图的分解与完备残差图

段辉明 杨世辉 曾 波 著

科学出版社

图的分解与完备残差图

段辉明　杨世辉　曾　波　著

本书获得以下基金项目资助:
国家自然科学基金项目（71271226）
国家自然科学基金项目（61472056）
教育部人文社会科学研究一般项目（14YJAZH033）
中国博士后科学基金特别资助项目（2015T80975）
电子商务及供应链系统重庆市重点实验室开放基金项目（No. 1456024）
重庆市自然科学基金（cstc2015jcy jA00034）
重庆市教育委员会科学技术研究（KJ1500403）
重庆市自然科学基金（cstc2015jcy jA00015）
重庆邮电大学出版基金

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书共 10 章，主要以图论知识为基础，以同构的理论、集合论、数论知识为依托，对图的分解和完备残差图的性质进行比较深入的研究. 其主要内容包括以下五个方面：完全等部图的同构因子分解、完备三分图的同构因子分解、图的笛卡儿乘积的 Hamilton 圈分解、完备残差图的性质的研究，以及某些特殊残差图的性质研究.

本书主要适合图论的科研人员以及组合优化、计算机科学、信息安全等相关领域研究人员和硕士、博士研究生参阅.

图书在版编目(CIP)数据

图的分解与完备残差图/段辉明，杨世辉，曾波著. —北京：科学出版社，2015.12

ISBN 978-7-03-046964-9

Ⅰ. 图… Ⅱ. ①段…②杨…③曾… Ⅲ. ①图论-研究 Ⅳ. ①O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 312370 号

责任编辑：李 欣 肖 雷／责任校对：钟 洋
责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 1 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2016 年 1 月第一次印刷 印张：15 1/2
字数：304 000

定价：88.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

图的同构是图论中的最基本的关系, 同构问题一直受到数学界与工程技术界的关注. 图的分解与完备残差图是图的同构理论的应用. 图的因子分解在研究图的结构性质中起重要作用, 在对策、组合设计、组合最优化以及网络优化等方面有广泛的应用. 完备残差图研究一个图, 其任意点的闭邻域与去掉 K_n 后同构时, 这个图的性质与结构, 以及相继去掉 m 次之后与 K_n 同构时的性质与结构, 是图论的一个重要课题. 对于图的分解和完备残差图, 经过 30 年的发展, 取得了较好的成果. 这些成果不但丰富了图论的知识, 而且对组合优化、网络优化、编码理论、计算机科学等都有广泛的应用. 由于对图的因子分解以及完备残差图的性质研究还有许多困难, 有许多理论需要进一步丰富和完善. 本书主要以图论知识为基础, 同构的理论、集合论和数论知识为依托, 对图的分解和完备残差图的性质进行了比较深入的研究, 其主要内容包括以下几个方面.

1. 完全等部多分图的同构因子分解是美国数学家 F.Harary 以及澳大利亚 R.W. Robinson 和 N.C.Wormald 于 1977 年在组合理论的国际会议上提出的猜想, 本书介绍了两种不同的证明方法, 其中一种是中国科学院博士生导师王建方在文献 [1] 中证明的, 另一种是本书作者杨世辉对此猜想给出的独立性证明.

2. 完全等部多分图的同构因子分解是美国数学家 F.Harary 以及澳大利亚 R.W. Robinson 和 N.C.Wormald 于 1977 年在组合理论的国际会议上提出的猜想. 本书对此猜想的证明有两种不同的方法, 其中一种是中国科学院博士生导师王建方在文献 [1] 中的证明的, 另一种方法是本书作者杨世辉对此猜想的独立性证明.

3. 圈的笛卡儿乘积的 Hamilton 圈的分解是数学家 A.Kötzig 提出的猜想之一. 本书主要是介绍两个圈、三个圈的笛卡儿乘积的 Hamilton 圈的分解以及任意圈的笛卡儿乘积的 Hamilton 圈分解.

4. 残差图是由数学家 Erdös, F.Harary, M.Klawe 等提出的概念, 他们研究了 K_n-残差图的一些性质, 并对连通的 m-K_n-残差图提出一些猜想和重要结论. 研究残差图的最小阶和最小图在网络优化和组合优化中有重要的作用. 本书首先研究完备残差图的一般性质, 包括最大独立集、奇阶完备残差图的最小阶和极图、次最小阶和极图等重要性质. 其次是对连通的完备 m-K_n-残差图的猜想进行研究, 取得了一定的进展, 离最终完全弄清楚结构与性质还有一段艰辛的路程.

