

高考数学

你真的掌握了吗？

函数

张杨文 主编 / 兰师勇 副主编

清华大学出版社

高考数学

你真的掌握了吗？

函数

张杨文 主编 / 兰师勇 副主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本套书基于作者团队多年辅导经验总结,对高考内容进行了科学合理的筛选和调整,侧重体现知识点的系统性和逻辑性.函数、数列、圆锥曲线这三部分重要内容独立成书;相对简单零散的平面向量、不等式、直线与圆、立体几何、计数原理与概率统计共同含于《数学五章》一书;集合与常用逻辑用语、复数、算法、三角函数等内容未收纳.

书中内容绝非简单拼凑,相当多的内容是作者团队实践积累的成果,比如函数恒成立部分的“端点效应”、数形结合中的“两图像法”和非常规函数图像的解决方法、数列放缩的系统归类及解法、圆锥曲线中的框架图,以及其他一些数学思想的应用等.针对全国各地的高考题型及特点,作者力求探索简洁、高效、容易掌握的普适方法,让高难度的压轴题不再成为考生的绊脚石,希望能对广大考生提供帮助.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售.

版权所有,侵权必究.侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

高考数学你真的掌握了吗? 函数/张杨文主编.--北京:清华大学出版社,2014(2015.8重印)
ISBN 978-7-302-36088-9

I. ①高… II. ①张… III. ①中学数学课—高中—升学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 069693 号

责任编辑:陈明

封面设计:傅瑞学

责任校对:赵丽敏

责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者:清华大学印刷厂

装 订 者:三河市溧源装订厂

经 销:全国新华书店

开 本:203mm×280mm 印 张:18.5 字 数:469千字

版 次:2014年8月第1版 印 次:2015年8月第6次印刷

定 价:45.00元

产品编号:056539-01

编 委 会

主 编 张杨文

副主编 兰师勇

编 委 郑晓波 王 嘎 宋小东 彭 艳 唐 鸿 周彭威
杨世卿 皮 伟 叶 浩 刘禄波 皮良雅

序

数学在高考中的地位毋庸置疑.一方面,数学作为主干学科,既容易得分也容易失分的特点使得莘莘学子对其又爱又恨;另一方面,数学排在高考第一天的下午,当语文让考生们平稳进入高考状态后,数学就要学子们开始真正发挥威力了,并且数学考试的感觉将对第二天的考试起着至关重要的作用.因此,掌握好高考数学迫在眉睫!

本套《高考数学你真的掌握了吗?》以不落俗套的形式、创造性的思维、系统化的视角诠释高考数学的精髓,帮助广大学子消解长期以来的困惑,从而突破数学的瓶颈,收获自己满意的成绩!

本套书具有如下几个特点:

一、科学合理的编排结构

我们摒弃按照教科书的顺序编写本书,而是按照重难点的分布进行科学合理的筛选与整合.函数、数列、圆锥曲线三部分内容分别独立成书;平面向量、不等式、直线与圆、立体几何、计数原理与概率统计共同构成另外一本书.

二、内容具有创造性,独家研究成果遍布全书

书中很多解法、结论、方法总结都是我们经过长期实践后研究出来的成果,在此作简单的说明.

1. 《函数》第四章:数形结合

对于复合方程的根的问题,我们采用“两个图像”法来解决,一方面避免了复杂函数的作图,另一方面也可以达到普遍适用的效果.

而对于动曲线的问题,我们重点考查了两条曲线在某个交点附近是否还有其他交点的情况,通过交点处的局部分析进行深刻的剖析,此处稍微引进了高等数学的一些基本思想,这将彻底消除学子们对此类疑难问题的困惑.

2. 《函数》第五章:恒成立

对于大多数情况,函数恒正(恒负)等价于函数在区间端点处恒正(恒负)是错误的,但这并不意味着端点就没有任何作用.我们通过事先考虑函数在端点的情形,虽然不能得到最终结果,但却可以据此排除某些情形,从而避免了复杂的分类讨论.这种先通过端点来缩小参数取值范围的方法,我们将其称为“端点效应”.

