gaodeng yuanxiao jichu

高等院校**基础数学**
"十二五"规划教材

shuxue shierwu guihua jiaocai

高等数学

（上册）

◎ 汤四平 吕胜祥 赵雨清 主编
◎ 刘金旺 主审

Calculus

中国工信出版集团
人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

gaodeng yuanxiao jichu
高等院校**基础数学**
“十二五”规划教材
shuxue shierwu guihua jiaocai

高等数学

（上册）

◎ 汤四平 吕胜祥 赵雨清 主编
◎ 刘金旺 主审

Calculus

人 民 邮 电 出 版 社
北 京

图书在版编目（C I P）数据

高等数学. 上册 / 汤四平，吕胜祥，赵雨清主编
. -- 北京 : 人民邮电出版社，2015.8
高等院校基础数学“十二五”规划教材
ISBN 978-7-115-39335-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①汤… ②吕… ③赵… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第160573号

内 容 提 要

本书共分上、下两册，主要介绍了函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、二重积分与三重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数（含傅里叶级数）、常微分方程等内容.

通过学习本课程，学生可以培养抽象思维能力、问题概括能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力，还可特别注意培养运算能力、运用所学知识分析和解决实际问题的能力.

本书适用于高等院校各专业的高等数学教学用书，也可作为考研、自学人员的参考用书.

◆ 主　　编　汤四平　吕胜祥　赵雨清
主　　审　刘金旺
责任编辑　王亚娜
执行编辑　喻智文
责任印制　张佳莹　焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京艺辉印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：20.25　　　　2015 年 8 月第 1 版
字数：451 千字　　　2015 年 8 月北京第 1 次印刷

定价：42.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前言

数学不仅是一种工具，而且是一种思维模式；数学不仅是一种知识，而且是一种素养；数学不仅是一门科学，而且是一种文化．数学教育在培养高素质科技人才中具有其独特的、不可替代的作用．

对于高等学校工科类专业的本科生而言，高等数学课程是一门非常重要的基础课．它内容丰富，理论严谨，应用广泛，影响深远，不仅为学生学习后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的基础，而且在培养学生的抽象思维、逻辑推理能力，综合利用所学知识分析问题解决问题的能力，较强的自主学习的能力，创新意识和创新能力上都具有非常重要的作用．

本教材面对高等教育大众化的现实，以教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的新的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"为依据，以"必须够用"为原则确定内容和深度，知识点的覆盖面与"基本要求"相一致，要求度上略高于"基本要求"．本教材具有以下特点：

(1)对基本概念的叙述清晰准确；

(2)对定理的证明简明易懂，但对难度较大的理论问题则不过分强调论证的严密性，有的仅给出结论而不加证明；

(3)对例题的选配力求典型多样，难度上层次分明，注意解题方法的总结；

(4)强调基本运算能力的培养和理论的实际应用；

(5)注重对学生的思维能力、自学能力和创新意识的培养．

考虑到不同学校、不同专业对高等数学课程内容广度和深度的不同要求，本书做了适当的处理，以适应不同层次、不同专业的需要．

本书难免存在问题，欢迎广大读者批评指正．

编　者

2015.3

目录

第一章

函数、极限与连续

函数是数学的基本概念之一，高等数学以函数为主要研究对象，连续是函数的主要性质．极限概念是微积分的理论基础，微积分中许多概念都要用极限来描述．极限方法是研究函数的基本方法．本章主要介绍函数、极限和连续的概念与性质．

第一节　集合

19 世纪末德国数学家康托尔①创建了集合论．迄今为止，集合论的概念和方法已渗透到数学的各个分支，成为数学的一种语言，集合论本身也发展成为数学的一个内容非常丰富的分支．本节介绍有关集合的基本知识．

一、集合的概念

集合就是具有某种特定性质的对象的全体，简称集．组成一个集合的对象叫作这个集合的**元素**，有时简称**元**．例如，某商店的所有商品构成一个集合，其中的每件商品都是这个集合的一个元素；抛物线 $y=3x^2$ 上的所有点构成一个集合，这条抛物线上的每个点都是这个集合的一个元素．

