HIT

数学 · 统计学系列

Talking from Integer

从整数谈起

冯克勤 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

从整数谈起

Talking from Integer

冯克勤 编著

HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共5章,包括:整数和它的表示,同余,方程的整数解,整点与逼近,整数的应用.本书主要介绍整数的各种性质和由整数引申出来的各种数学问题和故事.

本书适合数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

从整数谈起/冯克勤编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2015.10

ISBN 978-7-5603-5614-3

Ⅰ.①从… Ⅱ.①冯… Ⅲ.①数学-普及读物 Ⅳ.①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第220822号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张11.25 字数216千字
版 次 2015年10月第1版 2015年10月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5614-3
定 价 28.00

前　言

数论被称作数学的皇后,它的主要任务是研究整数的性质和方程的整数解. 大家在小学和中学数学课里已经学到整数的一些知识(例如约数和倍数,最大公约数和最小公倍数,素数和正整数的素因子分解,带余除法等),也学到这些知识的某些应用(如分数的约分和通分,求整系数多项式的有理根等). 如果你是数学课外活动小组的积极分子,听过数学讲座或者阅读过数学课外读物,还会了解到整数的更奇妙的知识;学到求方程整数解的许多方法,这会帮助你解决不少数论难题.

这本小册子主要介绍整数的各种性质和由整数引申出来的各种数学问题和故事. 作者试图在本书中达到以下几个目的.

首先,我们希望开拓中学生的数学眼界,从 6 000 多年前人类认识了整数讲起,一直讲到 1994 年证明费马猜想,不仅介绍中国在数论上的光辉成就(勾股定理,中国剩余定理,陈景润定理等),也涉及各国伟大数学家一些重要的数论贡献,从整数讲到有理数和实数,从多项式讲到幂级数,从整数的四则运算讲到有限域,从有理数逼近无理数讲到数的几何,试图使大家明白,在中学里分别讲授的算术、代数和几何是一个有机的整体. 也希望同学们在课堂学习之余,能闻到一点近代数学的气息.

其次,我们希望提高中学生的数学修养和素质,在书中讲述了与整数有关的一些数学知识,但我们的着眼点主要不是增加知识,也不是介绍解题技巧,而是通过一些数学材料着重叙述各种数学思想和观点. 用整数的同余说明如何对事物作数学上的分类(等价关系),用同余类上的四则运算引申出抽象的代数结构(环或域),用有理数逼近无理数说明精确和近似的辩证关系,用通信中各种实际问题说明数学模型的意义. 以大量具体例子说明数学上的许多概念是如何自然产生和提炼出来的,数学上存在性和构造性证明的价值和区别. 我们希望同学们能体会到人们在各种实践活动中的数学思考方式.

最后,我们希望中学生了解整数的各种实际应用. 数学是抽象的,它是各种事物共性的高度概括,这也决定了数学应用的广泛性. 在古希腊,整数曾经被作为认识世界和哲学思考的基本手段("万物皆数"). 整数概念是古代人类在生产实践中产生的. 随着实践活动的发展和科学技术不断进步,特别是 20 世纪计

算机技术的飞速发展，包括数论在内的整个离散数学成为解决实际问题的重要工具，不断出现的新的实际问题的研究促进了数论的发展（如最近发展起来的计算数论），所以实践永远是数学发展的最根本动力．但是数学的发展还有追求自身完美的内部动力，这在数论中尤为明显．整数概念一旦产生，人们对于整数性质的探讨便世世代代执著地追求下去．费马猜想被众多优秀数学家研究了350年，在解决问题的过程中发展了博大精深的数学理论（代数数论，解析数论……）．这些深刻的数学思想和理论一旦得到应用，往往给技术带来巨大的变革，本书最后一章挑选了数论在试验设计和通信工程中的某些应用，用这些实例说明理论和实践的辩证关系．简言之，无论同学们从事什么具体工作，数学的训练，数学知识特别是数学思考方式对于大家的事业与成就都是重要的．