这个方法简单易行,且经得起考验和推敲,可以很好地帮助广大考生轻松解决本身并不简单的函数恒成立一类问题.

3. 《数列》第四章：放缩

数列放缩无疑是学子们心中的噩梦,除了“就题论题”以外,极少有人能对此有一个整体的、系统的认识和理解,我们在书中对这类较难的题型进行了清晰的归纳总结,并系统地给出了相应的思维方法和求解方式.

4. 《圆锥曲线》第六、七、八、九章

一般认为圆锥曲线似乎就是计算,其实远不止于此.即便是计算,也会有一些技巧,我们在书中都进行了说明.而在第六、七、八、九章中,我们以框架图的形式给出了独家研究成果,利用这些结论和条件,部分考题可以轻松解决.

三、强调思维方式的引导

在本套辅导书中,我们并非单纯地给出解法和技巧,而是从原理入手,通过分析讨论,一步一步引导读者理解我们的思维,使读者真正领会其中的奥妙,从而做到举一反三,也逐渐养成科学的学习方法,培养自主探索学习的能力.

四、针对性极强

通过多年的教学实践,我们了解广大高考学子的迫切需求.因此,针对全国各地的高考题型及特点,我们着力于探索更加简洁、高效且容易掌握的普适方法,力求做到清晰、系统,从而让高三学子事半功倍,也让高考数学不再令人望而生畏.希望我们辛勤劳动的成果能助全国高三学子们扬帆远航!

本书的完成有赖于一支高度负责的团队,各位编委都花了大量时间精心编写各自分工的内容.然而,编者虽倾心倾力,但终究水平有限,书中若有不妥之处,恳请广大读者批评指正!

编者

2014年6月



前言

如果谈及高中数学最重要的知识内容,函数绝对是标准答案.从非严格意义上来说,学数学就是学函数!从初中的一次函数、反比例函数、二次函数,到高中的指数函数、对数函数、幂函数、三角函数,纵观函数在各阶段所起的作用,其居于高中数学的核心位置是毋庸置疑的!

对于高中数学而言,函数的概念既高于初中数学的表象描述,又为大学数学更抽象的表达做了必要的铺垫.函数的三要素:定义域、对应法则和值域,必然成为首要研究对象,其次是四大性质:单调性、奇偶性、周期性和对称性.导数作为研究函数最重要的工具,其地位依然不可小觑.数形结合和“恒成立”问题始终占据着函数中最难且最重要的位置!

遵循数学学习的逻辑规律以及高考对函数的考查方式和特点,我们对函数部分的编排思路如下:

第一章:函数的基本概念.重点在于定义域和值域的求法,在解决了分式型和根号型函数值域的求法之后,我们讨论了函数值域的应用问题,主要解析了含参数的最值问题和“成立”与“恒成立”转化过来的值域问题.

第二章:函数的基本性质.一方面对奇偶性、周期性和单调性进行了系统完整的梳理,另一方面也整合了四大性质之间的内在联系以及常考题型,鉴于导数在单调性讨论中的不可分割性,我们一并将极值与切线相关问题纳入本部分内容之中.

第三章:二次函数与三次函数.作为初中早已熟悉的二次函数,其在高考中的份量有增无减,考查方式及难度均占据压轴小题的位置.三次函数作为二次函数的延伸与拓展,充分展现了多项式函数的魅力与特点,高考对此的考查始终处于只升不降的趋势.因此,我们将二次函数与三次函数单独成章,全面解析二者相关题型,以及函数与方程的关系.

