概率论与数理统计全程学习指导

⊙主编　王志刚

中国科学技术大学出版社

概率论与数理统计全程学习指导

主　编　王志刚
副主编　李胜军　邢文雅
王浩华

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是根据教学大纲的基本要求，面向广大学生编写的一本辅导教材，与教材《概率论与数理统计》(潘伟、王志刚主编，高等教育出版社出版)同步. 共分8章，各章均包含5个板块：知识点考点精要，经典例题解析，历年考研真题评析，本章教材习题全解，同步自测题. 适合与教科书配套使用，对相关学习者也有一定的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计全程学习指导/王志刚主编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2015.9

ISBN 978-7-312-03802-0

Ⅰ. 概… Ⅱ. 王… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教学参考资料 ②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 219931 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号 邮编：230026
网址：http://press.ustc.edu.cn

印刷 合肥学苑印务有限公司

发行 中国科学技术大学出版社

经销 全国新华书店

开本 710 mm×1000 mm 1/16

印张 17

字数 343 千

版次 2015 年 9 月第 1 版

印次 2015 年 9 月第 1 次印刷

定价 30.00 元

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象客观规律的数学学科，是大学工学、理学、经济学、管理学、农学等各门类各专业学生必修的一门基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目，通过本课程的学习，学生应掌握概率论与数理统计的基本概念、基本理论和方法，能运用概率论与数理统计方法分析和解决实际问题.

本书是根据教学大纲的基本要求，面向广大学生编写的一本辅导教材，与教材《概率论与数理统计》(海南大学应用数学系潘伟、王志刚主编，高等教育出版社出版)同步. 我们期望本书能帮助读者加深对概率论与数理统计基本内容的理解，掌握解题方法、技巧，达到复习巩固所学内容、培养分析问题和解决问题能力的目的.

本书的章节安排与教材章节一致，每章都分为 5 个板块：

知识考点精要　根据知识要求，列出基本概念、重要定理和主要内容，突出必须掌握的或考试中出现频率高的知识点.

经典例题解析　列举出相关知识的典型例题，题型多样，难度由浅入深，与教材知识点同步，对例题从不同的角度、用多种解法进行讲解，对个别典型例题还做了评注.

历年考研真题评析　精选历年硕士研究生入学考试试题中具有代表性的真题进行详细的分析和解析. 这些例题涉及面广、内容多、技巧性强，可帮助学生提高分析能力，掌握基本概念和理论，开拓解题思路，提高应试水平. 考研真题采用"年份·类别·分值"方式标注，如"(08.3.4)"，说明此题是 2008 年数学三的考题，分值为 4 分；又如"(07.1(3).12)"，说明此题是 2007 年数学一和数学三的考题，分值为 12 分.

本章教材习题全解　针对《概率论与数理统计》教材中的习题，给出了详细的解答，这样能方便读者对照和分析. 需要提醒读者的是，解题能力的提高需要亲自动手多练、多思考，这样我们才能得到真正的锻炼.

同步自测题　旨在进一步强化解题训练，反映考试的重点、难点，培养综合能力和应变能力，巩固和提高复习效果.

本书第 1 章和第 2 章由王志刚执笔，第 3 章和第 4 章由邢文雅执笔，第 5 章和

第 6 章由李胜军执笔，第 7 章和第 8 章由王浩华执笔，全书由王志刚整理和定稿. 在本书编写的过程中，得到了海南大学数学系全体老师的大力支持和帮助，很多兄弟院校数学系老师也给予了宝贵的意见，在此表示衷心的感谢!

由于编者水平有限，书中存在错漏之处在所难免，恳请同行和广大读者批评指正.

本书的出版得到了中西部高校提升综合实力工作资金项目、海南省自然科学基金项目(编号 20151002)及海南省教改项目(编号 Hnjg2015-20)的资助，在此表示感谢.

编　者

2015 年 3 月于海南大学

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

本章学习要点

① 了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，重点掌握事件的关系与运算.