元素通常用小写的英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示；集合通常用大写的英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示．若 a 是集合 A 的一个元素，则称 a 属于 A，记作 $a\in A$；若 a 不是集合 A 的元素，则称 a 不属于 A，记作 $a\notin A$（或 $a\ \overline{\in} A$）．

由有限个元素构成的集合称为**有限集**；由无限多个元素构成的集合称为**无限集**；不含有任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$．例如，某校的全体学生构成的集合是有限集；平面上所有点构成的集合是无限集；不等式 $x^2+x+1<0$ 的解构成的集合是空集．

集合通常有以下两种表示方法．

列举法　把集合中的元素一一列举出来，写在花括号内．例如，由整式 x^2，$3x+2$，

---

① 康托尔（Cantor G. 1845—1918），德国数学家．

$5y^2-x$，x^2+y^2 构成的集合可表示为 $\{x^2,3x+2,5y^2-x,x^2+y^2\}$；所有正整数构成的集合可表示为 $\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$．用列举法表示集合时要注意元素不重复，不遗漏，元素与元素之间要用逗号分隔，列举元素时可不计先后次序．列举法一般适用于有限集和可数无限集．

描述法 把集合中元素的公共属性描述出来，写在花括号内．这时通常在花括号内先写上这个集合的元素的一般形式，再画一条竖线，在竖线右边写上这个集合的元素的公共属性．例如，具有某种性质 P 的元素 x 的全体所构成的集合 M 可表示为 $M=\{x \mid x$ 具有的性质 $P\}$；由抛物线 $y=3x^2$ 上所有的点构成的集合可以表示为 $\{(x,y) \mid y=3x^2\}$.

只有一个元素的集合，称为**单元素集**．例如，$\{a\}$ 表示只含一个元素 a 的集合．(注意 a 与 $\{a\}$ 的区别)

元素为数的集合称为数集．一些常用的特殊数集通常用特定的字母表示．例如，$\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{R}^+$ 表示正实数集，$\mathbf{Q}^+$ 表示正有理数集，$\mathbf{Z}^+$ 表示正整数集．

二、集合间的关系

若集合 A 的每一个元素都属于集合 B，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supseteq A$(读作 B 包含 A)．显然，任何一个集合是它本身的子集(对于任何一个集合 A，有 $A\subseteq A$)．另外，我们规定：空集是任何集合的子集(对于任何一个集合 A，有 $\varnothing\subseteq A$).

若集合 A 是集合 B 的子集，而且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneqq B$．显然，空集是任何非空集合的真子集．

若集合 A 和集合 B 所包含的元素完全相同，则称集合 A 与 B **相等**，记作 $A=B$．显然有 $A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

例如：

(1) $\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$；

(2) 若 $A=\{x \mid x^2+3x+2=0\}$，$B=\{-1,-2\}$，则 $A=B$.

三、集合的运算

集合有交、并、差三种基本运算．

一个元素 a 若同时属于 A 和 B 两个集合，则称 a 是 A 和 B 的**共同元**．

集合 A 和集合 B 的所有共同元所构成的集合，称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

若 $A\cap B\neq\varnothing$，则称 A 与 B 相交；若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 不相交．

由至少属于集合 A 和 B 之一的一切元素所构成的集合，称为 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素所构成的集合，称为 A 与 B 的**差集**，记作 $A\backslash B$，即

$$A\setminus B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

在研究集合与集合之间的关系时，若这些集合都是某一个集合 U 的子集，则称这个集合 U 为**全集**或**基本集**，称 U 与 A 的差集 $U\setminus A$ 为 A 在 U 中的**余集**或**补集**，简称 A 的余集或补集，记作 $\complement_U A$，简记为 $\complement A$，即

$$\complement_U A=\{x \mid x\in U \text{ 且 } x\notin A\}.$$

例如，在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A=\{x \mid |x|\leqslant 2\}$ 的余集为

$$\complement_{\mathbf{R}} A=\{x \mid x<-2 \text{ 或 } x>2\}.$$

集合的交、并、余的运算满足下列运算律．

(1) 交换律　$A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$；

(2) 结合律　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$，

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

(3) 分配律　$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$，

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

(4) 吸收律　$A\cap\varnothing=\varnothing, A\cup\varnothing=A$；

(5) 幂等律　$A\cap A=A, A\cup A=A$；

(6) 对偶律　$\complement(A\cap B)=\complement A\cup\complement B, \complement(A\cup B)=\complement A\cap\complement B$.

