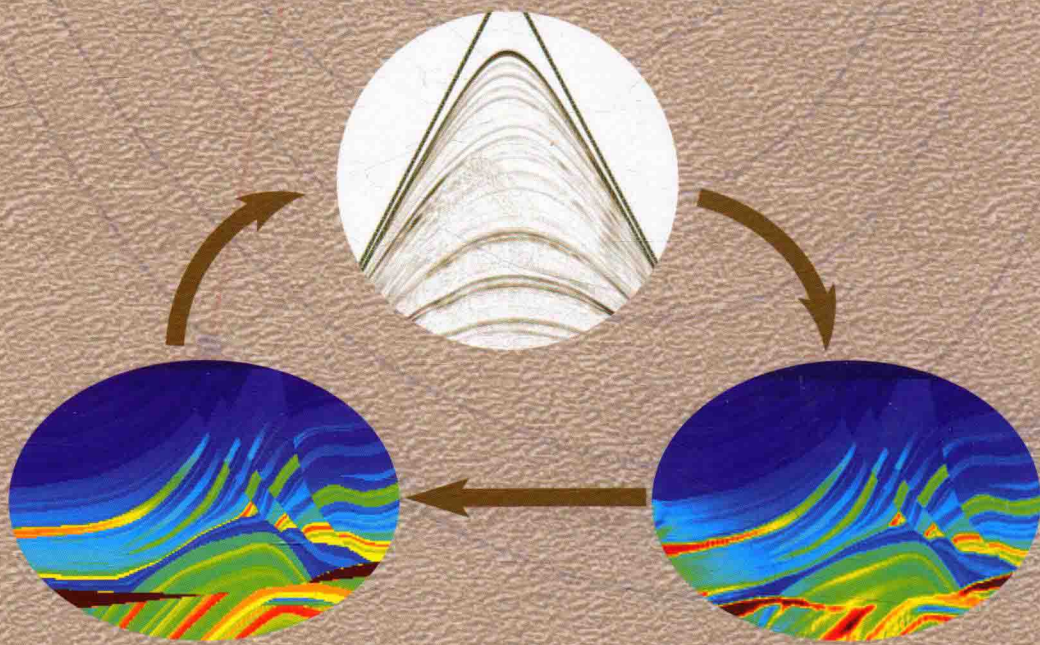


地震波形反演

Seismic Waveform Inversion

刘文革 贺振华 著



科学出版社

地震波形反演

Seismic Waveform Inversion

刘文革 贺振华 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

地震波形反演是从观测记录中定量提取地下介质物理属性的终极程序。它可以作为独立的处理流程,统一现有的宏观速度建模和偏移成像,为地球物理勘探提供一种有效的高分辨率成像工具。在过去 30 年的发展过程中,地震波形反演已取得广泛的研究成果,其涵盖内容从声学介质到弹性介质、从二维到三维、从单参数到多参数以及黏性、各向异性介质等,并汇集计算机科学和信息处理等方面的理论与方法。本书的内容分为五个部分:第一部分简单介绍数学物理的有关基础知识;第二部分的内容主要是关于地震正演的算法分析;第三部分则介绍波形反演的具体技术策略;第四部分给出波形反演的一些典型实例;第五部分则在附录中给出加权余量法、Born 近似以及伴随状态法等详细说明。

本书可供国内各高校勘查技术与工程专业高年级学生(研究生和博士)、科研院所以及能源勘查相关行业技术人员学习和参考。

图书在版编目(CIP)数据

地震波形反演/刘文革,贺振华著. —北京:科学出版社,2015.9

ISBN 978-7-03-045794-3

I. ①地… II. ①刘… ②贺… III. ①地震波形—反演 IV. ①P315.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 226095 号

责任编辑:罗 莉/责任校对:陈 靖

责任印制:余少力/封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

四川煤田地质制图印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 9 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2015 年 9 月第一次印刷 印张:15 3/4