② 理解概率与条件概率的概念，掌握概率的基本性质，能够利用古典概型和几何概型计算一些事件的概率.

③ 掌握利用概率的加法公式、条件概率公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式计算事件概率的方法.

④ 理解事件独立性的概念，掌握利用事件独立性计算事件概率的方法.

⑤ 理解独立重复试验的概率，掌握利用伯努利概型计算事件概率的方法.

1.1　知识点考点精要

1.1.1　随机试验与随机事件

1. 随机事件

(1) 随机试验

如果试验满足下列三个特征，则称之为随机试验，简称**试验**，用字母 E 表示：

① 可重复性. 试验可以在相同的条件下重复进行.

② 可观测性. 每次试验的所有可能结果都是明确的、可观测的，并且试验的可能结果有两个或更多个.

③ 随机性. 每次试验将要出现的结果是不确定的，试验之前无法预知哪一个结果出现.

(2) 样本空间

用 Ω 表示随机试验 E 的所有可能结果组成的集合，称为**样本空间**；用 ω 表示随机试验 E 的可能结果，称为**样本点**.

(3) 随机事件

称随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的随机事件，简称为**事件**，用大写字

母 A,B,C 等表示.特别地,由一个样本点组成的单点子集,称为**基本事件**.样本空间 Ω 作为它自身的子集,包含了所有的样本点,每次试验总是发生,称为**必然事件**.空集$\varnothing$作为样本空间的子集,不包含任何样本点,每次试验都不发生,称为**不可能事件**.

2. 事件之间的相互关系与运算

(1) 事件之间的四种关系

具体如表 1.1 所示.

表 1.1 事件之间的四种关系

关 系	符 号	概率论	集合论
包含关系	$A\subseteq B$	事件 A 发生必有事件 B 发生	A 是 B 的子集
等价关系	$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
互斥关系(即互不相容关系)	$AB=\varnothing$	事件 A 与事件 B 不能同时发生	A 与 B 无公共元素
对立关系	$\bar{A}$	事件 A 的对立事件	A 的余集

(2) 事件之间的三种运算

具体如表 1.2 所示.

表 1.2 事件之间的三种运算

运 算	符 号	概率论	集合论
事件的和(并)	$A+B$(或 $A\cup B$) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$	事件"A 与 B 至少有一个发生" 事件"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生"	A 与 B 的并集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并集
事件的积(交)	$A\cap B$(或 AB) $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$	事件"A 与 B 同时发生" 事件"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"	A 与 B 的交集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交集
事件的差	$A-B$	事件"A 发生而 B 不发生"	A 与 B 的差集

1.1.2 随机事件的概率

1. 概率的公理化定义

设试验 E 的样本空间为Ω,如果对 E 的每一个事件A,都有唯一的实数 $P(A)$ 与之对应,并且 $P(A)$满足下列条件:

① 非负性.对于任一事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$.

② 规范性.对于必然事件 Ω,$P(\Omega)=1$.

③ 可列可加性.对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$(即当 $i \neq j$ 时,有 $A_iA_j = \varnothing, i, j = 1, 2, \cdots$),有 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

2. 概率的性质

① 对于不可能事件$\varnothing$,有 $P(\varnothing)=0$.

② 对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$(即当 $i \neq j$ 时,有 $A_iA_j = \varnothing, i, j = 1, 2, \cdots, n$),有 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

③ 对于任一事件 A,有 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

④ 如果事件 $A \subset B$,则有 $P(A) \leqslant P(B)$,且 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

⑤ 对任一事件 A,有 $P(A) \leqslant 1$.

⑥ 对于任意两个事件 A 与 B,有 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

3. 古典概型

如果随机试验 E 满足下列两个条件:

① 有限性.试验 E 的基本事件总数是有限个.

② 等可能性.每一个基本事件发生的可能性相同.