以上这些运算律都可根据集合相等的定义验证，留给读者完成．

四、区间与邻域

区间是常用的实数集．设 a,b 为两个实数，且 $a<b$，数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

数集 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

数集 $\{x \mid a<x\leqslant b\}$ 和 $\{x \mid a\leqslant x<b\}$ 均称为半开区间，分别记作 $(a,b]$ 和 $[a,b)$，即

$$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\},[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\},$$

这里实数 a,b 称为上述各区间的端点．注意到 $a,b\notin(a,b)$，$a,b\in[a,b]$.

以上各区间均称为有限区间，数 $b-a$ 称为区间的长度．有限区间在几何上表示为数轴上的长度有限的线段，此外还有无限区间．引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）和 $-\infty$（读作负无穷大），可以类似地表示无限区间．例如

$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\},[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\},$$

$$(-\infty,a)=\{x \mid x<a\},(-\infty,a]=\{x \mid x\leqslant a\}.$$

特殊地，实数集 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ 也是无限区间．

邻域也是常用的数集．

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ 的邻域，记为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

其中点 a 叫作该邻域的中心,δ 叫作该邻域的半径(见图 1-1).

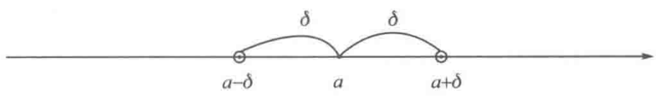


图 1-1

显然有

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta),$$
$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

因为$|x-a|$表示数轴上的点 x 与点 a 之间的距离,所以 $U(a,\delta)$表示与点 a 的距离小于δ 的所有点构成的集合.

若把邻域 $U(a,\delta)$ 的中心 a 去掉,所得到的集合称为点 a 的去心 δ 邻域,记为$\mathring{U}(a,\delta)$,则

$$\mathring{U}(a,\delta)=U(a,\delta)-\{a\},$$

即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

为了研究问题的方便,有时将数集$\{x\mid a-\delta<x<a\}$和$\{x\mid a<x<a+\delta\}$分别称为 a 的去心左δ 邻域和 a 的去心右 δ 邻域,分别记为 $\mathring{U}(a^-,\delta)$和 $\mathring{U}(a^+,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a^-,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a\}=(a-\delta,a),$$
$$\mathring{U}(a^+,\delta)=\{x\mid a<x<x+\delta\}=(a,a+\delta).$$

当不需要特别指明邻域的半径时,常用$U(a)$和 $\mathring{U}(a)$分别表示 a 的某邻域和 a 的某去心邻域.

下面介绍几个常用的数学符号.

“$\forall$”表示“对于任意给定的”或“对于每一个”,它是英文单词 Any 的第一个字母的倒写.“$\exists$”表示“存在”,它是英文单词 Exist 的第一个字母的反写.“max”表示“最大”,“min”表示“最小”.

第二节　函数

一、函数的概念

同一问题中常常出现多个变量,这些变量不是孤立的,而是相互联系、相互依赖的.微积分就是要研究变量之间的确定的依赖关系.变量之间的这种确定的依赖关系,就是函数.

定义 1.2.1　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集,如果$\forall x\in D$,按照某种对应法则 f 都有唯一的 y 值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$. 其中 x 叫作自变量,y 叫作因变量.数集 D 叫作这个函数的定义域,记作 D_f,即 $D_f=D$.

当 x 取数值 $x_0\in D_f$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 此时，称函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义.

当 x 取遍 D_f 的每个值时，对应的函数值的全体所构成的集合称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D_f\}.$$

从函数的定义可以看出，构成函数的二要素是定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的. 例如函数 $y=\sin x$ 与函数 $y=\dfrac{x\sin x}{x}$ 是不同的函数（它们的定义域不同）；函数 $y=\lg x^3$ 与 $y=3\lg x$ 是相同的函数（它们的定义域和对应法则都相同）.

函数的定义域通常根据函数的具体情形来确定，一般有以下两种情形.