数学知识的学习方法和思考方法的掌握是循序渐进的．数学也许是最具有继承性和传统性的一门学问．一年级的数学不好，肯定会影响二年级的成绩，初中数学不好，高中数学也会更加困难．所以数学基础一定要牢固，此外也许老师把数学教得过于机械、死板，用数学倒学生的胃口，或者让同学们做大量重复性的习题，产生厌烦的心理．翻一下这本书，你也许会感到数学与我们日常生活和工作息息相关，数学不是枯燥无味的，而是很活泼的学问．另一方面，数学也是一门严格的学问，要学好数学和掌握数学需要付出艰苦的努力，作者希望通过这本书使同学们对数学产生兴趣，认识到我们不是数学的奴隶，要通过努力变成数学的主人．

在 21 世纪即将到来的时刻，数学的深化和扩展正以从未有过的高速度进行着，数学研究和应用的宏伟事业正等待同学们去完成．

冯克勤

1997 年 7 月于北京

◎ 目录

第1章 整数和它的表示

1.1 数的起源

和艺术、天文一样,数学是人类最古老的精神文明之一,数学的萌芽产生于文字发明之前,距今至少有六七千年的历史.古代人类聚居在气候温和湿润、土壤肥沃的大河流域.这就是尼罗河流域的埃及,底格里斯河和幼发拉底河流域的巴比伦(现在伊拉克的地方),恒河流域的印度和黄河长江流域的中国.数学起源于这四大文明古国.

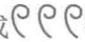
数(shù)起源于数(shǔ),量(liàng)起源于量(liáng).人有生老病死,每个氏族部落的成员经常发生变化(增多或减少);每次狩猎归来,需要估量猎物的多寡,分配食物时需要把猎物和氏族成员的多少加以比较;尼罗河每年洪水泛滥,洪水退去之后,需要重新丈量土地;建筑房屋、堤坝和巨大的金字塔,需要计算各种图形的面积和体积,所以数学产生于对数量的认识和对几何图形的认识,而最早认识到的数是1,2,3这些正整数.

现在,每个幼儿园的孩子都可以数出1,2,3及更大的数字,但是在几千年之前,人们从3只羊、3个人和3块石头中间提炼出它们共同的性质,产生了数3的概念,是非常不简单的.考古学家发现,在有文字之前,人们是用石子、沙粒、树枝和贝壳等实物来计数.1930年,美国的考古队在伊拉克境内发现一个封口泥罐,泥罐表面画着一种牲畜,罐里有48颗泥粒,这表

示泥罐的主人曾经有过 48 头这种牲畜. 中国史书上有“上古结绳而治”一说,人们在绳上打几个结,用来记载有几个事物. 对于少量物品,人们用手指计数,物品多了则用树枝在泥巴上刻痕,或用刀具在动物骨骼上刻线.

大约在公元前 4000 年左右,人类发明了文字,各种数以固定的形式书写成文字的形式,这就是数字,看一看各文明古国不同的数字表达方式是非常有趣的. 在埃及,最初的文字是象形的,用树枝蘸着炭汁,写在芦草挤压晒干而成的纸草上,这些数字为:

1　10　100　1 000　10 000　100 000　1 000 000　10 000 000

例如,6 表示成,300 表示成等等.

在巴比伦,用削尖的木棒在半湿的软泥板上书写文字,每个笔画的形状是楔形,称作楔形文字,数字写成:

1　10　100　23

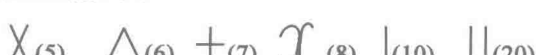
在印度,公元前 2 世纪数字表示成如下的婆罗门式记号:

1　2　3　4　5　6　7　8

9　10　20　30　40　50　60

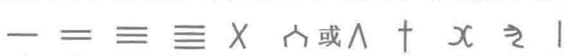
大家会发现,其中的 6 和 7 与现在表达方式很相像. 事实上,在 13 世纪初,阿拉伯人把印度数字加以变化传到欧洲,被欧洲人称为阿拉伯数字,就是我们今天普遍采用的数字.