5. 残差图的概念可以推广到超平面上, 本书研究 m-$K_n \times K_s$-残差图的重要性质, 拓展残差图的研究范围, 并引进超平面残差图 $HPK(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ 的概念, 研

究 $HPK(n_1, n_2, \cdots, n_r)$-残差图.

6. 图的合成是图的重要运算之一, 本书研究 F-残差图到 $F[K_t]$-残差图的运算, 特别研究 $F = K_n \times K_s$ 和 $F = HPK(n_1, n_2, \cdots, n_r)$, 并得到此类残差图的最小阶和相应极图.

全书共 10 章, 其中第 1, 2, 5–9 章由段辉明编写, 第 3, 4, 10 章由杨世辉和曾波编写.

本书作者段辉明一直从事图论组合数学的研究工作, 很多成果都是在杨世辉教授的悉心指导下完成的. 杨世辉教授多年来一直从事图论中同构因子分解和完备残差图的研究, 并取得了很多成果. 杨世辉教授渊博的知识、严谨的治学态度、平易近人的处事风格, 时刻潜移默化地教诲着学生, 是学生今后人生最宝贵的精神财富.

图的因子分解与完备残差图是图的同构理论的应用, 对于因子分解、残差图的有关性质, 还有很多问题需要解决, 如完全等部图的同构因子分解以及完备三分图的同构因子分解与组合优化和网络优化的具体的联系, Hamilton 圈分解的具体应用等都值得我们去思考. 同时关于连通的完备残差图的猜想尚未完全解决, $K_m \times K_n$ 以及超平面图是否有同构因子分解等还有很多需要亟待解决的问题. 希望感兴趣的同行加入因子分解与完备残差图的研究中, 并同时希望能把相关的理论应用到组合优化、计算机科学、信息安全等重要领域.

书中不妥之处在所难免, 恳请读者批评指正.

目　录

第1章 绪 论

1.1 问题的提出

自然界和人类社会中的大量事物以及事物之间的关系, 常可用图形来描述. 对图的基本概念和性质、图的理论及其应用的研究, 构成图论的主要内容. 图论通过点线组成的图形, 构成模拟物理系统的数学模型, 并根据图的性质进行分析, 提供研究各种系统的方法. 任何一个包含了某种二元关系的系统都可以用图论的方法分析, 而且它往往还有形象直观的特点. 图论中应用的线形图与几何图不同, 每条边都可以有方向权值, 用以研究系统特性, 进行决策分析, 确定最优设计, 调整经济管理.

图的同构问题一直受到数学界与工程技术界的关注, 从理论上讲, 一般认为该问题属于 NP-完全问题, 从应用上讲, 图论的应用非常广泛, 在化学、运筹学、计算机科学、电子学、网路理论、信息安全等诸多领域都有应用. 图的同构是图论中最基本的关系, 判断两个给定的图是否同构是非常困难的. 图的分解和完备残差图是同构理论的应用, 其中图的因子分解在研究图的结构性质中起着重要作用, 而且有着重要的实际意义. 完全等部图的因子分解和完备三分图的同构因子分解是由著名的数学家 F.Harary, R.W.Robinson 以及 N.C.Wormald 提出的重要猜想, 这些猜想的解决不但丰富了图论知识, 而且还为网络优化、组合优化等信息科学类提供有力的理论依据, 其中 Hamilton 圈分解对遗传算法和组合设计都有重要的作用. 残差图是由数学家 P.Erdös, F.Harary, M.Klawe 等提出的, 残差图对于组合优化、网络优化、信息安全等方面都有重要作用. 由 Erdös 等提出的关于完备残差图的猜想和结论, 主要是研究图形的最小阶和最小图. 研究其图形的最小性和唯一性在组合优化、网络优化等方面有着重要的意义.

然而, 对于图的同构是一个非常困难的问题, 图的因子分解和完备残差图的性质还有待丰富和完善, 就图的分解和完备残差图而言, 还存在如下问题亟待解决.

(1) 关于数学家 Harary, Robinson 以及 Wormald 提出的关于等部多分图的同构因子分解的猜想已经解决, 但是有很多问题值得去探讨, 理论上等部多分图满足同构因子分解的条件, 而其他关于等部多分图的同构因子分解, 如几个等部多分图的笛卡儿乘积是否可以同构因子分解, 等部多分图的合成图是否可以同构因子分解等; 在应用上, 等部多分图的同构因子分解, 怎样应用到组合优化、网络优化以及算法中去.

