为它是模糊的、总是短暂的”. 他把那些“潜藏在感性美之后的理性美”如雅致、和谐、对称、平衡、秩序、统一、方法的简单性等，列为科学美的主要内容.

图 1

事实上，如前面提到的，人类最初有关美的认识来源于自然界. 生产技术和自然科学的发展，一步一步揭示出自然界丰富多彩的运动形式及其规律性. 马克思说，人能“在他所创造的世界中直观自身”，意识到自身的力量，并产生愉悦和欣赏的情绪，这就是审美需要和审美活动产生的根源. 这样看来，美的创造首先来自科学技术的创造，审美活动和美学的发展也依赖于科学技术的发展. 在人类理性思维能力和科学素养空前提高的现代，人们已能透视到科学技术中所

显示的人的本质力量是何等伟大,对科学美怎样熔优美与壮美于一炉,是毫无怀疑的余地了.

1.2 科学美的准则

那么,关于科学美的主要内容或标准应当怎样确定呢?大家知道,文艺界对于艺术美的标准分歧甚大,莫衷一是.而在科技界,对于科学美的评价却相当一致或近似.庞加莱曾经用"雅致"这个词来笼统地表述它,顾名思义,优雅别致.这里的优雅,"是不同的各部分的和谐,是其对称,是其巧妙的协调,一句话,是所有那种导致秩序,给出统一,使我们立刻对整体和细节有清楚的审视和了解的东西."而别致,还是按庞加莱的说法,是"出乎意料",或者说,新奇、奇异.

下面就三条主要的内容谈谈.

1.和谐　指理论体系内部的自洽性.首先是逻辑的正确性和结构的严密性.自然界本身的和谐必然科学地反映为各学科中的井然有序,学科自身的发展又整理得更为协调.

其次,任何一门科学分支的这种逻辑结构和体系只是科学大树的某一层枝叶(子系统),因此它还应当具有外在的和谐功能,应与众多的相关系统表现出有机联系.

这内在和外在两种和谐,通常也可用统一这个词来形容.

同时,如上所述,既然它的逻辑结构如此严谨,必然反映着深广的内涵,而表现形式(由于广泛采用数学工具)却相当洗练,所以又给人以简洁之感.

2.对称　广义地说,指事物具有的匀称和均衡的特征,它同样使人有一种安排妥帖、寓整齐于变化之中的美感.科学理论的对称性和对称方法不单纯有其形式美,还表现为预见性和类比手法,这些都来源于自然界物质形态及其运动图景所具有的广泛的对称性.

数学理论中的对称性俯拾皆是.很多数学演算都是一串恒等变形,解方程更是时时保持等号两端平衡的关系,即使是不等式的求证或求解,也常常要经恒等变换化简.这些基本特征不变性,是依靠对称均衡性所保证的.

数学中还发展了群论这门分支,特别适用于对物质世界的对称性的研究.例如受其启发,物理学和化学中的守恒量或不变性都可以用某种对称性来表示.如质量守恒、能量守恒、电荷守恒、动量守恒是迄今广知的守恒原理.

对称方法是科学家追求理论美的一个工具.

3. 新奇指新颖奇异，不同凡响，出人意表. 新奇导源于科学理论所述某些事实本身的奇异性，以及创建者思维的发散性和方法的独创性. 奇异与和谐是对立的统一. 它们从正反两面展示了某种科学理论系统标新立异、卓然特立的风采.

新奇是向更高层次的和谐发展的突破口. 重大的奇异导致科学理论的"危机"和革命.

新奇和对称一样，还体现了科学理论中的艺术因素. 思想呆板、创造力贫弱的人缺乏这类"艺术细胞"，就无法达到这种境界.

显然，以上几点在数学中都反映得特别强烈和突出. 马克思认为，一门科学只有成功地运用了数学的时候，才标志着它的成熟. 因此，某种科学理论一旦实现了"数学化"，即主要定律和定理、法则都可用数学语言（主要是符号、算式）表达时，就使人们感到它是和谐、简洁和对称的，只有新奇该由它本身的特点和机遇所决定.

1.3 数学美引论

关于数学美，我们先看看一些权威数学家有何高见.

怀特海（A. N. Whitehead. 1861—1947）说："作为人类精神最原始的创造，只有音乐堪与数学媲美. 只有取得过数学财富的少数人才能尝到数学的'特殊乐趣'". 按照他的说法，似乎数学是阳春白雪，和者盖寡.

哈代（G. Hardy，1877—1947）（图 2）比他的看法要实在一些："现在也许难以找到一个受过教育的人对数学美的魅力全然无动于衷"，"实际上，没有什么比数学更为'普及'的学科了. 大多数人都能欣赏一点数学，正如多数人能欣赏一支令人愉快的曲调一样". 就是说，数学有它下里巴人的一面.