第四章:数形结合.纵观高考以及各地模拟试卷的压轴题,数形结合考查形式多样,综合难度大,往往成为莘莘学子的一大棘手问题.对此,我们进行了全面且深入的归纳与剖析,将数形结合归纳为直线与曲线、曲线与曲线两大情形.对于直线与曲线的情形,其中的直线分为水平与非水平两种情况;对于曲线与曲线的情形,我们对一类高难度的问题提出了交点处的局部分析的解决办法,并深入剖析了指数型曲线和周期与类周期型函数图像问题;对于处于升温阶段的复合方程有解问题,我们提出了“两图像法”这一极其精妙简单的方法.相信这部分内容一定会消释众多读者长期以来的困惑!

第五章:函数恒成立.相比数形结合作为高考压轴题的分量,“恒成立”绝对是有过之而无不及,其考查方式与难度用“浓妆淡抹总相宜”来形容再贴切不过!我们将其系统整合为以下几部分:可求最值型、分离变量型、端点与一次函数、二次函数、端点效应、指数与对数,以及以上这些内容的混合部分.其中,根据端点处的差异,端点效应再细分为三种情形.在这一部分内

容中,我们从最简单的题型入手,逐步深入,一步一步引导读者去思考,从而真正理解数学的核心思想及其精髓所在,最终探索出其本质,掌握触类旁通的学习方法,以期达到事半功倍的学习效果!

第六章:任意与存在.“任意”问题本可归属于“函数恒成立”一章,其本质为函数值域问题,而新课标改革之后,作为全称量词的“任意”与存在量词的“存在”,在高考中成为了备受宠爱的对象,而“存在”一词的实质亦为值域问题,故部分内容与函数值域和“恒成立”具有千丝万缕的关系.鉴于“任意”与“存在”这种既紧密联系又相互区别的特点,以及高考的关注程度,我们将其单独成章.

以上六章内容并非简单的题型罗列和解析的直接展示,而是具备强烈的内在逻辑及科学的思维方法.精彩的解析本身并非重点,关键在于其思想来源.我们希望通过一步一步解题方式的展现,让读者体会其中的思维方式,并学会举一反三,从而领会思想的精髓,达到认识本质的效果!同时,我们以极其系统的思想对知识点的应用和题型、解法进行全面综合的梳理,希望带给读者一幅宏大而不失有序的函数蓝图,达到既有树木又可见森林的效果!