(1) 用抽象的解析式表达的函数. 通常约定这种函数的定义域是使解析式有意义的一切实数构成的集合，这种定义域称为函数的自然定义域. 例如，函数 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的定义域是实数集 $\mathbf{R}$，函数 $y=\sqrt{x^2-1}$ 的定义域是区间 $(-\infty,-1]$ 及 $[1,+\infty)$.

(2) 有实际背景的函数. 根据自变量的实际意义来确定函数的定义域. 例如，从地面上高 h 处自由下落的质点，它下落的距离 s 是下落的时间 t 的函数，且有 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$. 设开始下落的时刻 $t=0$，则落地的时刻 $t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$，这个函数的定义域是闭区间 $\left[0,\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\right]$.

在平面直角坐标系中，以自变量 x 为横坐标，与 x 对应的函数值 y 为纵坐标的点构成的集合

$$C=\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D_f\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的图像，如图 1-2 所示. 函数的图像具有直观性，使我们能利用几何方法研究函数的有关特性. 相反，一些几何问题也可借助函数来做理论研究.

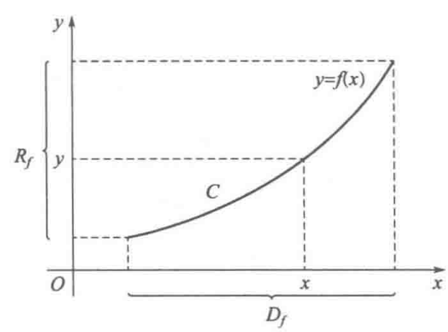


图 1-2

例 1.2.1　常函数 $y=C$.

定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=\{C\}$，它的图像是一条平行于 x 轴的直线（图像略）.

例 1.2.2　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，它的图像如图 1-3 所示.

例 1.2.3　设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$. 把 x 看作变量，则函数 $y=[x]$ 称为取整函数. 它的定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$. 它的图像如图

1-4所示,称为阶梯曲线.

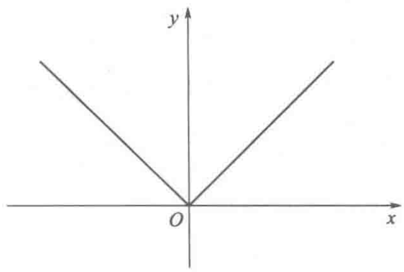


图 1-3

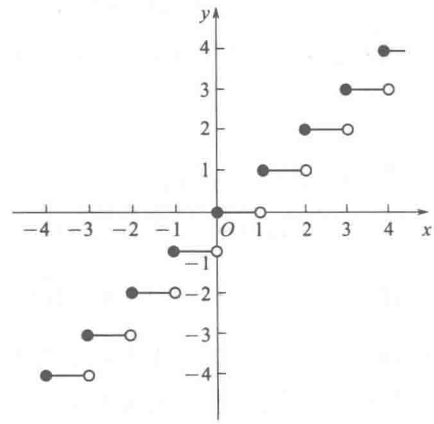


图 1-4

例 1.2.4 符号函数(克朗涅哥[①]函数)

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

定义域 $D_f=\mathbf{R}$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,它的图像如图 1-5 所示,显然有 $|x|=x\operatorname{sgn} x$.

例 1.2.5 函数

$$y=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$$

定义域 $D_f=\mathbf{R}$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,它的图像如图 1-6 所示.

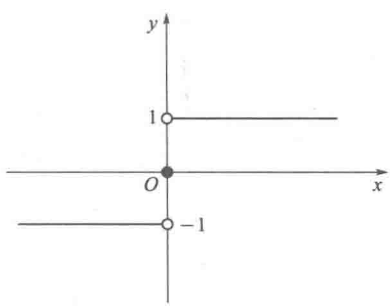


图 1-5

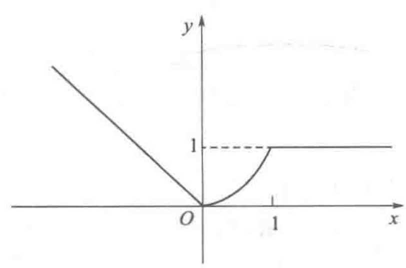


图 1-6

例 1.2.6 狄利克雷[②]函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

---

① 克朗涅哥(Kronecker. 1823—1891),德国数学家.