图 2

近年美国数学界两部综合调查报告《今日数学》和《明日数学》以非常肯定的口吻声称：

"有创造力的数学家……共享惊人相似的一组审美标准".

"……数学具有一种美学价值，正如音乐或诗歌所清楚地确定的一样".

我们普通人怎样发现和欣赏数学美呢？

数学家 A · 波莱尔（A. Borel）指出："要能欣赏数学，就需要对一个很特殊的思维世界里的种种概念在精神上的雅与美有一种独特的感受力"，因为它"是

用高度专门化的语言——数学语言写成的”.所以,问题的关键是懂得这种语言.事实上,“要欣赏音乐和绘画,也必须学会某种语言”.数学语言是可以学会的,理论物理学家英费尔德说得好:“当你领悟一个出色公式时,你得到同听巴赫的乐曲一样的感情,在这两种感觉之间没有任何区别,除去如下一点:要从数学得到满足比起爱好音乐者欣赏来,必须受到更多的训练”.

高中学生在数学方面已经经历了十年寒窗的攻读,该是能够领略其中很多乐趣的时候了.比方说,当你看到数学能以尽可能少的公理公设,运用明晰而严密的逻辑工具推演出具有普遍深远含义的结论,得出精炼、对称的方程、公式,在实践中获得广泛的应用,做出精彩的科学预言的时候,难道还不为之倾倒吗?

退一步说,即使我们不能时时、处处参与这些理论的创造和应用,也仍然可以从对理论美的欣赏中感受到快乐.如费马大定理($x^n+y^n=z^n$,当 $n>2$ 时无正整数解),甚至对一些暂未彻底证明的猜想,如哥德巴赫猜想(大于 2 的偶数都是两个素数之和)、黎曼猜想(复变函数 $\zeta(z)=1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\cdots+\frac{1}{n^z}+\cdots$的零点,除有限个例外,全部位于 $\mathrm{Re}\ z=\frac{1}{2}$这条直线上),人们也为其简明、单纯、隽永、深远所吸引,感到真是妙不可言.

香港旅美数学家,菲尔兹奖获得者丘成桐(图 3),在微分几何、非线性偏微分方程、多复变函数论、理论物理等领域成绩卓著,他根据自己的切身体会谈到:“数学家找寻美的境界,讲求简单的定律,解决实际问题”,“这些因素都永远不会远离实际世界”,数学美有着取之不尽的源泉.

图 3

20 世纪初最伟大的数学家希尔伯特(D. Hilbert, 1862—1943)把数学比喻为“一座鲜花盛开的园林”,他鼓励我们寻幽探胜,他主张向别人介绍这些奇景秀色,“我们共同赞美它,真是其乐无穷”.

1.4 数学对艺术的渗透

在人类历史上,科学与艺术有着几次合与分的过程.原始时代,这两者不加区别,被考古学家统称为“文化”,如仰韶文化、红山文化……两三千年前,在几个文明古国,它们已开始分化,出现各种学科,如柏拉图特别强调算术、几何、音乐、天文,孔子提倡礼、乐、射、御、书、数“六艺”.到了中世纪,欧洲的学校分两个

阶段，前段学习文法、修辞、逻辑，后段学习算术、音乐、几何、天文，并认为后段不过是较深的文艺而已.后来的"文艺复兴"，实质上是指欧洲近代科学和艺术的诞生.当然，随后两方面的迅猛发展使得它们在300年时间内越来越分道扬镳.

近年，一些未来学家指出，"第三次浪潮"正在猛扑过来，"信息时代"、"后工业化社会"已成为不可阻挡的"大趋势"，人类整个知识体系(包括自然科学、社会科学等)趋向整体化.加拿大学者米克认为："现在，有了一种新的创造精神，开始重建一个包括艺术、科学和技术都在内的完整而统一的世界".其客观背景是：各学科互相接近、交叉、渗透，形成多种样式的交融统一；科技方法与艺术手段互相结合，形成新奇的物质或精神产品；科技发明和艺术创作互相启示，激发灵感.越来越多的人认识到科学美与艺术美的追求，在知识爆炸和更新周期日益缩短的压力下，对于开拓人的智能和创造精神有着重要价值."科学家的灵巧，诗人的心扉，画家的慧眼"可以感受同样的和谐与优美.数学和美学都是侧重研究形式规律的，各门学科的"数学化"实质上导致更加形式化，所以对于数学自身的美，以及数学在美的事物中的应用这两个课题的深入研究，应当提到相当紧迫的日程表上.从理论上看，搞清楚其中一些问题，是对数学、美学、文学、艺术的共性和个性作更深入的了解.有些问题还可以成为思维科学、发明学、创造学的具体研究对象，例如逻辑思维和形象思维与数学美的关系，科学家、发明家和艺术家素质的结合，美的直觉与科学发现和灵感思维的关系等.从实际上看，文艺创作活动能否由电脑的人工智能来实现，独特的工艺造型设计如何定量化和批量生产等.