在中国,数字也出现得很早,距今约 6 000 年前的西安半坡村新石器时代遗址中有刻在陶器上的数字:



(5)　(6)　(7)　(8)　(10)　(20)

我国系统的数字大约出现在商代,用甲骨文书写的数字有:



1　2　3　4　5　6　7　8　9　10

另有百、千、万等高位值符号:

到了春秋时期(前 700 ~ 前 476),我们的祖先创造了用算筹表示数字和进

行运算的“筹算”，算筹通常用竹子削成，形如筷子，汉朝的算筹长约 13 厘米，用算筹摆出的数字有纵横两种形式：

纵式：	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式：	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

记数时个位常用纵式，依次横纵相间，如遇零便空一位. 如 6 143 的筹式为 𝍮𝍠𝍫𝍢，306 的筹式为𝍢　𝍥. 这种计数方法实质上就是我们现在采用的十进位记数方法. 在明代珠算盘被普遍使用之前，我国古代一直用算筹进行四则运算. 春秋时期中国就有了计算乘法的口诀：九九表（一一得一，一二得二，二二得四，一直到九九八十一）. 不仅如此，中国也是最早认识到分数并且建立分数运算的国家. 大约在战国末期，我国数学家就把分数看成是两数相除，用算筹表示是被除数放在除数的上面，例如$\frac{16}{5}$表示成：

𝍩𝍥
𝍤

这与现在的分数记法不同之处只是差一条分数线，在我国著名的古算书《九章算术》（写于公元前 1 世纪）中已经有通分、约分及分数四则运算等相当完整的分数理论，比当时埃及等其他国家要先进很多.

1.2　进位制

记得在儿时曾听过这样一个故事：小学开学第一天，老师给新生上的第一节语文课，教了三个字：一，二，三. 下课后有一个学生愁眉苦脸地对老师说：“写我的名字那要用多少张纸啊！”老师问他叫什么名字，他说：“我叫万百千！”

这虽然是一个笑话，但是对我们的祖先来说，随着生产的发展和生活的进步，如何表示大的数目，是一个非常重要和严肃的问题. 开始时，一些大的数用专门的文字或符号表示，比如上节中埃及人把 100 记为𓍢，把 10 万记成像小鸟一样，中国的甲骨文也把 100，1 000，10 000 表示成特定的符号. 这种方法在某种程度上可以记下大数，可是运算很不方便.

新记数方法的发明和普遍采用，是古代数学的一个重大进步，这就是发明了“定位制”. 以我们现在采用的十进制为例，我们只需要十个符号 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 就可以表示任意大的正整数. 每个数从右到左依次为“个位”，“十

位”,“百位”,等等,例如213的3在个位表示3,而1在十位表示10,数字2在百位表示200,所以213为200+10+3,表示贰佰壹拾叁这个数.也就是说,每个数字代表的数值由它所处的位置决定.两个数相加时,相同位置上的数字相加,超过10时则向前(即向左)进位,减法则需要“借位”.这种定位制表示数的方法和运算方法非常方便,一直使用到今天.中国的筹算是世界上最早的十进制计数和运算的工具,后人的改进只是采用了更方便的阿拉伯数字符号.

在东方文明国家采用定位制计数和运算之后,欧洲一直保留陈旧的记数方式:古罗马数字,这种数字一直到今天还用在时钟钟面、日历、书稿的章节分类等方面,大约在公元前后罗马人用7个基本符号表示数:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1 000

例如3表示成Ⅲ,而800就要连写8个C或者写成DCCC,后来为了简化又创造了一个新规则,即数值较小的符号放在数值较大符号之左边时,则从大数值减去小数值,例如Ⅵ表示6,而Ⅳ表示4(不写成IIII).同样,CD是400而DC是600.于是89可以简写成XXCIX.在罗马帝国灭亡(476年)后的700多年间,西欧人仍然使用这种过于复杂的罗马数字,这也是造成在相当长的一段时间里,西方数学落后于东方数学的原因之一,从这段历史可以看出,一套好的数学符号对于数学的发展是多么重要!