编者

2014年6月

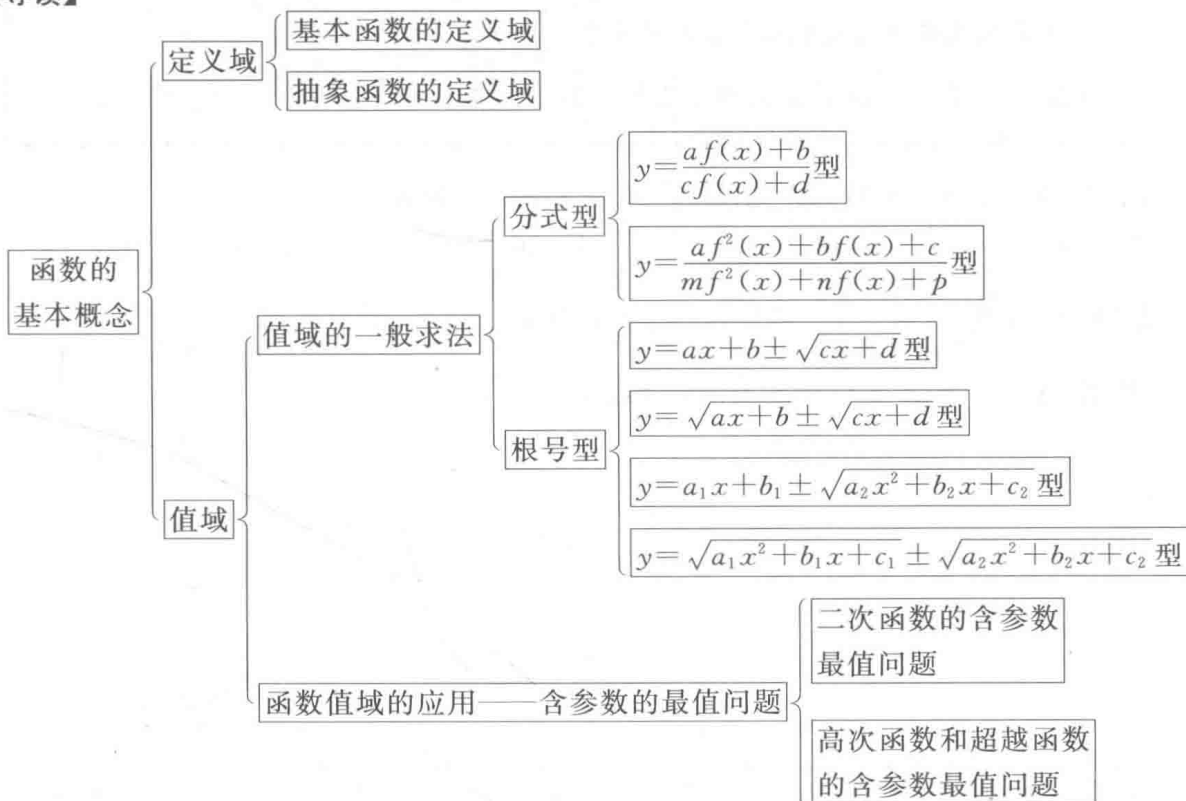
目 录

| | |
|----------------------------|----|
| 第一章 函数的基本概念 | 1 |
| 第一节 定义域 | 2 |
| 一、基本函数的定义域 | 2 |
| 二、抽象函数的定义域 | 3 |
| 第二节 值域 | 5 |
| 一、值域的一般求法 | 5 |
| 二、函数值域的应用——含参数的最值问题 | 11 |
| 第一章变式参考答案 | 14 |
| 第二章 函数的基本性质 | 20 |
| 第一节 奇偶性 | 21 |
| 一、函数奇偶性的判断 | 21 |
| 二、函数奇偶性的运算 | 22 |
| 三、抽象函数的奇偶性 | 23 |
| 四、函数奇偶性的应用 | 24 |
| 第二节 周期性 | 31 |
| 一、常用周期函数模型 | 31 |
| 二、对称性与周期性 | 35 |
| 第三节 单调性 | 37 |
| 一、单调性的判别方法 | 37 |
| 二、单调性的等价定义 | 44 |
| 三、单调性的应用 | 46 |
| 第四节 极值与切线 | 50 |
| 一、极值的基本概念与求法 | 50 |
| 二、切线的基本概念 | 52 |
| 三、函数图像与切线、割线结合的存在性问题 | 54 |
| 第二章变式参考答案 | 56 |
| 第三章 二次函数与三次函数 | 73 |
| 第一节 二次方程根的分布 | 74 |

| | |
|--------------------------------------|------------|
| 第二节 三次函数 | 82 |
| 第三章变式参考答案 | 90 |
| 第四章 数形结合 | 99 |
| 第一节 $f(x)=k$ (I) 型 | 100 |
| 一、直接作图 | 100 |
| 二、先变形后作图 | 106 |
| 第二节 $f(x)=k$ (II) 型 | 111 |
| 一、给定定义域 | 111 |
| 二、曲线自身定义域 | 113 |
| 三、无理方程 | 116 |
| 第三节 $kx+b=f(x)$ 型 | 120 |
| 一、旋转的动直线 | 120 |
| 二、平移的动直线 | 128 |
| 三、动曲线 | 130 |
| 第四节 复合函数方程有解问题 | 133 |
| 一、 $k=f(f(x))$ 或 $k=f(g(x))$ 型 | 133 |
| 二、 $f(f(x))=x$ 或 $f(g(x))=x$ 型 | 143 |
| 第五节 曲线与曲线 | 144 |
| 一、交点处的局部分析 | 145 |
| 二、指数型曲线 | 149 |
| 三、周期与类周期 | 153 |
| 第四章变式参考答案 | 158 |
| 第五章 函数恒成立 | 188 |
| 第一节 可求最值型 | 189 |
| 第二节 分离变量型 | 191 |
| 第三节 端点与一次函数、二次函数 | 196 |
| 第四节 端点效应 | 200 |
| 一、端点处的取值有意义且不为 0 | 201 |
| 二、端点处的取值没有意义且趋于无穷 | 206 |
| 三、端点处的取值为 0 | 210 |
| 第五节 指数与对数 | 217 |
| 一、指数型 | 217 |
| 二、对数型 | 222 |
| 三、指数与对数混合型 | 226 |
| 第六节 杂题 | 227 |
| 第五章变式参考答案 | 230 |