(2) 完全三分图的同构因子分解是一个比较困难的问题, 目前已经完全解决了 Harary, Klawe 等提出的关于完全三分图的猜想, 但杨世辉教授在证明时用的置换以及三色图的思想, 是否可以用到其他图的同构因子分解中; 其次是完全二分图、三分图的笛卡儿乘积以及合成满足什么样的条件可以同构因子分解, 以及完全图的同构因子分解在优化和计算机科学的应用.

(3) Hamilton 分解广泛应用于电路分析、控制系统、随机最优控制等. Hamilton 圈分解应用于棋盘的马步问题, 也可以帮助计算机辅助分析等. 关于数学家 Kötzig 提出的关于两个圈、三个圈以及 n 个圈笛卡儿乘积的 Hamilton 圈分解的猜想已经解决. 但对于圈的合成的 Hamilton 圈分解, 还尚未解决, 关于 Hamilton 圈分解的应用也需要较大程度上的推广.

(4) 残差图的概念是由数学家 Erdös, Harary 和 Klawe 引入的, 由于研究的是图形的最小阶和最小图的问题, 这与组合优化、网络优化有着密切的关系, 所以研究残差图的性质是很必要的. 目前对于 Erdös 等提出的关于连通的 m-K_n-残差图的猜想和结论只解决了很少一部分的 m 和 n 值的问题, 还有很多问题都未解决. 其次残差图是重要的图形, 因此研究残差图的性质也十分重要. 本书主要研究残差图的最小阶、次最小阶和构造极图, 以及超平面上的残差图的概念的推广和性质的研究. 关于超平面的残差图以及图的合成、图的笛卡儿乘积的残差图的性质还有很多未解决的问题.

1.2　研究目的和意义

(1) 图的同构是图论的基本概念, 但对于图的同构因子分解的理论意义和实际意义是不言而喻的. 图的因子分解在研究图的结构性质中起着重要的作用, 并广泛应用于组合优化、网络优化、信息安全、计算机科学、生物等领域中. 完全等部多分图、完全二分图、完全三分图是图论中的重要的图形, 研究同构因子分解不但从理论上丰富了图的因子分解的知识, 而且为因子分解应用方便提供理论的基础.

(2) Hamilton 路、圈等是图论的重要内容之一, 也广泛应用于电路分析、生物以及网络优化、组合优化等. 研究圈的笛卡儿乘积的 Hamilton 圈分解, 可以让更多研究者了解 Hamilton 圈分解的理论基础, 同时可以把理论的精髓应用到其他实际应用中来, 也丰富了图论关于 Hamilton 圈的知识, 使得在 Hamilton 圈方面有更坚实的理论基础.

(3) 残差图主要研究的是一个图去掉点和相邻的边的图形和某个特定的图同构的性质, 残差图的最小阶和极图的研究与研究组合优化、决策以及网络优化等提供重要的理论依据. 同时研究残差图本身的性质主要是为了解决由数学家 Erdös, Harary 和 Klawe 提出的关于完备残差图的猜想, 这些问题的解决丰富了图论在残

差图方面的理论基础.

1.3 国内外研究现状

J.Petersen 在文献 [2] 中引入图的因子分解的概念, 证明了一个图能 2-因子分解的充分必要条件是该图为偶正则的, 并由此给出了一类 Diophanine 方程的基础解. 从此, 图的因子理论一直为人们所重视, 成为图论研究中最活跃的课题之一. 著名匈牙利数学家 L.Lovasz 在文献[3]中提到图论中有些分支的中心结构定理形成了图论研究的骨干时, 把因子和连通作为两个例子特别地提出来. 图的因子分解在研究图的结构性质中起了重要作用, 并且广泛应用于对策、组合设计、组合优化、网络优化、生物等领域中. 图的同构是图论中的图的最基本的关系, 有如拓扑学中的同胚、初等几何中的全同. 然而同构的问题, 即判断两个给定图是否同构又是非常困难的. M.R.Garey 和 D.S.Johnson 在文献 [4] 中列举了 12 个未解决的问题, 其第一个就是图的同构问题. 这个问题的重要性和困难性不仅为图论界, 而且为整个数学界所公认. 图的同构因子分解的理论意义和实际意义是很重要的. 图的分解和残差图是图的同构的应用, 因此研究其图的分解以及残差图的性质也是相当困难的. 下面是本书研究的具体内容的研究现状.

