

“十一五”国家重点图书出版规划项目

20

□ 数学文化小丛书

李大潜 主编

千古第一定理

——勾股定理

○ 蔡宗熹



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

“十一五”国家重点图书出版规划项目

数学文化小丛书

李大潜 主编

千古第一定理

Qiangu Di-yi Dingli

—勾股定理

蔡宗熹



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

数学文化小丛书. 第2辑: 全10册 / 李大潜主编.
-- 北京: 高等教育出版社, 2013. 9

ISBN 978-7-04-033520-0

I. ①数… II. ①李… III. ①数学-普及读物 IV.
① O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 226474 号

策划编辑	李蕊	责任编辑	张耀明	封面设计	张楠
责任绘图	吴文信	版式设计	王艳红	责任校对	杨雪莲
责任印制	朱学忠				

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	北京信彩瑞禾印刷厂	网上订购	http://www.landaco.com
开 本	787 mm×960 mm 1/32		http://www.landaco.com.cn
总印张	28.125		
本册印张	4.25	版 次	2013年9月第1版
本册字数	80千字	印 次	2013年11月第2次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	80.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 12-2437-48

数学文化小丛书编委会

- 顾问：谷超豪（复旦大学）
项武义（美国加州大学伯克利分校）
姜伯驹（北京大学）
齐民友（武汉大学）
王梓坤（北京师范大学）
- 主编：李大潜（复旦大学）
- 副主编：王培甫（河北师范大学）
周明儒（徐州师范大学）
李文林（中国科学院数学与系统科学研究院）
- 编辑工作室成员：赵秀恒（河北经贸大学）
王彦英（河北师范大学）
张惠英（石家庄市教育科学研究所）
杨桂华（河北经贸大学）
周春莲（复旦大学）
- 本书责任编辑：杨桂华

数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的. 数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学, 而且更是一种先进的文化. 它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用, 是人类文明的一个重要支柱.

要学好数学, 不等于拼命做习题、背公式, 而是要着重领会数学的思想方法和精神实质, 了解数学在人类文明发展中所起的关键作用, 自觉地接受数学文化的熏陶. 只有这样, 才能从根本上体现素质教育的要求, 并为全民族思想文化素质的提高夯实基础.

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多, 更远未引起各方面足够的重视, 很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作. 本丛书正是在这样的背景下, 本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的.

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益, 本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对世界的改造方面有某种里程碑意义的主题, 由学有

专长的学者执笔,抓住主要的线索和本质的内容,由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容.每个专题篇幅不长,并相对独立,以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则,有的专题单独成册,有些专题则联合成册.

希望广大读者能通过阅读这套丛书,走近数学、品味数学和理解数学,充分感受数学文化的魅力和作用,进一步打开视野、启迪心智,在今后的学习与工作中取得更出色的成绩.

李大潜

2005年12月

引 言

千古第一定理——勾股定理是人类最早发现并用于生产、观天、测地的第一个定理。

勾股定理是数学中第一个最伟大的定理：它是联系数学中最基本、最原始的两个对象——数与形的第一定理；它导致不可公度量的发现，揭示了无理数与有理数的区别，引发了第一次数学危机；它开始把数学由计算与测量的技术转变为论证与推理的科学；它的公式是第一个不定方程，也是最早得出完整解答的不定方程。清代著名数学家梅文鼎在《弧三角举要》自序中说：“全部曆书皆弧三角之理，即皆勾股之理。”《畴人传》中也说：“欧罗巴测天专恃三角八线，所谓三角即古之勾股也。”有关勾股定理的上述重大意义与文化价值，书中都将给予介绍。

有人把勾股定理视为几何学中光彩夺目的明珠，供人欣赏而千古不衰。由于它的迷人魅力，千百年来人们冥思苦索给出多达三百多种的证明，是证明方法第一多的定理。这些证明既验证了勾股定理又大大地丰富了研究问题的思想和技巧。笔者自 1973 年被借用在安徽省教育局编写五年制中学数学教材时，开始收集勾股定理的各种证明与应用，受益匪浅。本书结合证者历史与证题技巧分节分类重点介

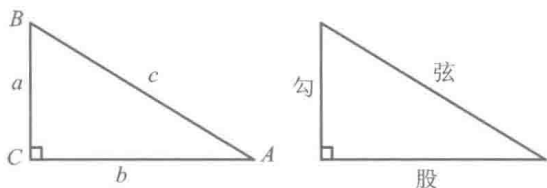
绍 30 多种证明, 有的证明特别简单, 有的证明极其精彩.

数学大师苏步青院士, 中学时对欧氏几何的一个定理给出 24 种证明, 他常教导学生一题多解是学习数学的好方法. 为倡导苏先生的“一题多解”领会数学的思想方法和精神实质, 通过证明勾股定理是最好的实践.

2002 年国际数学家大会在北京召开, 大会的会标就是三国时期赵爽证明勾股定理的“弦图”; 中国科学院数学与系统科学研究院的院标也是“弦图”, 足见数学家对勾股定理的敬重.