则称试验 E 为古典概型(或等可能概型),且

$$P(A) = \frac{A\text{ 包含的基本事件个数}}{\Omega\text{ 包含的基本事件总数}}$$

4. 几何概型

如果试验相当于向面积为 $S(\Omega)$的平面区域 Ω 内任意投掷一点,而这个点(称为随机点)落在 Ω 内任意一点的可能性相等,进而随机点落在 Ω 内任意子区域 A 的可能性大小与 A 的面积成正比,而与 A 的位置和形状无关,我们称这样的试验为平面上的**几何概型**,且

$$P(A) = \frac{A\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}$$

5. 条件概率

设 A 和 B 是试验 E 的两个事件,且 $P(A)>0$,称

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.容易验证,条件概率 $P(B \mid A)$满足概率定义中的三个条件.

1.1.3　计算公式

1. 概率的加法公式

对于任意两个事件 A 与 B,有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

特别地，若事件 A 与 B 互不相容，则有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

加法公式可以推广到有限个事件的情形. 例如，对任意三个事件 A, B, C，有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$

2. 概率的乘法公式

对于任意两个事件 A 和 B，如果 $P(A) > 0$，则有

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

对称地，如果 $P(B) > 0$，由 $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$，有

$$P(AB) = P(B)P(A|B)$$

上述两式称为概率的**乘法公式**. 对于有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，当 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \neq 0$ 时，有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

3. 全概率公式和贝叶斯公式

设试验 E 的样本空间为 Ω，事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，并且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为试验 E 的**完备事件组**（或样本空间 Ω 的一个**分割**）. 如果 $P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，则对于 E 中的任一事件 B，有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

此式称为全概率公式，它是概率论的基本公式.

设试验 E 的样本空间为 Ω，事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为试验 E 的完备事件组，且 $P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$. 对于任一事件 B，如果 $P(B) > 0$，有

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

此式称为**贝叶斯(Bayes)公式**，也称为逆概率公式.

1.1.4 事件的独立性

1. 两个事件的独立性

设 A 和 B 是同一试验 E 的两个事件，如果

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件 A 与事件 B **相互独立**.

关于事件的独立性有下面的结论：

① 若 $P(A) > 0$，则 A 与 B 相互独立的充分必要条件为 $P(B|A) = P(B)$.

② 若 A 与 B 相互独立，则 $\bar{A}$ 与 B，A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立.

③ 若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则"A 与 B 相互独立"和"A 与 B 互不相容"不能同时成立.

2. 多个事件的独立性

设 A,B,C 是同一试验 E 中的三个事件，如果 A,B,C 满足以下两个条件：

① $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(BC)=P(B)P(C)$，$P(AC)=P(A)P(C)$（此时称事件 A,B,C 两两独立）.

② $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$.

则称事件 A,B,C 相互独立.

更一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是同一试验 E 中的 n 个事件，如果对于任意正整数 k 以及这 n 个事件中的任意 k 个（$2\leqslant k\leqslant n$）事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}$，都有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

成立，则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

1.1.5　伯努利(Bernoulli)概型

将同一试验重复进行 n 次，如果每次试验中各结果发生的概率不受其他各次试验结果的影响，则称这 n 次试验是独立试验（或相互独立的）；如果试验 E 只有两个结果 A 和 $\bar{A}$，则称该试验为**伯努利试验**；将一个伯努利试验 E 独立地重复进行 n 次，称这 n 次试验为 n **重伯努利概型**（或 n **重伯努利试验**），简称为**伯努利概型**.

在 n 重伯努利概型中，事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

此式通常称为二项概率公式.

伯努利概型是应用十分广泛的模型之一，该模型具有如下三个特点：

① 一次试验中只有 A 发生和 $\bar{A}$ 发生两种可能结果.

② 各次试验中事件 A 发生的概率都相同，比如 $P(A)=p(0<p<1)$.

③ 各次试验是相互独立的.

1.2　经典例题解析

1.2.1　基本题型 Ⅰ——随机事件之间的关系及其运算

【例 1.1】 设袋中有大小相同的 10 个球，3 个红球，2 个黑球，5 个白球，从中

无放回地任取 2 次，每次取 1 个，以 A_k,B_k,C_k 分别表示第 $k(k=1,2)$ 次取得红、黑、白球，用 A_k,B_k,C_k 表示下列事件：

(1) 所取的两个球有黑球.