② 狄利克雷(Dirichlet PGL. 1805—1859),德国数学家.

定义域 $D_f=\mathbf{R}$,值域 $R_f=\{0,1\}$. 无法作出该函数的图像.

关于函数概念的几点说明:

(1) 函数 $y=f(x)$ 中表示对应法则的记号 f 也可改用其他英文字母或希腊字母,如"g","F","φ"等. 相应地,函数可记作 $y=g(x)$,$y=F(x)$,$y=\varphi(x)$等. 有时还直接用因变量的记号来表示函数,即把函数记作 $y=y(x)$. 但在同一问题中,不同的函数要用不同的记号以示区别.

(2) 从例 1.2.2～例 1.2.6 中看到,有时一个函数要用几个式子表示,这种在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数,称为**分段函数**.

(3) 如果自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值总是只有一个,这种函数称为**单值函数**;否则称为**多值函数**. 我们前面遇到的例 1.2.1～例 1.2.6 都是单值函数. 下面举一个多值函数的例子. 设变量 x 和 y 之间的对应法则为 $x^2+y^2=36$,因为 $\forall x\in[-6,6]$,由法则 $x^2+y^2=36$ 可确定出对应的 y 值,而且当 $x\in(-6,6)$时,对应的 y 值有两个,所以 $x^2+y^2=36$ 确定了一个多值函数. 通常多值函数可以在一定的附加条件下转化为单值函数来讨论,这样得到的单值函数称为多值函数的单值分支. 例如,在 $x^2+y^2=36$ 中分别附加条件"$y\geqslant0$"和"$y\leqslant0$",可分别得到这个多值函数的两个单值分支:$y=\sqrt{36-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{36-x^2}$.

以后凡是没有特别说明的函数,都是指单值函数.

(4) 函数的表示方法是多种多样的,常用的有以下三种.

①表格法. 在实际应用中,常将一系列的自变量值与对应的函数值列成表格,如平方表、三角函数表、火车时刻表、银行外汇兑换表等. 这种表示函数的方法称为表格法.

②图像法. 用坐标平面上的曲线来表示函数关系的方法称为图像法. 例如,人在奔跑后心搏率会恢复正常,图 1-7 所示的曲线描绘了某人锻炼后几分钟心搏率与时间这两个变量的对应关系. 在时间的变化范围$\{t\mid 0\leqslant t\leqslant10\}$内每取一个值,在图 1-7 中,就有一个确定的心搏率与之对应.

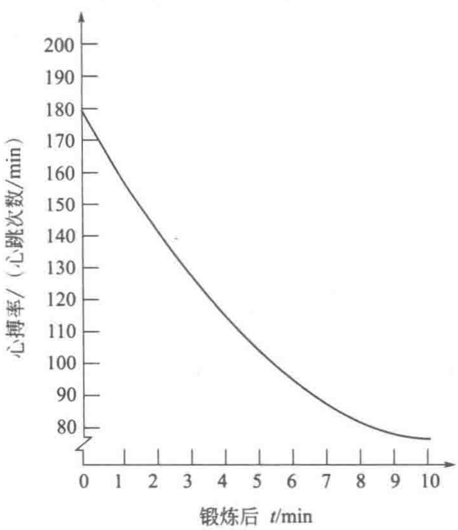


图 1-7

③公式法(也称为解析法). 自变量和因变量之间的关系用数学表达式(又称为解析表达式)来表示的方法,称为公式法(解析法).

前面所述的函数大多数都是用解析式表示的,并且其因变量 y 都能明确地表示成自变量 x 的数学式子 $y=f(x)$,这种函数称为**显函数**,如 $y=x^2+1$. 在今后的学习中,还会遇到因变量 y 不是由自变量 x 直接表示而是用其他形式表示的函数,常用的有下面两种.