十进制是普遍采用的计数方法,这可能是自古以来人类用十个手指计数较为方便.事实上在古代也曾采用过五进制(一只手),二十进制(手指加脚趾?)和六十进制,等等.就是在今天,各地也还保留着非十进制的计数方式,比如时间计算就是60秒为1分,60分为1时,在我国旧制称重量时,1斤为16两,英国货币制度仍保持1英镑为20先令,1先令为12便士的古老传统.在电子线路和计算机蓬勃发展的今天,二进制表示法和二进制运算在通信和计算机科学中非常有用.这是因为一个电子元件通常有两种状态,比如一个开关有“接通”和“断开”两种状态,一只灯泡有“亮”和“不亮”两种状态,而每个正整数用二进制表示时,我们也只需要0和1两个数字,如果用0和1分别表示电子元件的两种状态,我们就可用二进制数表示电子线路和计算机的工作状态.

现在我们介绍如何把一个十进制的正整数写成二进制或者三进制的形式,并且如何用二进制或三进制的形式进行四则运算.我们知道,一个正整数N表成十进制为$c_nc_{n-1}\cdots c_1c_0$,其中个位数字为c_0,十位数字为c_1,百位数字为c_2,等等,而$c_0,c_1,\cdots,c_n$都是从0到9的数字,那么c_1表示数$c_1\cdot 10$,c_2表示数$c_2\cdot 10^2$,……,c_n表示数$c_n\cdot 10^n$,因此这个数为

$$N=c_nc_{n-1}\cdots c_1c_0$$

$$=c_0+c_1\cdot 10+c_2\cdot 10^2+\cdots+c_{n-1}\cdot 10^{n-1}+c_n\cdot 10^n$$

现在我们把 19 写成三进制形式,由于“逢三进一”. 用 3 除 19 得 6 余 1,所以 $19=6\cdot 3+1$,因此最右边位上为 1 且进位为 6. 由于 $6=2\cdot 3+0$,所以留下数字 0 然后再进位 2,于是 19 用三进制表示为 201,为了标明这是三进制,我们把它写成 $[201]_3$,即 $19=[201]_3$,这种过程我们可以写成如下的算式

$$\begin{array}{r@{}l}
 & \underline{\ \ 2\ \ }\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\
3\,) & \ \ 6 \\
 & \overline{}\cdots\cdots\cdots\cdots 1 \\
3\,) & \ 19
\end{array}
\qquad 19=[201]_3=1+2\cdot 3^2$$

一般地,对每个大于 1 的正整数 m,我们都可把任意正整数 N(十进制)写成 m 进制形式,其做法与上面过程相仿:用 m 除 N 得商 N' 和余数 c_0,再用 m 除 N' 得商 N'' 余数 c_1,如此下去,便可得到 N 的 m 进制表示 $c_n\cdots c_1c_0$,,或者更明确地写成 $[c_n\cdots c_1c_0]_m$,其中 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 是从 0 到 $m-1$ 之间的整数,c_0 所在的位叫作第 0 位,c_1 所在的位叫作第 1 位,如此下去,c_n 所在的位叫第 n 位,这种叫法有一个方便之处,即第 1 位数字 c_1 实际上表示数 $c_1\cdot m$,第 2 位数字 c_2 实际上表示数 $c_2\cdot m^2$,如此类推,第 n 位数字 c_n 实际上表示数 $c_n\cdot m^n$,因此

$$N=[c_n\cdots c_1c_0]_m=c_0+c_1m+c_2m^2+\cdots+c_nm^n$$

m 进位数之间作加法与十进位数加法没有本质区别,仍是同位的数字相加,超过 m 便向前进位. 减法则可能需要借位:前一位借 1 作为下一位的 m,乘除法也可类似地进行. 让我们举一个例子.