(1) 完全等部图的同构因子分解的研究现状

图的同构因子分解有重要的理论意义和实际意义, 同时这个问题又是非常困难的, 因为同构问题本身就很困难. Chung 和 Graham 在文献 [5] 中说到在算法的观点中, 同构问题即使是树分为两个同构的子图, 也是 NP-完全的. 对于完全图 K_n 的同构因子的分解 G.Ringel 在文献 [6]、H.Sachs 在文献 [7] 中分别独立地证明了可分条件是 K_n 能分解 2 个同构因子的充分条件. Harary, Robinson 和 Wormald 在文献 [8] 中证明了可分性条件对完全偶图是充分的, 同时在文献 [9]中完整地解决了完全图的同构因子分解问题, 得到如下结果: $t|K_n$ 的充分必要条件为$t\left|\dfrac{n(n-1)}{2}\right.$, 在文献 [10] 中还研究了完全等部图的同构因子分解, 得到了一些有趣的结果, 并且提出了下述猜想: 对所有完全等部图, 可分条件意味着存在一个同构的因子分解. 王建方在文献 [1] 中证明了这个猜想, 同时 S.J.Quinn[11] 和杨世辉 [12] 也给出了证明.

(2) 完备三分图的同构因子分解的研究现状

Harary, Robinson 和 Wormald 在文献 [9] 中, 对于完备三分图 $K(m, n, s)$, 当 $t = 2, 4$ 时证明了可分性条件 $t|mn + ms + ns$ 是 $t|K(m, n, s)$ 的充分性条件. 并指出当 t 为奇数时, 可分性条件不一定是充分的. 例如, $t > 1$ 为奇数, 当 $m \geqslant t(t + 1)$ 时, 由可分性条件 $t|2m + 1$ 不能得到 $t|K_{(1,1,m)}$, 他们猜测当 t 为偶数时, 如果 $t|mn + ms + ns$, 则 $t|K(m, n, s)$. Quinn 在文献 [11] 中证明了当 $t = 6$ 时, 可分性条

件是充分的. 杨世辉在文献 [13] 中用一种新的方法证明了当 $t=6$ 时, 可分性条件是充分的. 同时他在文献 [14] 中证明当 $t=2^k$ 时, 由于当 $t>1$ 为奇数、$m \geqslant t(t+1)$ 时 $t|2m+1$, 但 $K(1,1m)$ 不是 t 可分的, 所以对于奇数 t 和完备三分图 $K(m,m,n)$, 可分性条件不一定是充分性条件. 段辉明在文献 [15] 中讨论了当 $t=9\times 2^k$ 时的可分性条件. 同时杨世辉在文献 [13] 中利用与前面不同的方法, 引进特殊置换, 利用三色图形的性质证明了 Harary, Robinson 和 Wormald 在文献 [9] 中提出关于完备三分图的同构因子分解的猜想.

(3) Hamilton 圈分解的研究现状

著名数学家 Kötzig 在文献 [16] 中, 研究了 $C_m \times C_n$ 有两条 Hamilton 圈的问题, 并得到 $C_m \times C_n$ 是两条边不重 Hamilton 圈的并, 同时提出 $C_m \times C_n \times C_r$ 可否分解成三条不重 Hamilton 圈, 此猜想已被 M.F.Fregger 在文献 [17] 中证明. 同时连广昌在文献 [18] 中把 Kötzig 在文献 [17] 中的圈推广到 n 个圈的笛卡儿乘积, 并求出 Hamilton 圈分解. J.C.Bermond 在文献 [19] 中的猜想 1.15 中提到两个圈的合成 $C_m[C_n]$ 图的 Hamilton 圈分解, 文献 [20]—[21] 证明了此猜想的正确性.

(4) 完备残差图的研究现状

残差图的概念在文献 [22] 中由 Erdös, Harary 和 Klawe 引入的, 他们研究了完备残差图, 对于任意正整数 m 和 n, 证明了 $(m+1)K_n$ 是唯一的具有最小阶 $(m+1)n$ 的 m-K_n-残差图, 同时证明了 C_5 是唯一的具有最小阶 5 的连通的 K_2-残差图. 当 $1<n\neq 2$, 连通的 K_n-残差图的最小阶 $2(n+1)$; 当 $n\neq 2,3,4$ 时, $K_{n+1}\times K_2$ 是唯一的具有最小阶的连通的 K_n-残差图. 对于 m-K_n-残差图他们提出如下两个猜想 [22].