作为一本小书，我们不能全面接触这些问题，只能通过比较具体的例证和分析，扣住数学与美这个主题加以阐述.柏拉图早就把审美能力的提高描述为沿着特设的梯子拾级而上，从"对一个美形体的直观转到两个，从两个到全部，然后再从美形体转到美风尚，又从美风尚转到美学问，这时你才能从这些学问向关于美本身的学问前进，你才能最终知道美究竟是什么".

本书将遵循这样的途径，陪同青少年朋友进行这次壮游.我们的旅游景点(书中各章节)基本上相对独立，但又有内在联系.所以我们安排了由数(数字、符号、算式、比例)到形(曲线、对称)，再深入到逻辑和统一性的内部路线；然后沿绘画、音乐、立体造型艺术、文学的外部路线作一番巡礼.如果读者不顺这一次序，随便挑选浏览也是可以的.

第2章

$e^{i\pi}+1=0$，数字、符号、算式之美

2.1 从“五朵金花”说起

必须承认，由于本身的抽象性，以及从小所受教育不甚得法，有些人对于数字、数学符号和算式产生了偏见，条件反射式地一见到它们就觉得枯燥乏味、昏昏欲睡. 但少数人对数字却有特殊的敏感，例如高斯(C. F. Gauss，1777—1855)幼年能速算 $1+2+\cdots+100$；印度拉玛努扬(S. Ramanujan，1887—1920)也是一位奇才，能透视整数中的很多奇妙性质；欧拉(L. Euler，1707—1783)老年双目失明，仍能记住一切演算细节，十几年内写成的论文数以百计……这都是脍炙人口的故事了. 而对于我们大多数人来说，情况通常处于这两者之间，一般是了解的数学越多，就越觉得人类智力创造的数字、符号、算式是何等神奇. 为了避免空泛之论，本章围绕公式

$$e^{i\pi}+1=0$$

和其中的“五朵金花”作些剖析. 这五朵金花不是别的东西，恰好是 $0,1,i,\pi,e$，它们在数学中处处盛开，而每一朵都可以用专书来详细介绍.

2.2　0,1,i——乌有,一切,虚无

我们现在用到的 10 个数字,0 是最后才呱呱坠地的.我国古代采用算筹(状如冰棍上的竹签或木签,也有骨制、金属制的),有先进的位置制思想,但没有 0 这个记号.一般认为印度人最先发明 0,再西传阿拉伯.近年的数学史研究成果表明,我国在宋元时期开始出现〇,它与阿拉伯数字 0 略有区别,外形上一胖一瘦,书写时一顺(时针)一反(时针),所以〇是我国的独创.有了零,笔算记位就方便了.单个 0 虽然代表"无",但在各种进制的数字里,只有它参与才能进位,例如从 1 到 9 都是一位数字,10 便成了两位数字,1 进到了十位.0 还是正数与负数的分界点,坐标系的原点,很多数学物理过程的起点.

"1"也有丰富的内涵,它是整数的单位,数字的始祖,是真分数(纯小数)和整数的分水岭.远古人类能抽象出 1 这个概念的时候,便是数学的真正萌芽.1 也可以代表事物的整体,或者各部分的总体,甚至整个宗宙,所谓"浑一".

3 000 年前我国有周易八卦的伟大发明.传说是伏羲画卦、周文王作辞、孔子作"传",成为《易》经."易有太极,是生两仪,两仪生四象,四象生八卦".太极成了派生万物的本源,与古希腊毕达哥拉斯学派"万物皆数"相映成趣.图 1 画的"太极图"传自宋代华山方士陈希夷,源于后汉魏伯阳的《周易参同契》,由朱熹传播开来.

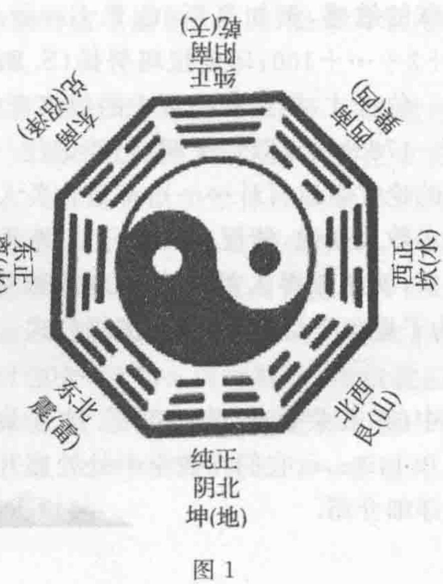


图 1