字数:370 000

定价:128.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

地震波形反演是从观测记录中定量提取地下介质物理属性的终极程序。它可以作为独立的处理流程,统一现有的宏观速度建模和偏移成像,为地球物理勘探提供一种有效的高分辨率成像工具。20世纪80年代初,Lailly和Tarantola的研究为地震波形反演奠定了理论基础,但由于计算设备、采集方式和正反演方法的不足,波形反演没有引起公众的关注。20世纪90年代,Pratt和Shin等人在地震反演和正演方面所做出的贡献使波形反演逐渐由理论走向应用。现今,波形反演已成为地球物理研究领域的热点,受到国内外油气工业界和科研院所的追捧,并取得了广泛的研究成果。其涵盖内容从二维到三维、从单参数到多参数、从声学介质到弹性介质以及黏性、各向异性介质等,并汇集了计算机科学和信息处理等方面的理论与方法。在当前形势下,国内物探人员应该对波形反演的发展有所了解,并引导新技术方法应用于生产实践。

本书的内容分为五章:第1章简单介绍与数学物理有关的基础知识;第2章的内容主要是关于地震正演的算法分析;第3章介绍波形反演的具体技术策略;第4章给出地震波形反演的一些典型实例;第5章在附录中给出加权余量法、Born近似以及伴随状态法等详细说明。在讲述地震正反演理论的过程中,书中引用了大量的文献成果,在各章节中只要出现类似“(Virieux, 2009)”或者“Virieux (2009)”的地方,读者可以根据姓名和时间在书后的参考文献部分查明出处。另外,书中在提及国外人员姓名时,因为国内没有统一的翻译标准,为了避免混淆和产生误解,除少数众所周知的学者如泰勒、牛顿之外,其他人员的姓名均使用英文。

在地震波形反演研究以及本书的撰写、出版过程中,曾得到国家自然科学基金项目(项目编号:41274140)的资助,并且西南石油大学也给予了众多的关心和支持,在此我们表示诚挚的感谢。

感谢美国休斯顿大学地球与大气科学系的周华伟教授和中国石油东方地球物理公司物探技术研究中心的赵波在研究期间所给予的指导和帮助。感谢西南石油大学地球科学与技术学院的研究生何永川、李勇军以及陈彩玲等协助完成资料的收集与整理。最后还要向本书所引用文献的作者表示感谢,感谢他们的艰辛付出以及为地球物理技术发展所做出的贡献。

由于作者试图对地震波形反演所涉及的理论与实践做较为全面的展示,需要考虑很多抽象的专业术语概念和错综复杂的逻辑关系,所以书中难免存在错误和不妥之处,期待读者在阅读的同时能给予批评指正。

作 者

2015年于西南石油大学

Preface

Seismic full waveform inversion (FWI) is the last-course procedure for extracting quantitative physical information of underground medium from seismograms. FWI is likely to be a self-contained processing workflow that can reunify macromodel building and migration, therefore it provides a useful tool for high-resolution imaging in exploration geophysics. In the early 1980s, the pioneering work of Lailly and Tarantola, which established a theoretical foundation for FWI, however, did not arouse public attention at that time due to the lack of computing devices, acquisition systems and numerical methods. In 1990s, the contribution from Pratt and Shin on the inversion and forward problems made FWI from the realms of theory into reality. Nowadays, FWI has been a hot spot in the field of geophysical research and sought after by oil and gas industries and institutes at home and abroad. FWI has obtained extensive research results, from two dimensions to three dimensions, from monoparameter to multiparameter, from acoustic medium to elastic, viscous and anisotropy medium. Besides, it has involved theories and methods in computer science and information processing. At the present stage, the geophysical researchers should open their mind to the development of FWI, and guide this technology in productive practice.

The content of this book is divided into five parts: Chapter 1 introduces the basic knowledge of mathematics and physics; Chapter 2 focus on the algorithm for seismic forward modeling; Chapter 3 presents the concrete strategies for waveform inversion; Chapter 4 describes some typical examples of FWI; Chapter 5 provides a detailed account of weighted residual method, Born approximation and adjoint-state method. In addition, with a lot of results from literature cited in this book, where there is something similar to (Virieux, 2009) or Virieux (2009) in each chapter, the reader can identify the source in the reference section according to the name and time. Furthermore, when referring to the name of foreign persons, the names are all in English to avoid confusion on account of no uniform standard in translation, except for a few known scholars such as Taylor.