猜想 1 当 $n\neq 2$ 时, 连通残差图的 m-K_n-最小阶为 $\min\{2n(m+1),(n+m)(m+1)\}$.

猜想 2 当 n 充分大时, 有唯一的具有最小阶 m-K_n-残差图.

近几年对于残差图的研究国内外研究学者也异常活跃, 其中对于 Erdös, Harary, Klawe 等在一类重要的 m-K_n-残差图的猜想和结论也有了进展, 廖江东、杨世辉等在文献 [23]—[26] 中研究了 $m=2,3$, 以及 $m\geqslant 2n+1$ 的部分 n 值的残差图. 段辉明等在文献 [27] 中研究了 $m=3, n=2$ 的部分残差图. 杨世辉、段辉明在文献 [28]—[29] 研究了完备奇阶和次最小阶的残差图的性质, 他们也在文献 [30]—[35] 中研究了超平面残差图以及图与图的合成和笛卡儿乘积的残差图. 在文献 [36]—[39] 研究了残差图的应用.

1.4 主要研究内容

本书以图的同构为主线, 围绕着图的同构因子分解、图的 Hamilton 圈分解, 以

及完备残差图和超平面残差图展开相关研究, 重点介绍完全等部图、完备三分图、圈的笛卡儿乘积的 Hamilton 圈分解, 以及完备残差图的性质、超平面残差图的性质、图与图的合成残差图的性质等内容.

本书共 10 章, 其中第 1 章是绪论, 第 2 章是相关的预备知识, 第 10 章是结论与展望. 其余 7 章为本书的主要研究内容, 下面介绍这 7 章的主要研究内容.

第一部分 (对应本书第 3 章, 完全等部图的同构因子分解). 本章首先介绍完全等部多分图的概念, 以及完全等部多分图同构因子的猜想. 对于该猜想的证明介绍两种不同的方法: 一种是王建方教授解决此猜想的方法; 另一种是杨世辉教授解决此猜想的方法.

第二部分 (对应本书第 4 章, 完全三分图的同构因子分解). 本章先介绍关于完全三分图的同构因子分解的猜想以及相关的内容. 然后介绍 $t = 6, 18$, 以及 $t = 2^t$ 的完全三分图的同构因子分解. 最后介绍杨世辉教授引进特殊的置换和三色图的性质解决的整个猜想的证明.

第三部分 (对应本书第 5 章, 圈的 Hamilton 圈分解). 本章主要介绍圈的 Hamilton 圈分解的猜想, 以及两个圈、三个圈的 Hamilton 圈分解, 最后介绍 n 个圈的笛卡儿乘积的 Hamilton 圈分解的笛卡儿乘积的 Hamilton 圈分解.

第四部分 (对应本书第 6 章, 完备残差图的重要性质). 本章主要介绍一般的残差图的关于独立集的几个重要性质. 然后介绍完备残差图的最小阶和构造相关极图. 最后介绍完备残差图的次最小阶的性质和构造极图.

第五部分 (对应本书第 7 章, 连通的 m-K_n- 残差图). 本章主要研究由 P. Erdös, F. Harary 和 M. Klawe 提出的关于 m-K_n-残差图的猜想. 主要研究了 K_n- 残差图的性质. 主要研究部分的 m 和 n 的值, 当 $n = 2, m = 2, m = 3$ 以及 $m > 2n - 3$ 时, m-K_n-残差图的重要性质.

第六部分 (对应本书第 8 章, 超平面残差图). 本章主要把残差图的概念推广到超平面上, 两个完备图的笛卡儿乘积是超平面残差图定义的特殊图形. 首先介绍 m- $K_n \times K_s$- 残差图的最小阶和极图, 其次介绍 3 维超平面残差图的最小阶和极图, 最后介绍任意维的超平面残差图的最小阶和极图.

第七部分 (对应本书第 9 章, 图的合成残差图). 本章首先介绍一部的图和完备图的合成残差图的基本性质, 其次举例说明超平面残差图和完备图的合成的最小阶和极图的性质.

1.5 本章小结

本章主要介绍本书研究课题的研究目的、研究现状、研究意义.

第2章 预备知识

2.1 关于图的基础知识

定义 2.1.1 一个图 G 定义为一个有序对 (V,E), 记为 $G=(V,E)$, 其中

(1) V 是一个非空集合, 其中的元素称为顶点;

(2) $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是无序集合, 其元素称为边, 是 V 的无序对, 其元素可在 E 中出现不止一次. 重复出现的元素称为重边. 其中图 G 中顶点的个数叫做阶. 端点重合为一点的边叫做环; 没有环及多重边的图叫做简单图. 若 $e=(u,v)\in E$, 称 u 和 v 为 e 的端点.