例 将 14 和 8 用三进制表示,并计算其和与积

$$14=[112]_3,8=[22]_3$$

三进制数 112 和 22 的加法算式为

$$\begin{array}{r}
112 \\
+\quad 22 \\
\hline
211
\end{array}$$

即
$$[112]_3+[22]_3=[211]_3=1+3+2\cdot 9=22$$

而乘法算式则为

$$\begin{array}{r}
112 \\
\times\quad 22 \\
\hline
1001 \\
1001 \\
\hline
11011
\end{array}$$

即
$$[112]_3\cdot[22]_3=[11011]_3=1+3+27+81=112$$

给了两个 m 进制数,如何比较它们的大小? 对于十进制情形是小学生都会做的. 设

$$a_na_{n-1}\cdots a_1a_0=a_0+a_1\cdot 10+\cdots+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+a_n\cdot 10^n$$

$$b_nb_{n-1}\cdots b_1b_0 = b_0 + b_1 \cdot 10 + \cdots + b_{n-1} \cdot 10^{n-1} + b_n \cdot 10^n$$

是两个十进制数. 如果所有相同位的数字均相等,即 $a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \cdots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$,则这两个数相等. 不然,我们从左到右比较相同位数字的大小,设第一个不等的数字为 a_i 和 b_i(即 $a_{i+1} = b_{i+1}, a_{i+2} = b_{i+2}, \cdots, a_n = b_n$),则 $a_i > b_i$ 时,$a_na_{n-1}\cdots a_1a_0 > b_nb_{n-1}\cdots b_1b_0$,而当 $a_i < b_i$ 时,$a_na_{n-1}\cdots a_1a_0 < b_nb_{n-1}\cdots b_1b_0$. 对于 m 进制的两个数我们也可用完全一样的方法比较它们的大小. 比如说对于三进制的两个数$[20111]_3$和$[20021]_3$,从左边起前两位数字相等,但是接下来第 3 位数字分别为 1 和 0,于是$[20111]_3 > [20021]_3$. 这是因为$[20021]_3$后边两位$[21]_3$总是小于$[100]_3$的. 因此

$$[20111]_3 > [20100]_3 > [20021]_3$$

习题

1. 将数 100 表示成二进制和七进制的形式.

2. 做下列五进制的运算

$$[23]_5 + [444]_5, [431]_5 - [344]_5, [123]_5 \cdot [321]_5$$

并且把这些数转换成十进制来验算你的计算结果是否正确.

1.3　二进制的游戏

我们说过,二进制在通信和计算机科学上是很有用的. 现在我们介绍几个与二进制有关的数学游戏.

游戏 1:猜年龄

假如有一天,一个陌生人到你家里来作客,你把下列六张表拿给他看,让他告诉你哪些表中有他的年龄,然后你可以马上说出他的年龄是多少.

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

比如说，他告诉你第一、四、六张表上有他的年龄，而其余三张表上没有他的年龄. 那么你只要把有他年龄的表中左上方数字相加：$1+8+32=41$，这就是这位陌生人的年龄.

你知道其中的道理吗？也就是说，你知道这六张表是怎样制造的吗？它的秘密是运用了二进制.