(1) 隐函数．这种函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定，例如，$x+2y=5$，$\ln y=\sin(x+y)$ 等．由 $x+2y=5$ 可得 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$，这种情况称为由方程 $x+2y=5$ 所确定的隐函数可以显化，即可化为显函数 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$．但有的隐函数很难显化或无法显化．

(2) 由参数方程 $\begin{cases}x=g(t),\\ y=\varphi(t),\end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$ 所确定的函数．其中 t 为参数，由这个参数方程可以确定一个 y 关于 x 的函数．例如，$\begin{cases}x=t,\\ y=t^3,\end{cases}$ $t\in\mathbf{R}$ 是由参数方程确定的函数，若消去参数 t，得到显函数 $y=x^3$．但有的由参数方程表示的函数消参困难或无法消参．

二、函数的几何特性

1. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称，如果 $\forall x\in D_f$，恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数；

如果 $\forall x\in D_f$，恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数．

奇函数的图像关于原点对称，如图 1-8 所示；偶函数的图像关于 y 轴对称，如图 1-9 所示．

例如，函数 $y=x^n$，当 n 为奇数时为奇函数，当 n 为偶数时为偶函数．这也是奇函数、偶函数名称的由来．

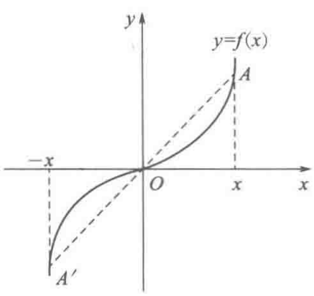


图 1-8

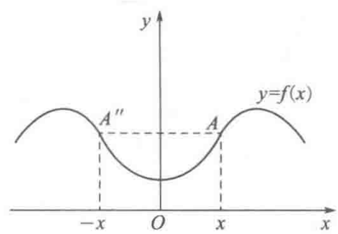


图 1-9

函数 $y=\sin x+\cos x$，$y=2^x$ 既非奇函数，也非偶函数．

狄利克雷函数是偶函数．

2. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f，数集 $X\subseteq D_f$，如果存在数 K，使得 $\forall x\in X$，恒有

$$f(x) \leqslant K,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有**上界**，而 K 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界．如果存在数 k，使得 $\forall x \in X$，恒有

$$f(x) \geqslant k,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有**下界**，而 k 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界．如果存在正数 M，使得 $\forall x \in X$，恒有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**．如果上述正数 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界．也就是说，如果 $\forall M>0$，$\exists x_0 \in X$，使 $|f(x_0)|>M$，那么函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**．

如果函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，那么曲线 $y=f(x)$ 位于直线 $y=K$ 的下方；如果函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，那么曲线 $y=f(x)$ 位于直线 $y=k$ 的上方；如果函数 $f(x)$ 在 X 上有界，那么曲线 $y=f(x)$ 位于直线 $y=\pm M$ 之间．

显然，$f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界．

例如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 有上界无下界，而在 $(0,+\infty)$ 上有下界无上界；函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\arctan x$ 都是其定义域上的有界函数；函数 $y=x^2$，$y=[x]$，$y=x\sin x$ 都是 $(-\infty,+\infty)$ 内的无界函数．

3. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，区间 $I \subseteq D_f$．如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的．图形特点是沿 x 轴正向逐渐上升（见图 1-10）．

如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的．图形特点是沿 x 轴正向逐渐下降（见图 1-11）．

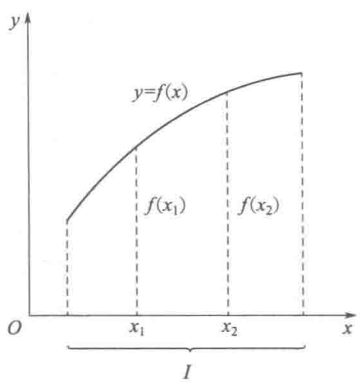


图 1-10

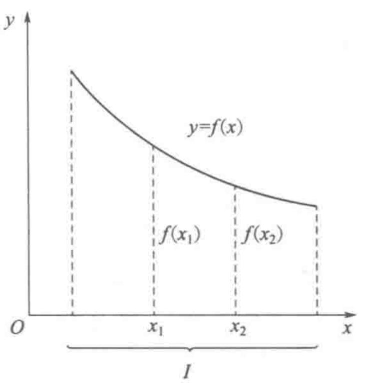


图 1-11

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**．

如果在区间 I 上，函数 $f(x)$ 为单调函数，则称 I 为函数 $f(x)$ 的**单调区间**．

例如,函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的,在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的;$(-\infty,0]$,$[0,+\infty)$ 是它的单调区间,但它在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的(见图 1-12).