(2) 仅取得一个黑球.

(3) 第二次取得黑球.

(4) 没取得黑球.

(5) 最多一个黑球.

(6) 有黑球而无红球.

(7) 取得球的颜色相同.

【解】 (1)“有黑球”与“至少一个黑球”是相等的两个事件，因此“有黑球”可表示为 B_1+B_2(或 $B_1B_2+B_1C_2+B_1A_2+A_1B_2+C_1B_2$).

(2)“仅取得一个黑球”可表示为 $B_1\bar{B}_2+\bar{B}_1B_2$(或 $B_1A_2+B_1C_2+A_1B_2+C_1B_2$).

(3)“第二次取得黑球”可表示为

$$(A_1B_2+B_1B_2+C_1B_2)=(A_1+B_2+C_1)B_2=B_2$$

(4)“没黑球”的对立事件是“有黑球”，可表示为$\overline{B_1+B_2}=\bar{B}_1\bar{B}_2$.

(5)“最多一个黑球”的对立事件为“都是黑球”，该事件可以表示为$\overline{B_1B_2}=\bar{B}_1+\bar{B}_2$.

(6)“有黑球而无红球”可以表示为 $B_1\bar{A}_2+\bar{A}_1B_2$(或 $B_1C_2+C_1B_2+B_1B_2$).

(7)“颜色相同”可以表示为 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2$.

【例 1.2】 设 A,B 是任意两个随机事件，则 $P\{(\bar{A}\cup B)(A\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})(A\cup\bar{B})\}=$__________.

【分析】 由事件的运算及其性质，$(\bar{A}\cup B)(A\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})(A\cup\bar{B})=\varnothing$，因此应填 0.

1.2.2 基本题型Ⅱ——古典概型与几何概型

【例 1.3】 (90.4.5)从 0,1,2,…,9 等十个数字中任取三个数字，求下列事件的概率. $A_1=\{$三个数字中不含 0 和 5$\}$；$A_2=\{$三个数字中含 0 但不含 5$\}$；$A_3=\{$三个数字中不含 0 或 5$\}$.

【解】 随机试验是从十个数字中任取三个数字，样本空间的样本点总数为 C_{10}^3.

如果取得的三个数字不含 0 和 5，则这三个数字必须在其余八个数字中取得，因此，A_1 所包含的样本点总数为 C_8^3，从而

$$P(A_1)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$$

如果取得的三个数字含0，再在其余的9个数字中取两个数字，这样有可能取到5，再将取到5的$C_2^2C_8^1$种情况去掉，得到A_2所包含的样本点数为$C_1^1C_9^2-C_2^2C_8^1$，从而

$$P(A_2)=\frac{C_1^1C_9^2-C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{30}$$

如果记B为事件"取得三个数字中不含0"，C为事件"取得三个数字中不含5"，则$A_3=B\cup C$，从而

$$P(A_3)=P(B)+P(C)-P(BC)=\frac{C_9^3}{C_{10}^3}+\frac{C_9^3}{C_{10}^3}-\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}$$

【例1.4】　(92.3.3)将C,C,E,E,I,N,S七个字母随机地排成一行，恰好排成英文单词SCIENCE的概率为__________.

【分析】　设所求概率为$P(A)$，将七个字母任意排成一行，其全部等可能的排法为7!，事件A的样本点数为$2!\times2!$，因此，$P(A)=\frac{2!\times2!}{7!}=\frac{1}{1260}$.

【例1.5】　一批产品共200个，其中有6个废品，现任取3件产品，求其中恰好有k件废品的概率.