我们先假设这位陌生人的年龄不超过 63 岁，由于 $63=2^6-1$，所以将 $1,2,\cdots,63$ 表示成二进制时，均不超过 6 位. 例如 $25=[11001]_2=[011001]_2$. 第一张表即是第 0 位数字为 1 的那些数，也就是从 1 到 63 的所有奇数，从小到大排下来，一共是 31 个奇数，最小的一个为 $1=[000001]_2$ 排在左上角，然后把第 1 位数字是 1 的 $[*\ *\ *\ *\ 1\ *]_2$（其中“$*$”可为 1 也可为 0）从小到大排成第 2 张表，左上角为其中最小的数 $2=[000010]_2$. 以此类推，最后第六张表排上第 5 位数字为 1 的那些数 $[1\ *\ *\ *\ *\ *]_2$，也是 32 个数（因为每个 $*$ 有两种可能选取方式：0 或 1，所以 5 个 $*$ 共有 $2^5=32$（种）选取方式），左上角为其中最小的数 $32=[100000]_2$. 像前面说的那样；陌生人的年龄只在第一、四、六这三张表上，这表明此人年龄的二进制表示在第 0，3，5 位为 1，而在第 1，2，4 位为 0，即为 $[101001]_2=1+2^3+2^5=1+8+32$，也就是第一、四、六这三张表的左上角三个数相加：$[101001]_2=[000001]_2+[001000]_2+[100000]_2=1+8+32$. 这就是这个游戏的秘密.

以上我们假定陌生人的年龄不超过 63 岁，假如来了一位年龄超过 63 岁的老人会怎么样？

你可以造七张表，即考虑陌生人的年龄在 1 到 $127=2^7-1$ 岁之间，其二进制表示不超过 7 位，将第 0 位数字为 1 的 64 个岁数写在第一张表上，左上角为 1，如此等等，最后将第 6 位数字为 1 的岁数（也是 64 个）写在第七张表上，左上角为 $64=[1000000]_2$，那么岁数不超过 127 的陌生人来访问你的时候，你把这七张表显示给他，不同岁数的人便一定会有不同的答案了.

游戏 2：天平称重物

天平的一端放砝码，另一端放要称的重物，通常砝码做成重量为 1 g，2 g 和 5 g. 如果我们有五个砝码，其中一个是 1 g，两个是 2 g，另外两个是 5 g，用这五个砝码可以称出 1 g 到 15 g 的重物. 例如，$6=1+5$，$8=1+2+5$，$9=2+2+5$ 等. 我们的问题是：你能制造出四个砝码，用它们也可称出从 1 g 到 15 g 的所有

重物吗?

这个问题比较简单,而且容易想到采用二进制. 将 1,2,…,15 表成二进制时均不超过四位. 若 $N=[c_3c_2c_1c_0]_2=c_0+2c_1+4c_2+8c_3$,其中,$c_0,c_1,c_2,c_3$ 取值为 0 或 1. 可知我们只要用重量为 1 g,2 g,4 g,8 g 的四个砝码,就可称出 1 g 到 15 g 的所有重物. 更一般的,我们用重量为 1 g,2 g,2^2 g,…,2^{n-1} g 的 n 个砝码可称出 1 g 到(2^n-1)g 的所有重物.

现在问一个问题:如果在称重时,我们允许把砝码放在天平的两边,即也可放在重物那一边,那么用四个适当的砝码是否可以称更多的重物?

首先让我们估算一下用这种方式最多可以称多少种不同重量的物体. 每个砝码在称重时都有三种不同的安排:放在左边盘子里,放在右边盘子里,或者放在天平外边. 于是四个砝码总共有 $3^4=81$ 种不同的安排方式,除了称重量为 0 的物体(这时四个砝码均不放到天平上),可知最多可称 80 种不同重量的物体. 进一步,由于天平的两个盘子是对称的,将左右两个盘子放置的砝码和重物相互调换,可知每两种方式称同样的重量,所以实际上我们最多可称 40 种不同重量的物体.

现在我们试验一下是否可以用四个砝码称 40 种不同重量的物体. 首先我们取一个 1 g 的砝码,用来称 1 g 的重物. 为了称 2 g 的重物,我们现在可以再取一个 3 g 的砝码. 因为将 3 g 砝码放在一个盘中,将 1 g 砝码和重物放在另一个盘中,便可称 2 g 重物,即 $2=-1+3$. 现在,1 g 和 3 g 的两个砝码还可称 3 g 和 4($=3+1$) g 的重物. 为了称 5 g 的重物,我们把这两个砝码和 5 g 的重物放在一个盘中,所以另一个盘子需要($5+3+1=$)9 g 的砝码,即 $5=-1-3+9$. 到此为止,你可以发现,用 1 g,3 g 和 9 g 这三个砝码是否可称重量为 N g 的重物,就看 N g 是否可写成形式