During the study of seismic waveform inversion and the publishing of this book, we get funding from the China National Natural Science Foundation (project number: 41274140) and supports from Southwest Petroleum University, so we express our sincere gratitude here.

Thanks to professor Zhou Huawei, the Department of Earth and Atmospheric Sciences, Houston University, USA, and Zhao Bo, Research Center of Geophysical Technology, PetroChina Orient Geophysical Company, for their guidance and help during the study. Thanks to graduate student He Yongchuan, Li Yongjun and Chen Cailing from School of Geoscience and Technology, Southwest Petroleum University for data collection and collation. Finally,

thank all the authors of the literatures which are cited in this book, their work and contribution to the development of the geophysical technology should be respected and remembered by the world.

Because we try to comprehensively demonstrate the theory and practice involved in the waveform inversion, which need to consider professional terms and logical relations, there might be mistakes and inadequacies in the book. We expect the reader to give valuable comments while reading.

Author

2015 at Southwest Petroleum University

目 录

第 1 章 数理基础	1
1.1 向量	1
1.1.1 向量定义	1
1.1.2 向量空间	1
1.1.3 向量运算	1
1.1.4 向量长度	2
1.1.5 向量组的相关性	2
1.1.6 向量范数	3
1.2 矩阵	3
1.2.1 矩阵定义	3
1.2.2 矩阵运算	4
1.2.3 矩阵的逆	5
1.2.4 矩阵范数	6
1.2.5 线性变换	6
1.3 函数分析	6
1.3.1 线性函数	6
1.3.2 线性泛函	7
1.3.3 二项式定理	7
1.3.4 泰勒级数展开	7
1.3.5 切比雪夫多项式	8
1.3.6 贝塞尔函数	9
1.3.7 函数梯度	10
1.3.8 散度和旋度	10
1.3.9 雅可比矩阵	11
1.3.10 海森矩阵	11
1.3.11 傅里叶变换	12
1.3.12 拉普拉斯变换	12
1.4 线性方程组求解	13
1.4.1 方程组分类	13
1.4.2 适定方程	13
1.4.3 超定方程	13
1.4.4 欠定方程	14
1.4.5 混定方程	14

1.4.6	方程的稳定性	15
1.4.7	广义逆法	16
1.5	波动力学	16
1.5.1	力学基础	16
1.5.2	虎克定律	18
1.5.3	波动方程	18
第 2 章	地震正演	20
2.1	直接方法	22
2.1.1	数学表达	22
2.1.2	时间积分	24
2.1.3	空间导数的计算	29
2.1.4	频率域数值模拟	46
2.1.5	复杂度分析	62
2.1.6	震源实现	69
2.1.7	边界条件	73
2.1.8	吸收边界	74
2.1.9	正演实例	78
2.2	积分方程方法	84
2.2.1	惠更斯原理	84
2.2.2	域积分方程方法	84
2.2.3	边界积分方程方法	86
2.2.4	单程波近似法	87
2.2.5	单程波法正演实例	89
2.3	射线追踪方法	90
2.3.1	程函和传输方程	91
2.3.2	构建渐近解	93
2.3.3	数值方法	96
2.3.4	界面	99
2.3.5	渐近法正演实例	100
2.4	小结	102
第 3 章	波形反演	103
3.1	简介	103
3.2	FWI 中的正演	108
3.2.1	数学方程	110
3.2.2	模型离散	111
3.3	非线性反演方法	111
3.3.1	梯度法	112