函数 $y=x^3$(见图 1-13),$y=e^x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

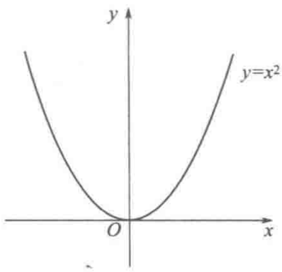


图 1-12

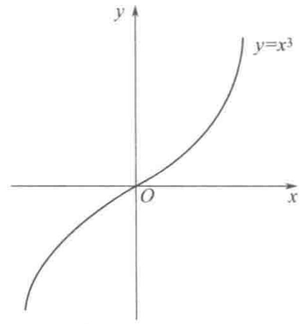


图 1-13

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f,若存在一个非零常数 T,使得 $\forall x\in D_f$,均有 $x\pm T\in D_f$,且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期.

由周期函数的定义容易知道,若 T 是函数 $f(x)$ 的周期,则 kT $(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$ 都是 $f(x)$ 的周期.通常函数的周期是指它的最小正周期.

例如,函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 的周期是 2π;函数 $y=\tan x$,$y=\cot x$,$y=|\sin x|$ 的周期是 π.

值得一提的是,并不是每一个周期函数都有最小正周期.例如,常函数 $y=C$ 是周期函数,任何非零实数 r 都是它的周期;狄利克雷函数也是周期函数,任何非零的有理数 q 都是它的周期,但它们都没有最小正周期.

三、反函数与复合函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f,值域为 R_f.如果 $\forall y\in R_f$,$\exists x\in D_f$,使 $y=f(x)$,那么关系式 $y=f(x)$ 就确定了一个新的函数.在这个新函数中,y 是自变量,x 是因变量.我们将这个由 $y=f(x)$ 所确定的 x 关于 y 的新函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$.相对于反函数而言,原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

由反函数的定义易知,反函数的定义域是直接函数的值域,而反函数的值域是直接函数的定义域.

注意,这里反函数的"反"表示 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 对应法则相反.从几何意义上看,$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图像在同一个坐标系下理应为同一条曲线.例如,$y=x$ 与反函数

$x=y$的图像为同一条直线(第一、三象限的角平分线). 但是习惯上用 x 表示自变量,y 表示因变量,所以将 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$经常记作 $y=f^{-1}(x)$. 这样一来,直接函数 $y=f(x)$与反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像在同一坐标系下就不是同一条曲线了,它们关于直线 $y=x$ 对称(见图 1-14).

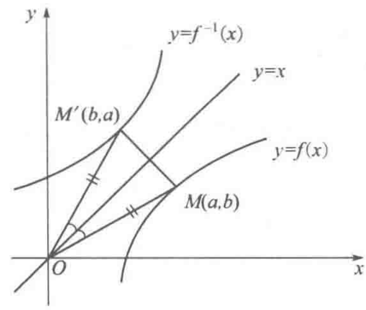


图 1-14

例 1.2.7　求函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$的反函数.

解　由 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$可得 $e^{2x}-2ye^x-1=0$,

解得

$$e^x=y\pm\sqrt{1+y^2}.$$

因 $e^x>0$,只能取 $e^x=y+\sqrt{1+y^2}$. 等号两边取对数,得

$$x=\ln(y+\sqrt{1+y^2}),$$

故函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$的反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),x\in\mathbf{R}$.

值得注意的是,并非所有函数都有反函数. 例如,函数 $y=x^2$,在$(-\infty,+\infty)$内不存在反函数. 这是因为 $\forall y\in(0,+\infty)$,有两个 x 值,即 $x=\pm\sqrt{y}$与之对应. 可以证明,单调函数必存在单调的反函数.

2. 复合函数

定义 1.2.2　设函数 $y=f(u),u=g(x)$,若

$$R_g\cap D_f\neq\varnothing,$$

则称函数 $y=f[g(x)]$是由函数 $y=f(u)$与 $u=g(x)$复合而成的复合函数,u 称作中间变量. 若将复合函数 $y=f[g(x)]$的定义域记作 D,则 $D=\{x\mid g(x)\in D_f,x\in D_g\}$.