$$N=c_0+c_1\cdot 3+c_2\cdot 9 \qquad (*)$$

其中,c_0,c_1,c_2 可取值 0,1 或者 -1,它们分别表示相应的砝码不放在盘中,放在与重物不同的盘中,或者放在与重物同一盘中. 公式($*$)也是 N 的一种三进制表示,只不过系数 c_i 的取值 0,1,2 改用 0,1 和 -1. 也就是说,当 N 被 3 除余 2 时,我们把余数改成 -1,即 $N=3N'-1$,其中 $N'=\dfrac{N+1}{3}$是比 N 小的整数. 例如,把 7 用这种方式写成三进制的算式为

$$\begin{array}{rl}
 & 1=c_2 \\
3\overline{)\;2\;} & \cdots\cdots\cdots\; -1=c_1 \\
3\overline{)\;7\;} & \cdots\cdots\cdots\; 1=c_0
\end{array}$$

于是 $7=1-3+9$. 读者不妨试验一下,1 到 13($=1+3+9$)都可表成公式($*$)的形式,因此用 1 g,3 g 和 9 g 可以称从 1 g 到 13 g 的所有重物. 14 的三进制算

式为

$$
\begin{array}{l}
\quad\ \ 1 = c_3 \\
3\,\overline{)\ \ 2\ \ }\cdots\cdots\cdots\cdots\ \ -1 = c_2 \\
3\,\overline{)\ \ 5\ \ \ \ }\cdots\cdots\cdots\cdots\ \ -1 = c_1 \\
3\,\overline{)\ \ 14\ \ \ \ \ }\cdots\cdots\cdots\cdots\ \ -1 = c_0
\end{array}
$$

因此,$14 = c_0 + 3c_1 + 9c_2 + 27c_3 = -1 - 3 - 9 + 27$. 于是我们再增加一个 27 g 的砝码,用 1 g,3 g,9 g 和 27 g 的四个砝码就可以称从 1 g 到 40($= 1 + 3 + 9 + 27$) g 的 40 种不同重量的物体. 根据前述,用四个砝码最多也只能称 40 种不同重量的物体.

游戏 3:取石子

地面上摆着任意多堆石子,每堆石子的数目也可以任意. 现在有两个人轮流取石子,每人每次只能在其中的一堆中取走 1 颗或 2 颗石子. 最后把石子取完的人获胜,试问有什么获胜的办法吗?

我们还是从最简单的情况谈起,即地面上只有一堆石子. 如果在你拿完石子之后剩下的石子数是 3 的倍数,那么你肯定会胜,因为下一步轮到对方拿走 1 颗或 2 颗石子,剩下的石子数不能被 3 除尽,所以不能取完,再轮到你时,你拿掉石子数是被 3 除的那个余数(1 颗或者 2 颗),使剩下的石子数不能又是 3 的倍数. 这样下去,对方总是不能取完,而石头愈来愈少,所以最后一定是由你取完,从而获胜. 因此,我们把这堆石子数为 3 的倍数这种局势叫作赢局. 只要你拿完石子之后做成赢局,你就会获胜.

接下来讨论有两堆石子的情形,请读者想一下什么是赢局? 答案为:这两堆石子数被 3 除余数相等就是赢局,也就是说,若不是赢局,你一定有办法拿掉石子把它变成赢局,然后对方无论怎样取石子,剩下的一定不是赢局,你再把它变成赢局……最后你取胜.

如果石子的堆数更多呢? 大家不妨对三堆和四堆的情况仔细考虑一下,最后可以对一般情形给出答案:对于任意多堆石子,如果石子数被 3 除余 1 的石堆有偶数个,石子数被 3 除余 2 的石堆也有偶数个(石子数为 3 的倍数的石堆数可以任意),这就是赢局,其他情形不是赢局. 请读者想一下为什么会是这样.