3.3.2	牛顿法	114
3.3.3	高斯-牛顿法	116
3.3.4	Levenberg-Marquardt 方法	117
3.3.5	共轭梯度法	118
3.3.6	无约束优化问题的 BFGS 方法	121
3.4	局部优化 FWI	122
3.4.1	反演问题的线性化	122
3.4.2	最小二乘优化	123
3.4.3	时域 FWI	124
3.4.4	频域 FWI	127
3.5	FWI 的关键特性	136
3.5.1	FWI 的分辨能力	136
3.5.2	反演正则化	139
3.5.3	震源估计	140
3.5.4	最小二乘 FWI 的变型	142
3.5.5	多重网格方法	146
3.5.6	频域反演策略	148
3.5.7	拉普拉斯域波形反演	153
3.5.8	编码震源反演	158
3.5.9	多尺度 FWI	161
3.5.10	反射数据 Born 反演	163
3.5.11	初至层析方法	164
3.5.12	初始模型的建立	168
3.5.13	新算法策略	171
3.5.14	多参数波形反演	173
3.5.15	FWI 的并行实现	173
3.6	应用研究	174
3.6.1	单参数声学 FWI	174
3.6.2	密度	174
3.6.3	衰减	175
3.6.4	弹性参数	176
3.6.5	各向异性	177
3.6.6	三维 FWI	177
3.7	讨论	178
3.8	小结	178
第 4 章	实例分析	180
	实例一、包体模型	180

实例二、观测方式试验	181
实例三、层状模型	182
实例四、全牛顿法反演	184
实例五、多尺度反演	189
实例六、Marmousi-1 速度模型	191
实例七、BP 模型	193
实例八、SEG/EAGE 逆掩断层模型	196
实例九、三维实际地震资料反演	199
实例十、扩展 SEG/EAGE 三维盐丘模型	202
第 5 章 附录	205
附录 A 加权余量法	205
附录 B 嵌套剖分法	208
附录 C Krylov 子空间法	208
附录 D 波场的 Born 和 Rytov 近似	209
附录 E 波场传播中的 WKBJ 近似法	211
附录 F 条件极值问题中的 Lagrange 乘数法	212
附录 G 梯度计算中的伴随状态法	213
附录 H Rytov 波路径	218
参考文献	221
专业术语索引	236

Contents

Chapter 1 Basis of mathematics and physics	1
1.1 Vector	1
1.1.1 Vector definition	1
1.1.2 Vector space	1
1.1.3 Vector operation	1
1.1.4 Vector length	2
1.1.5 Correlation of vector group	2
1.1.6 Vector norm	3
1.2 Matrix	3
1.2.1 Matrix definition	3
1.2.2 Matrix operation	4
1.2.3 Inverse matrix	5
1.2.4 Matrix norm	6
1.2.5 Linear transform	6
1.3 Function analysis	7
1.3.1 Linear function	7
1.3.2 Linear functional	7
1.3.3 Binomial theorem	7
1.3.4 Taylor series expansion	7
1.3.5 Chebyshev polynomial	8
1.3.6 Bessel function	9
1.3.7 Function gradient	10
1.3.8 Divergence and Curl	10
1.3.9 Jacobian matrix	11
1.3.10 Hessian matrix	11
1.3.11 Fourier transform	12
1.3.12 Laplace transform	12
1.4 Solving linear equations	13
1.4.1 Equations classification	13
1.4.2 Fitness equations	13
1.4.3 Overdetermined equations	13
1.4.4 Underdetermined equations	14
1.4.5 Mixed definite equations	14