定义 2.1.2 每一对不同的顶点均有一条边相联的简单图, 称为完全图. n 阶完全图记为 K_n.

定义 2.1.3 设 V_1 和 V_2 是 G 的顶点子集, 使得

$$V_1\cup V_2=V(G),\quad V_1\cap V_2=\varnothing,$$

且 G 的每一条边的一个端点在 V_1 中, 另一个端点在 V_2 中, 则称 G 为二部图. 如果 V_1 中每一个顶点与 V_2 中的每一个顶点都邻接, 则称为完全二部图.

定义 2.1.4 设图 $G=(V,E)$, $u\in V=V(G)$, 集合 $N(u)=\{x|x\in V(G),x$ 与 u 邻接 $\}$ 与 $N^*(u)=\{u\}\cup N(u)$ 分别叫做顶点 u 的邻域和闭邻域.

定义 2.1.5 对于 $u\in V(G)$, 定义 $G_u=G-N(u)$, 其中 $N(u)$ 是 u 的闭邻域.

定义 2.1.6 若 $F\subset G$, 定义 F 在 G 中的度:

$$d_G(F)=\sum_{x\in F}d_G(x)-\sum_{x\in F}d_F(x).$$

定义 2.1.7 如果 $G=\bigcup\limits_{i=1}^{m}G_i$, 这里 G_i 是 G 的子图, 且 $G_i\cong F,V(G_i)\cap V(G_j)=\varnothing$, G_i 与 G_j 不邻接 $(i,j=1,2,\cdots,m,i\neq j)$, 则 G 可以记为 $G\cong mF$.

定义 2.1.8 假设 $G=(V,E)$ 是简单图, 记

$$E=E(G),\quad V=V(G),\quad \nu(G)=|V|$$

为 G 的阶. 如果 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_k\}\subset V$ 是 $V=V(G)$ 的非空集合, U 的导出子图记为 $\langle U\rangle=\langle u_1,u_2,\cdots,u_k\rangle$, 或记为 $G[U]$, 特别地, 可以记 $G=\langle V\rangle=\langle v_1,v_2,\cdots,v_n\rangle$, 这里 $V=V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$.

注 关于图的定义、记号和相应的基本知识遵从关于图论的相关教材, 下面给出本书中常常采用, 而在其他教科书中不常见的一些术语与记号.

定义 2.1.9 若 $v \in V = V(G)$, 可以说是点 v 属于图 G, 也记为 $v \in G$. 若 $v \in H$, H 是 G 的子图, 可记为 $H \subset G$. v 在 H 中的闭邻域记为

$$N_H(v) = \{x \in H | x = v, \text{ 或 } x \text{ 与 } v \text{ 是邻接的}\},$$

$N_G(v)$ 简记为 $N(v)$, 如果 $F \subset G, F$ 邻域可以记为

$$N(F) = N_G(F) = \bigcup_{v \in F} (N(v)).$$

定义 2.1.10 设 $X, Y \subset V(G)$, $X \cap Y = \varnothing$, 如果存在 $x \in X$ 和 $y \in Y$, x 与 y 邻接, 称 X 与 Y 邻接. 否则, 称 X 与 Y 不邻接. 如果对于任意的 $x \in X$ 和 $y \in Y$, x 与 y 邻接, 称 X 与 Y 完全邻接.

定义 2.1.11 H 称为 G 的子图, 记为 $H \subseteq G$, 如果 $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, 且 H 中边的重数不超过 G 中对应的重数.

定义 2.1.12 设 $G = (V, E)$, 满足条件 $V(H) = V(G)$ 与 $E(H) \subseteq E(G)$ 的真子图, H 叫做 G 的生成子图.

定义 2.1.13 图 G 的顶点集合 $V(G)$ 分成子集 V_1 和 V_2 ($V_1 \cup V_2 = V(G)$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$) 的分划 (V_1, V_2), 称为 G 的二分划.

定义 2.1.14 设有两个图 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$, 它们的顶点集间有一一对应关系, 使得边之间有如下的关系: 设 $u_1 \leftrightarrow u_2$, $v_1 \leftrightarrow v_2$, $u_1, v_1 \in V_1$, $u_2, v_2 \in V_2$. 如果 $(u_1, v_1) \in E_1$, 那么 $(u_2, v_2) \in E_2$, 而且 (u_1, v_1) 的重数与 (u_2, v_2) 的重数相同, 这种对应关系叫做同构. 记为 $G_1 \cong G_2$.