现在我们改变一下游戏规则:仍旧是两个人轮流取石子,每人每次只允许在其中一堆取石子,但是所取的石子数不加限制,即可取 1 颗,2 颗,一直到可以把这堆石子全部拿掉,最后取完石子的人获胜,试问如何取胜?

只有一堆的情形太简单了,你把这堆全部拿掉就胜利了. 对于两堆的情形,如果这两堆数目不等,你只需把多的那堆取走一些石子,使两堆数目变成相等,

你就取胜了. 因为对方一定要在某堆中取走石子,从而两堆数目又不相等(因此不能取完),而轮到你时又可把它变成两堆数目相等. 因此,两堆数目相等就是赢局.

再看三堆情形,读者会发现这已经相当复杂了. 举例说,三堆石子数为 1,2,3,一定是赢局. 我们把这种局势简记成①②③. 如果对方把①拿走变成②③,你可以在有 3 颗石子的那堆拿掉 1 颗石子变成赢局②②,如果对方拿走①①③,你可把它变成赢局①①,如此等等. 但是,要想决定出全部赢局颇为不易,对于四堆以上的情况更难.

游戏规则稍作改变,处理方法则完全不同,这个问题的答案要用二进制数,而且要用二进制数的一种特殊的加法——模 2 加法,我们将它表示成$\oplus$.

所谓“模 2 加法”就是 0 和 1 之间的加法,其中 $0\oplus 0=0$,$1\oplus 0=0\oplus 1=1$,$1\oplus 1=0$(!). 这种运算在通信和计算机上是常用的,而且并不神秘. 你可以把 0 和 1 分别想成是“偶数”和“奇数”,那么前两个式子分别代表:偶数加偶数等于偶数,奇数加偶数等于奇数. 而式 $1\oplus 1=0$ 就是奇数加奇数等于偶数. 对于任意多个数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$(每个都是 0 或 1),可以把它们做模 2 加法 $a_1\oplus a_2\oplus\cdots\oplus a_m$. 不难看出,当这 m 个数中有奇数个 1 时,结果为 1,否则结果为 0.

现在对二进制数定义模 2 加法,规则非常简单:即每个数位上分别作模 2 加法,由此得出一个新的二进制数,例如 $[1101]\oplus[111]\oplus[101]=[1111]$,写成算式为

$$\begin{array}{rr} & 1\,1\,0\,1 \\ & 1\,1\,1 \\ \oplus & 1\,0\,1 \\ \hline & 1\,1\,1\,1 \end{array}$$

个位数字共有 3 个 1,所以模 2 加为 1(不进位). 同样的,其他数位上也均有奇数个 1. 不同数位之间彼此无关地运算,所以模 2 加法是不进位的加法.

现在设有 m 堆石子,石子数分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$. 我们把它们写成二进制数为 $[\alpha_1],[\alpha_2],\cdots,[\alpha_m]$,然后做模 2 加法 $[\alpha_1]\oplus[\alpha_2]\oplus\cdots\oplus[\alpha_m]$. 我们的结论是:如果这个和是 0,则是赢局,否则不是赢局. 例如前面提到的三堆石子数分别为 1,2,3. 由于 $[1]\oplus[10]\oplus[11]=0$,所以这是赢局.

现在我们要证明这个结论. 这只需要证以下两件事情:

(1)如果对手面对赢局,那么他拿了石子之后,剩下的一定不是赢局.

(2)如果对手面对的不是赢局,那么你总有办法从某堆中拿掉一些石子之后,将它变成赢局.

第(1)条容易证明,我们只需注意:对于二进制数 α,一定有 $\alpha\oplus\alpha=0$(这是因为每个数位上两个相同数字的模 2 加均是 0),反过来,若 α 和 β 是不同的二进制数,则 $\alpha\oplus\beta\neq 0$. 现在设 m 堆石子组成赢局,石子数的二进制分别为