【解】　样本点总数为C_{200}^3，事件A表示"任取3件产品恰好有k件废品"，则A所包含的样本点数为$C_6^kC_{194}^{3-k}(k=0,1,2,3)$，因此

$$P(A)=\frac{C_6^kC_{194}^{3-k}}{C_{200}^3}\quad(k=0,1,2,3)$$

【例1.6】　k个坛子各装n个球，编号为$1,2,\cdots,n$，从每个坛子中各取一个球，计算所取得的k个球中最大号码为$m(1\leqslant m\leqslant n)$的概率.

【分析】　设事件A表示"取到的k个球中最大编号为m"，如果每个坛子都从1至m号球中取一个，则k个球中最大编号不超过m，这种取法共有m^k种等可能取法；如果每个坛子都从1至$m-1$号球中取一个，则k个球中最大编号不超过$m-1$，其等可能取法共有$(m-1)^k$种，因此

$$P(A)=\frac{m^k-(m-1)^k}{n^k}$$

【例1.7】　(07.1(3).4)在区间(0,1)中随机取两个数，则两数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$的概率为__________.

【分析】　设所取两个数分别为x,y，以x表示横坐标、y表示纵坐标的点(x,y)随机地落在边长为1的正方形内(如图1.1所示)，设事件A表示"所取两个数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$"，则样本空间$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$，事件$A$的样本点集合的区域为$G=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1,|x-y|<\frac{1}{2}\}$，所

求的概率为

$$P(A)=\frac{S_G}{S_\Omega}=\frac{3}{4}$$

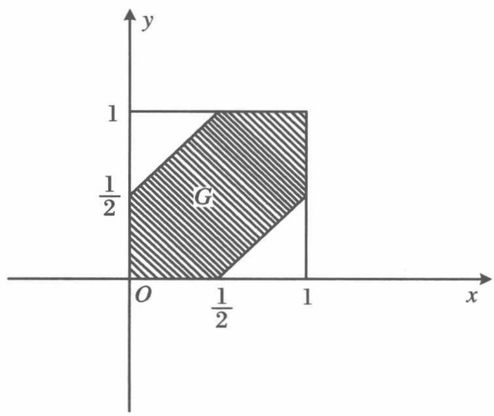

图 1.1

1.2.3　基本题型Ⅲ——概率与条件概率的性质和基本公式

【例 1.8】　(09.3.4)设事件 A 与事件 B 互不相容,则(　　).

(A) $P(\bar{A}\bar{B})=0$　　　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(\bar{A})=1-P(B)$　　　　(D) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$

【分析】　因事件 A 与事件 B 互不相容,即 $AB=\varnothing$,则 $\overline{AB}=\Omega$,于是 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=P(\Omega)=1$,选(D).

【例 1.9】　(92.1.3)已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=0$,$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$,则事件 A,B,C 全不发生的概率为________.

【解】　A,B,C 全不发生为事件 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$,由事件之间的关系和概率基本公式,有

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})&=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)\\&\quad-P(AC)+P(ABC)]\\&=1-\left(\frac{1}{4}\times 3-\frac{1}{16}\times 2\right)=\frac{3}{8}\end{aligned}$$

【例 1.10】　设随机事件 A,B 满足 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$,且 $P(A)=p$,则 $P(B)=$________.

【解】　　$P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$

因此 $P(A)+P(B)=1$,有 $P(B)=1-p$.

【例 1.11】 A,B 为两个随机事件,则一定有(　　).

(A) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$　　(B) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=0$

(C) $0<P(\bar{A}\cup\bar{B})<1$　　(D) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-P(AB)$

【分析】 当 $P(A)+P(B)>1$ 时,$P(\bar{A}\cup\bar{B})=2-[P(A)+P(B)-P(\bar{A}\bar{B})]<1$,(A)不成立;当 $P(AB)<1$ 时,$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)>0$,不能选(B);当 A,B 对立时,$P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$,不能选(C).故选(D),事实上,$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)$.

【例 1.12】 A,B 为两个随机事件,又 $A\supset B$,$P(B)>0$,则下列正确的是(　　).