由此可知, 两个图有相同的顶点数或相同的边数是同构的必要条件.

2.2 图的运算

定义 2.2.1 设 G_1 和 G_2 都是 G 的子图, 则

G_1 和 G_2 的并, 记为 $G_1 \cup G_2$: 仅由 G_1 和 G_2 中所有边组成的图.

G_1 和 G_2 的交, 记为 $G_1 \cap G_2$: 仅由 G_1 和 G_2 的公共边组成的图.

G_1 和 G_2 的差, 记为 $G_1 - G_2$: 仅由 G_1 中去掉 G_2 中的边组成的图.

定义 2.2.2 设 G_1 和 G_2 是任意两个无向图, G_1 和 G_2 的笛卡儿乘积为图 $G = G_1 \times G_2$, 其中图 G 满足:

$$V(G) = V(G_1) \times V(G_2),$$

G 中的两个顶点 $\langle a,b\rangle$ 和 $\langle c,d\rangle$ 是邻接的当且仅当 $a=c$ 且 $(b,d)\in E(G_2)$, 或者 $b=d$ 且 $(a,c)\in E(G_1)$.

定义 2.2.3　设图 $G_1=(V_1,E_1)$, $G_2=(V_2,E_2)$, G_1 和 G_2 的合成记为 $G_1[G_2]$, 定义为

$$V_1\times V_2=\{x=(x_1,x_2)|x_1\in V_1,x_2\in V_2\},$$

两个顶点 $u=\{u_1,u_2\}$ 和 $v=\{v_1,v_2\}$ 是相邻的, 当且仅当 u_1 与 v_1 在 G_1 相邻, 或者 $u_1=v_1$, u_2 与 v_2 在 G_2 中相邻.

定义 2.2.4　设图 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$ 不相交, 即 $V_1\cap V_2=\varnothing$, 定义 G_1 与 G_2 的联 $G=G_1+G_2$, 即为

$$V(G)=V_1\cup V_2,\quad E(G)=E_1\cup E_2\cup E(K(V_1,V_2)),$$

这里的 $K(V_1,V_2)$ 是指以 V_1,V_2 为独立点集的完备二部图.

2.3 本 章 小 结

本章主要介绍了本书所用到的图论的基本知识, 介绍图的边、点、阶、邻域等定义, 以及图的同构, 图的交、并、和、差、笛卡儿乘积、合成等运算.

第 3 章　完全等部图的同构因子分解

3.1　图的因子分解概述

Petersen 在文献 [2] 中引入图的因子分解的概念, 证明了一个图能 2- 因子分解的充分必要条件是该图为偶正则的, 并由此给出了一类 Diophanine 方程的基础解. 从此, 图的因子理论一直为人们所重视, 成为图论研究中最活跃的课题之一. 图的因子分解在研究图的结构性质中起着重要作用, 并且有重要的实际意义.

图 G 的一个支撑子图 H 被称为 G 的一个因子. 若 H 为 α-正则的, 则称它为 α-因子. 一个图 $G=(V,E)$ 的边集 E 的一个分划 $\{E_1,E_2,\cdots,E_t\}$ 被称为图 G 的一个因子分解. 若每个因子 (V,E_i) 都是 α-正则的, 则称为 α-因子分解.

图 $G=(V,E)$ 的边集 E 的一个分划 $\{E_1,\cdots,E_t\}$ 叫做 G 的同构因子分解, 如果 E_j 张成的子图 $G_j=(V,E_j)$ 彼此同构, 子图 G_j 叫做 G 的 t 分因子, 记为 $\dfrac{G}{t}$. $\{G_1,\cdots,G_t\}$ 叫做 t 个同构因子. 如果 G 能分解成 t 个同构因子, 称 G 是 t 可分的或 t 可分 G, 记为 $t|G$.

王建方在文献 [40] 中讨论了 1-因子分解, 着重讨论了有限拓扑方法、群论方法和边着色方法, 证明了图 G 能 1-因子分解的必要条件, 以及讨论了同构因子分解, 主要讨论群论方法和某些数论方法、图函数和多步分解法. 他还在文献 [41] 中介绍关于图的路因子分解.

本章主要介绍 Harary, Robinson, Wormald 等提出的关于完全多部图的同构因子分解猜想的证明的两种不同的方法.