1.4.6	Stability of equations	15
1.4.7	Generalized inverse method	16
1.5	Wave mechanics	16
1.5.1	Mechanical foundation	16
1.5.2	Hooke's law	18
1.5.3	Wave equation	18
Chapter 2	Seismic modeling	20
2.1	Direct methods	22
2.1.1	Mathematical formulations	22
2.1.2	Time integration	24
2.1.3	Calculation of spatial derivatives	29
2.1.4	Frequency-domain modeling	46
2.1.5	Complexity analysis	62
2.1.6	Source implementation	69
2.1.7	Boundary conditions	73
2.1.8	Absorbing boundaries	74
2.1.9	Modeling examples	78
2.2	Integral equation methods	84
2.2.1	Huygens' principle	84
2.2.2	Domain integral equation method	84
2.2.3	Boundary integral equation method	86
2.2.4	One-way wave approximation	87
2.2.5	Examples of one-way wave modeling	89
2.3	Ray-tracing methods	90
2.3.1	Eikonal and transport equations	91
2.3.2	Constructing asymptotic solution	93
2.3.3	Numerical methods	96
2.3.4	Interfaces	99
2.3.5	Asymptotic modeling examples	100
2.4	Summary	102
Chapter 3	Waveform inversion	103
3.1	Introduction	103
3.2	Forward problems in FWI	108
3.2.1	Mathematical equations	110
3.2.2	Model discretization	111
3.3	Nonlinear inversion methods	111
3.3.1	Gradient method	112

3.3.2	Newton method	114
3.3.3	Gauss-Newton method	116
3.3.4	Levenberg–Marquardt method	117
3.3.5	Conjugate gradient method	118
3.3.6	BFGS method of unconstrained optimization problems	121
3.4	Local optimization of FWI	122
3.4.1	Linearization of inversion problems	122
3.4.2	Least-square optimization	123
3.4.3	Time-domain FWI	124
3.4.4	Frequency-domain FWI	127
3.5	Key features of FWI	136
3.5.1	Resolution of FWI	136
3.5.2	Regularization of inversion	139
3.5.3	Source estimation	140
3.5.4	Variants of least-squares FWI	142
3.5.5	Multigrid method	146
3.5.6	Frequency-domain inversion strategy	148
3.5.7	Waveform inversion in the Laplace domain	153
3.5.8	Inversion using encoded sources	158
3.5.9	Multiscale FWI	161
3.5.10	Born inversion of seismic reflection data	163
3.5.11	First-arrival traveltime tomography method	164
3.5.12	Building starting models	168
3.5.13	New algorithmic strategies	171
3.5.14	Multiparameter FWI	173
3.5.15	Parallel implementation of FWI	173
3.6	Case studies	174
3.6.1	Monoparameter acoustic FWI	174
3.6.2	Density	174
3.6.3	Attenuation	175
3.6.4	Elastic parameters	176
3.6.5	Anisotropy	177
3.6.6	Three-dimensional FWI	177
3.7	Discussion	178
3.8	Summary	178
Chapter 4	Case analysis	180
Case 1	Inclusion model	180

Case 2	Observation system experiments	181
Case 3	Layer model	182
Case 4	Full Newton method inversion	184
Case 5	Multiscale inversion	189
Case 6	Marmousi-1 velocity model	191
Case 7	BP model	193
Case 8	SEG/EAGE overthrust model	196
Case 9	Field seismic data inversion in three dimension	199
Case 10	Extended SEG/EAGE salt model	202
Chapter 5	Appendix	205
	Appendix A Weighted residual method	205
	Appendix B Nested dissection	208
	Appendix C Krylov subspace	208
	Appendix D Born and Rytov approximations	209
	Appendix E WKBJ approximation for wave propagation	211
	Appendix F Lagrange multiplier in conditional extremum problems	212
	Appendix G Adjoint-state method for computing gradient	213
	Appendix H Rytov wavepath	218
References		221
Professional term index		236

第1章 数理基础

1.1 向 量

1.1.1 向量定义

向量也称为矢量,指同时具有大小和方向的量,如作用力。从广义上来说,向量是由若干个参数描述的数学模型或物理量,在本书中用黑正体字符表示,记为

$$\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$$

其中, m_i 是第 i 个向量分量, n 是向量维数。在线性代数中,由矩阵行或列的元素构成的向量,称为行向量或列向量。与向量概念相对的是标量,即只有大小而没有方向的量,如温度。

1.1.2 向量空间

向量空间(或称为线性空间)是指给定域 F ,并在 F 的向量集合 V 上定义两种二元运算:加法和数量乘法,若运算满足下述规则,则向量集合 V 称为域 F 上的向量空间。对于向量集合 V 中的任意元素 \mathbf{x} 、 \mathbf{y} 和 \mathbf{z} ,以及域 F 中的任意数 α 和 β ,向量加法满足:

- (1) 结合律: $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;
- (2) 交换律: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;
- (3) 在 V 中有一元素 $\mathbf{0}$,对于任意向量 $\mathbf{x} \in V$,满足 $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$;
- (4) 对于任意向量 $\mathbf{x} \in V$,都有一个向量 $\mathbf{y} \in V$,使得 $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$;

数量乘法满足:

- (5) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$;
- (6) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$;

数量乘法和向量加法还满足:

- (7) $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$;
- (8) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ 。

1.1.3 向量运算

对于任意两个向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,向量加法定义为

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad (1-1-1)$$

在实线性空间中引入内积,用记号 (\cdot, \cdot) 表示,是 $R^n \times R^n$ 到 R 的映射,或者说是 $2n$ 元的函数,定义为

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \quad (1-1-2)$$

若上式等于 0 ，则称向量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 正交，即垂直。

1.1.4 向量长度

设向量 $\mathbf{x} \in V$ ，则向量 \mathbf{x} 的长度定义为

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \quad (1-1-3)$$

设向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ，则向量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 的距离定义为

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (1-1-4)$$

非零向量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 的夹角记作 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ ，定义为

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \cos^{-1} \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|} \quad (1-1-5)$$

1.1.5 向量组的相关性

对于 n 个具有相同维数的向量组： $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n\}$ ，如果存在不全为零的数 $\alpha_i \in F$ ，使得等式

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0} \quad (1-1-6)$$

成立，则称该向量组线性相关；反之，只有在 α_i 全为零的情况下上式才成立，则称该向量组线性无关。在线性空间中，如果一个向量集合线性相关，则集合内的每一个向量都可以被其他的向量线性表示。

设线性方程组的形式如下：

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = b_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1-1-7)$$

其矩阵形式为

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (1-1-8)$$

其中，

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

另外，方程组 (1-1-7) 的增广矩阵定义为

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

线性方程组 (1-1-7) 有唯一解的充要条件是 $n=m$ ，并且矩阵 \mathbf{A} 的所有行 (列) 向量线性无关。 n 维向量空间中最多只能有 n 个线性无关的向量，任何超过维数 n 的向量组必然线性相关。若对任意的 i 和 j ($i \neq j$)，有 $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0$ ，则称向量组 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ 是正交向量组。正交向量组线性无关。

1.1.6 向量范数

范数是具有“长度”概念的函数。在线性代数、泛函分析以及相关数学领域中，范数是一个函数，为向量空间内所有向量赋予的长度或大小。向量范数是标量，一般用 $\|\cdot\|$ 表示。假设 V 是数域 F 上的向量空间，则向量范数具有如下性质。对于 V 内任意向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} ，

(1) 正定性： $\|\mathbf{a}\| \geq 0$ ，仅当 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 时，等号成立；

(2) 齐次性： $\|\lambda\mathbf{a}\| = |\lambda|\|\mathbf{a}\|$ ， $\lambda \in F$ ；

(3) 三角不等式： $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$ 。

向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的 p -范数定义为

$$L_p = \|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (1-1-9)$$

此外，常用的向量范数还有 $p=1, 2$ 和 ∞ ，分别称为 L_1 ， L_2 和 L_∞ 范数：

(1) $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ ；

(2) $\|\mathbf{x}\|_2 = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$ ；

(3) $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$ 。

1.2 矩 阵

1.2.1 矩阵定义

矩阵是由 m 行 n 列元素排列成的矩形阵列，书中用黑正体字符表示，如式 (1-1-8) 中的矩阵 \mathbf{A} ，其阶数为 $m \times n$ 。如果 $m=1$ ，是行矩阵；如果 $n=1$ ，是列矩阵；当 $m=n$ 时，则称为方阵。对角矩阵则是主对角线以外的元素全为零的矩阵，记为

$$\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \quad (1-2-1)$$