(A) $P(B|A)\geqslant P(A)$　　(B) $P(B|A)\leqslant P(A)$

(C) $P(B|A)\geqslant P(B)$　　(D) $P(B|A)\leqslant P(B)$

【分析】 由 $A\supset B$,有 $AB=B$,又 $0<P(B)\leqslant P(A)\leqslant 1$,有

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}\geqslant P(B)$$

选(C).

【例 1.13】 (96.3.3)已知 $0<P(B)<1$,$P\{(A_1+A_2)|B\}=P(A_1|B)+P(A_2|B)$,则下列正确的是(　　).

(A) $P\{(A_1+A_2)|\bar{B}\}=P(A_1|\bar{B})+P(A_2|\bar{B})$

(B) $P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$

(C) $P(A_1+A_2)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$

(D) $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

【分析】 有

$$\frac{P\{(A_1+A_2)B\}}{P(B)}=\frac{P(A_1B)}{P(B)}+\frac{P(A_2B)}{P(B)}$$

$$\frac{P(A_1B+A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_1B)+P(A_2B)}{P(B)}$$

因 $P(B)>0$,有 $P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$.选(B).

【评注】 有的考生错误地选择(D),认为是全概率公式,但是忽视了全概率公式中要求作为条件的事件 A_1,A_2 应满足 $P(A_1)>0$,$P(A_2)>0$,且 A_1,A_2 是对立事件.

1.2.4　基本题型Ⅳ——利用全概率公式和贝叶斯公式计算概率

【例 1.14】 (93.1.3)一批产品共有 10 件正品和 2 件次品,任意抽取两次,每

次抽一个,抽出后不放回,则第二次抽出的是次品的概率为__________.

【分析】 记 A 表示“第一次抽出的是次品”,B 表示“第二次抽出的是次品”,则 $B=AB+\bar{A}B$,由全概率公式,有

$$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid \bar{A})$$
$$=\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}+\frac{10}{12}\times\frac{2}{11}=\frac{1}{6}$$

注 可直接利用抽签公平性得到答案.

【例 1.15】 某种仪器由三个部件组装而成,假设各部件质量互不影响且它们的优质品率分别为 0.8,0.7 与 0.9,已知如果三个部件都是优质品,则组装后仪器一定合格;如果有一个部件不是优质品,则组装后的仪器不合格率为 0.2;如果有两个部件不合格,则仪器的不合格率为 0.6;如果三个部件都不是优质品,则组装仪器的不合格率为 0.9.

(1) 求仪器的不合格率.

(2) 如果已发现一台仪器不合格,问它有几个部件不是优质品的概率最大.

【解】 设事件 B 表示“仪器不合格”,事件 A_i 表示“仪器上有 i 个部件不是优质品”,$i=0,1,2,3$,显然 A_0,A_1,A_2,A_3 构成完备事件组,且

$$P(B\mid A_0)=0,\quad P(B\mid A_1)=0.2,\quad P(B\mid A_2)=0.6,\quad P(B\mid A_3)=0.9$$
$$P(A_0)=0.8\times0.7\times0.9=0.504$$
$$P(A_1)=0.2\times0.7\times0.9+0.8\times0.3\times0.9+0.8\times0.7\times0.1=0.398$$
$$P(A_3)=0.2\times0.3\times0.1=0.006$$
$$P(A_2)=1-0.504-0.398-0.006=0.092$$

(1) 应用全概率公式,有

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=0.1402$$

(2) 应用贝叶斯公式,有

$$P(A_0\mid B)=0$$
$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}=\frac{796}{1402}$$
$$P(A_2\mid B)=\frac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{P(B)}=\frac{552}{1402}$$
$$P(A_3\mid B)=\frac{P(A_3)P(B\mid A_3)}{P(B)}=\frac{54}{1402}$$

从计算结果看,一台不合格的仪器中有一个部件不是优质品的概率最大.

1.2.5 基本题型Ⅴ——事件的独立性与独立重复试验

【例 1.16】 (03.3.4)将一枚硬币独立地掷两次,引进事件:$A_1=\{$掷第一次出