| | |
|-----------------------------------|-----|
| 第六章 任意与存在 | 252 |
| 第一节 基础型 | 253 |
| 一、“任意”型 | 253 |
| 二、“存在”型 | 254 |
| 三、“任意=存在”型 | 257 |
| 四、“存在=存在”型 | 260 |
| 第二节 简单组合型 | 262 |
| 一、“任意 \leq 任意”型 | 262 |
| 二、“任意 $\leq(\geq)$ 存在”型 | 263 |
| 三、“存在 \leq 存在”型 | 266 |
| 第三节 绝对值型 | 267 |
| 一、“ 任意-任意 $\leq(\geq)a$ ”型 | 267 |
| 二、“ 存在-存在 $\leq(\geq)a$ ”型 | 268 |
| 三、“ 任意-存在 $\leq(\geq)a$ ”型 | 269 |
| 第六章变式参考答案 | 270 |
| 参考文献 | 282 |

【导读】



函数的定义域和值域是函数中既基本又重要的概念,只有在深刻理解并熟练掌握了这两个基本概念的前提下,才能正确地将其应用于解决其他以函数为背景的各种问题之中.

第一节 定义域

函数的定义域在函数三要素中位居第一,具有举足轻重的作用,是研究所有函数问题的基础.本节将从基本函数、抽象函数两个方面来解读函数定义域的求法.

一、基本函数的定义域

【知识点 1.1】 (1) 分式分母不为零;

(2) 偶次方根的被开方数大于或等于零;

(3) 对数的真数大于零;

(4) 底数大于零且不等于 1;

(5) 零次或负次指数次幂的底数不为零;

(6) 正切函数 $\tan x$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

【例 1.1】(2013·江西理,2) 函数 $\sqrt{x} \ln(1-x)$ 的定义域为().

A. (0,1)

B. [0,1)

C. (0,1]

D. [0,1]

【解析】 由题得 $\begin{cases} x \geq 0, \\ 1-x > 0, \end{cases}$ 解得 $0 \leq x < 1$. 故选 B.

【变式 1】 $y = \ln(x^2 - 4|x| + 3)$ 的定义域为_____.

【变式 2】(2009·江西理,2) 函数 $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$ 的定义域为().

A. (-4,-1)

B. (-4,1)

C. (-1,1)

D. (-1,1]

【变式 1】 若函数 $f(x)$ 的定义域是 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 则 $f(\log_2 x)$ 的定义域是_____.

【变式 2】 已知函数 $f(x^2 - 2x + 2)$ 的定义域是 $[0, 3]$, 则函数 $f(x)$ 的定义域是_____.

【变式 3】 若函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$, 则 $f(x^2)$ 的定义域为_____.

【变式 4】 若函数 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, 则函数 $f[f(x)]$ 的定义域为_____.

【变式 5】 若函数 $g(x)$ 的定义域为 $(1, +\infty)$, $f(x) = x^2$, 则 $g(f(x))$ 的定义域为_____.