定义 3.1.1　$G=(V,E)=G(A^1,A^2,\cdots,A^n)$ 叫做以 $A^1,A^2,\cdots,A^n$ 为独立集的 n-部分图, 如果

$$A^1\cup A^2\cup\cdots\cup A^n=V,\quad A^i\cap A^j=\varnothing,$$

这里 $i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$, 且属于同一点集 A^i 的任意顶点不邻接.

用 (A^i,A^j) 记完备二分图 $K(A^i,A^j)$ 的边集,

(1) 如果 $(A^i,A^j)\cap E=\begin{cases}(A^i,A^j),\\ \varnothing,\end{cases}$ 或 $i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n$, 则称 G 为拟完备 n-部分图.

(2) 如果 $(A^i,A^j)\cap E=(A^i,A^j),\ i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$, 则称 G 为完备 n-部分图. 如果还有 $|A^1|=\cdots=|A^n|=m$, 则称 G 为完备 n-等部图, 简记为 $K_n(m)$.

对于 G 能分解成 t 个同构因子, 称 G 是 t 可分的或 t 可分 G, 记为 $t|G$. 给定的 t 和恰有 q 条边的图 G, $t|G$ 的一个明显的必要条件是 t 整除 q, 记为 $t|q$, $t|q$ 叫做 $t|G$ 的可分性条件. 一般来说, 可分性并不是充分条件. Sachs 在文献 [7] 和 Ringel 在文献 [6] 中分别独立地证明了可分条件是 K_n 能分解为 2 个同构因子的充分条件. Harary, Robinson, Wormald 在文献 [8]中完整地解决了完全图的同构因子分解问题, 得到了下面结果: $t|K_n$ 的充分必要条件为 $t\left|\dfrac{n(n-1)}{2}\right.$. 他们还在文献 [9] 中研究多分图的同构因子分解, 得到了一些有趣的结果, 并且提出了下述猜想: 对所有完全等部图, 可分条件意味着存在一个同构因子分解, 这个猜想可以描述为如下定理.

定理 3.1.1 对任意三个正整数 n, m, t, $t|K_n(m)$ 当且仅当 $t\left|\dfrac{n(n-1)m^2}{2}\right.$, 其中 $K_n(m)$ 表示每部有 m 个定点的完全等部 n-分图.

对于此猜想的证明, 王建方、Quinn 和杨世辉分别独立地给出了不同的证明, 本书介绍两种方法证明, 第一种是王建方教授在文献 [1] 中的方法; 第二种方法是同一时期杨世辉教授在文献 [42] 中证明的.

3.2 关于完全图的同构因子分解猜想证明的第一种方法

由定义 2.2.3 的合成图的定义知, 对任意的 $v \in V_1$, 令 $V(v) = \{(v, u)|u \in V_2\}$, 我们称 $V(v)$ 为顶点 v 在 $G_1[G_2]$ 中的张集, v 为 $V(v)$ 的支点. 由此有下面的引理成立.

引理 3.2.1 $K_n(m) = K_n[I_m]$, 其中 K_n 表示 n 阶完全图, I_m 表示 m 阶孤立图. $K(v_1, v_2, \cdots, v_t)$ 表示顶点集合为 $\{v_1, v_2, \cdots, v_t\}$ 的完全图, $K(V_1, V_2, \cdots, V_n)$ 表示各部独立集分别为 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 的完全 n-分图.

设 G 为 n 阶图, 我们称 $G_n(m) = G[I_m]$ 为拟完全等部 n-分图.

下面定义简化剩余系.

定义 3.2.1[43] 设 $\varphi(m)$ 表示与 m 互素类的个数, 在与 m 互素的各类中各取一个代表 $a_1, a_2, \cdots, a_{\varphi(m)}$, 命名为 m 的剩余缩系, 简称缩系.

定理 3.2.1 若 $a_1, a_2, \cdots, a_{\varphi(m)}$ 为一缩系, 且 $(k, m) = 1$, 则 $ka_1, ka_2, \cdots, ka_{\varphi(m)}$ 也为一缩系.

设 ϕ 为对称群 S_n 的一个置换, ϕ' 为 S_n 的配对群中一个置换, 且满足 $\phi'\{i, j\} = \{\phi i, \phi j\}$, 称 ϕ' 为 ϕ 的导出置换.

下面给出文献 [9] 的引理.

引理 3.2.2 完全图 K_m 的边可以标号, 使得当 $n < \dfrac{(m-1)}{2}$ 时, 对任意 n 条