值得注意的是,定义中的条件"$R_g\cap D_f\neq\varnothing$"是很重要的,若条件不满足,即 R_g 与 D_f 不相交,则两个函数 $y=f(u)$与 $u=g(x)$不能构成复合函数. 例如,$y=f(u)=\arcsin u$,$u=g(x)=x^2+2$,其中 $D_f=[-1,1]$,$R_g=[2,+\infty)$. 因为 $R_g\cap D_f=\varnothing$,故 $y=\arcsin u$ 与$u=x^2+2$ 不能构成复合函数.

类似地,两个以上的函数也可以构成复合函数,只要它们顺次满足复合的条件(后一个函数的值域与前一个函数的定义域相交). 例如,函数 $y=e^{\sqrt{1+x^2}}$可以看成由 $y=e^u,u=\sqrt{v}$,$v=x^2+1$ 三个函数复合而成的,这里 u,v 都是中间变量.

例 1.2.8　设 $f(x)=\sin x,g(x)=\lg x$,求 $f[g(x)],g[f(x)]$.

解　(1) $D_f=\mathbf{R},R_g=\mathbf{R},R_g\cap D_f=\mathbf{R}\neq\varnothing$,两个函数能构成复合函数,

$$f[g(x)]=\sin(\lg x),$$

其定义域为 $D=D_g=(0,+\infty)$.

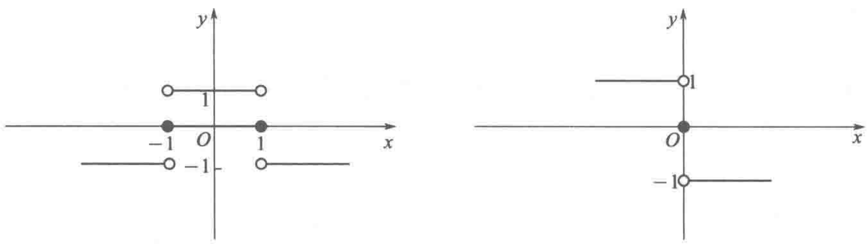
(2) $D_g=(0,+\infty),R_f=[-1,1],R_f\cap D_g=(0,1]\neq\varnothing$,两个函数能构成复合函数,

$$g[f(x)]=\lg(\sin x),$$

其定义域为 $D=(2n\pi,(2n+1)\pi),n\in\mathbf{Z}$.

例 1.2.9 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ 其图像如图 1-15(a)所示．$g(x)=\mathrm{e}^x$，试求 $f[g(x)]$.

解 $f[g(x)]=f(\mathrm{e}^x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0,\end{cases}$ 其图像如图 1-15(b)所示．



(a) $y=f(x)$　　(b) $y=f(\mathrm{e}^x)$

图 1-15

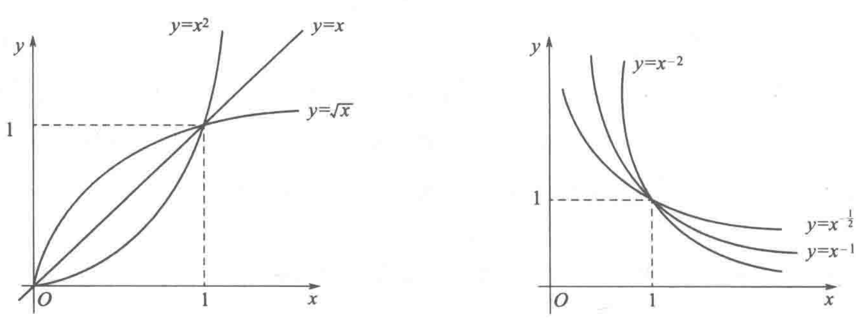
四、基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，统称为基本初等函数．下面简要地介绍它们的性质．

1. 幂函数

$$y=x^u\ (u\in\mathbf{R}\ \text{是常数}).$$

它的定义域与 u 有关，但无论 u 为何值，幂函数在 $(0,+\infty)$ 内总是有定义的，且图像都经过 $(1,1)$ 点．图 1-16(a)、(b)分别列出了 $u>0$ 和 $u<0$ 时几个特殊幂函数的图像．



(a)　　(b)

图 1-16