第二节 值 域

函数的值域问题向来是高考数学的重点和难点,考查的方式也花样百出,如含参数的不等式恒成立问题、方程的根的存在性问题等.本节主要讲述函数值域的一般求法及其在函数、方程、不等式中的常见应用.

一、值域的一般求法

在高中数学中,函数值域的求法多种多样,且技巧性偏强.本书着重讲述分离常数法、几何法、换元法和单调性法这几种相对普遍的方法,对其他方法亦稍有涉及.

(一) 分式型

1. $y = \frac{af(x)+b}{cf(x)+d}$ 型

【例 1.3】 求函数 $y = \frac{a^x+2}{a^x+1}$ ($1 \leq x \leq 2, a > 0, a \neq 1$) 的值域.

【解析】 由题意, $y = \frac{a^x+2}{a^x+1} = 1 + \frac{1}{a^x+1}$.

(1) 当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{1}{a^x+1}$ 在 $1 \leq x \leq 2$ 上单调递增,故 $\frac{1}{a+1} \leq \frac{1}{a^x+1} \leq \frac{1}{a^2+1}$, 于是 $\frac{1}{a+1} + 1 \leq y \leq \frac{1}{a^2+1} + 1$;

(2) 当 $a > 1$ 时, $\frac{1}{a^x+1}$ 在 $1 \leq x \leq 2$ 上单调递减,故 $\frac{1}{a^2+1} \leq \frac{1}{a^x+1} \leq \frac{1}{a+1}$, 于是 $\frac{1}{a^2+1} + 1 \leq y \leq \frac{1}{a+1} + 1$.

故当 $0 < a < 1$ 时, 值域为 $[\frac{a+2}{a+1}, \frac{a^2+2}{a^2+1}]$; 当 $a > 1$ 时, 值域为 $[\frac{a^2+2}{a^2+1}, \frac{a+2}{a+1}]$.

【变式 1】 函数 $y = \frac{2x+3}{x-2}, x \in [3, 8]$ 的值域为_____.

【变式 2】 函数 $y = \frac{2\sin x}{1+\sin x}$ 的值域是_____.

【变式 3】 设函数 $f(x) = \frac{2^x}{2^x + 1}$, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数 (如 $[2] = 2, [\frac{5}{4}] = 1$), 则 $[f(x) - \frac{1}{2}] + [f(x) + \frac{1}{2}]$ 的值域为 _____.

【例 1.4】 求函数 $y = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$ 的值域.

【解析】 $y = \frac{\sin x}{2 - \cos x} = \frac{\sin x - 0}{-\cos x - (-2)}$ 可以看作点 $P(-2, 0)$ 与点 $(-\cos x, \sin x)$ 所在直线的斜率, 注意到 $(-\cos x, \sin x)$ 是单位圆上的点, 如图 1-1 所示, 可知 $k_{PA} \leq y \leq k_{PB}$, 在 $\text{Rt}\triangle PBO$ 中, $OB = 1, OP = 2, \tan \angle OPB = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $k_{PB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 同理 $k_{PA} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故函数的值域为 $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$.

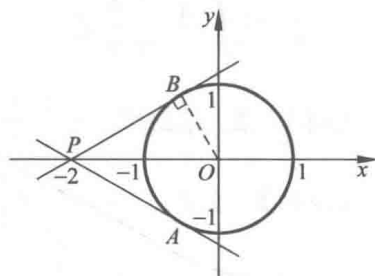


图 1-1

【变式 1】 求函数 $y = \frac{\sin x - 2}{\cos x - 2}$ 的值域.

【变式 2】 (2008 · 重庆理, 12) 函数 $f(x) = \frac{\sin x - 1}{\sqrt{3 - 2\cos x - 2\sin x}}$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 的值域是 ().

A. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$

B. $[-1, 0]$

C. $[-\sqrt{2}, 0]$

D. $[-\sqrt{3}, 0]$

【变式 3】 求函数 $y = \frac{\sqrt{1-x^2} - 2}{2x+3}$ 的值域.