勾 股 定 理

直角三角形中，两条直角边的平方之和等于斜边的平方。



若直角三角形两直角边分别记为 a , b , 斜边记为 c , 那么

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

古代将直角三角形中短的直角边称为勾，长的直角边称为股，斜边称为弦，则勾股定理为

$$\text{勾}^2 + \text{股}^2 = \text{弦}^2.$$

目 录

引言

勾股定理

一、《周髀算经》上的勾股定理	1
二、禹之治水与勾股测量术	12
三、小学生能听明白的证明	20
四、中国古代数学家的证明	29
五、文明古国对定理的贡献	46
六、《几何原本》上的勾股定理	56
七、勾股定理其他证明种种	64
八、从勾股定理到勾股数组	84
九、从勾股定理到数学危机	93
十、数学大师首书刘徽勾股	100

附录 关于勾股定理的命名及商高是否

证明了勾股定理	114
参考文献	118
致谢	121

一、《周髀算经》上的 勾股定理

勾股定理是初等数学中最重要、最有用的定理，而且是人类文明史上第一个出现的定理。

《周髀算经》成书于公元前2世纪西汉时期，它既是我国最古老的天文学著作，又是最古老的数学著作。该书原名《周髀》，唐初国子监（中国封建时代最高的教育管理机构，也兼指最高学府）的官员认定它是最宝贵的数学遗产并将其列为国子监明算科的教材之首，故改名《周髀算经》。这部著作是用数学讨论“盖天说”宇宙模型，反映了古代天文学与数学的紧密结合。从数学角度上看，《周髀算经》的主要成就是分数运算、勾股定理及其在天文测量中的应用，其中关于勾股定理的论述最为突出。

人类对自然界的认识是随着实践经验的积累而逐步深入的。“盖天说”是古代的一种宇宙学说。最初主张天圆地方，即天体呈圆形像张开的伞，大地呈方形像棋盘；后来更改为天像一个斗笠，地像覆着的盘。天在上，地在下，日月星辰沿天盖而运动。

人类离不开太阳、离不开土地，自然而然关心“盖天说”中的天有多高、地有多广。《周髀》一开篇就记载了西周开国时期（约公元前1100年）周公

姬旦与大夫商高关于天高地广的问答。

周公问商高：天没有阶梯可以攀登，地没有尺子可以度量，请问如何求得天之高地之广呢？商高回答说：“故折矩以为勾广三，股修四，径隅五。”即按勾三股四弦五的比例去算（注：广者阔也；修者长也；隅者边也）。

什么是“勾”、“股”呢？我国古代，人们把弯成直角的手臂似的三角形的上半部分短的直角边称为“勾”，下半部分长的直角边称为“股”。当勾长为3，股长为4的时候，直角三角形的斜边（即弦或径隅）长度必定是5，这是勾股定理的特例。

周公又问商高用矩测量的方法。《周髀》首章记载：“周公曰：大哉言数！请问用矩之道。商高曰：平矩以正绳，偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远。环矩以为圆，合矩以为方”。矩是古代人所用的曲尺，由互相垂直的两条直尺在端点连接而成。若矩的一条直尺和铅垂线（准绳）一起垂直地平面，则曲尺的另一条直尺必定在水平的位置。将矩的一条直尺 CE 直立，另一条直尺 AC 放平，如图 1.1，从点 A 仰视高处的一点 P ，视线 AP 与曲尺的 CE 相交于点 B ，由 $\frac{BC}{AC} = \frac{PO}{AO}$ ，那点 P 的高度 PO 有关系式

$$PO = \frac{BC}{AC} \cdot AO.$$

量得 BC 和 AO ，就可以计算出高度 PO 。同理，将直尺 CE 倒过来往下垂，就可以俯视深处的目标而测量它的深度。将矩 ACE 全放在水平面上也可以用来测量两物间的距离。根据商高所说，用矩可以

测量高度、深度和广度，由此可见商高掌握相似勾股形原理是肯定的（史料记载公元前 2100 年，夏禹治水时就已了解并运用相似勾股形原理）。

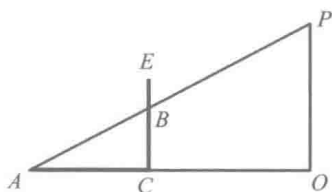


图 1.1

“勾三股四弦五”是勾股定理的特例，确切知道一般勾股定理的是陈子。据《周髀》卷上第二章记载：“昔者荣方问于陈子曰：今者窃闻夫子之道，知日之高大，光之所照，一日所行，远近之数，人所望见，四极之穷，……”。陈子讲了一套测日方法后，说：“若求邪至日者，以日下为句，日高为股，句股各自乘，并而开方除之，得邪至日，从髀所旁至日所十万里”。古代人将勾字写成“句”，与现代句子的“句”一样；邪同斜。

盖天说时期，以为地是平的，从太阳向地平面作垂线，垂足称为日下点。太阳、日下点和观测点三点构成一个直角三角形（即勾股形）。以观测点到日下点的距离为勾，日下点到太阳的距离（即太阳的高）为股，勾、股各自乘，相加起来再开方，即得观测点到太阳的距离（邪至日）。

“勾股各自乘，并而开方除之”，这十一个珍贵的大字是普遍勾股定理在我国的最早记载。这是陈子从天文测量中总结出来的普遍定理。《周髀》中有

很多计算, 陈子等人广泛地应用着勾股定理.

下面介绍陈子的测日方法. 设在 A, B 两处立表 (即“髀”) AA' 和 BB' (如图1.2), 记表高为 h , 表距为 d , 两表日影差为

$$b - a = BD - AC,$$

a, b 所指如图示. 用两表 (髀) 测日影以求日高、日远公式为

$$\text{日高 } SO = H + h = \frac{h \times d}{b - a} + h = \frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{日影差}} + \text{表高};$$

$$\text{日远 } AO = \frac{a \times d}{b - a}.$$

这些计算公式的证明, 将在第 10 节给出.

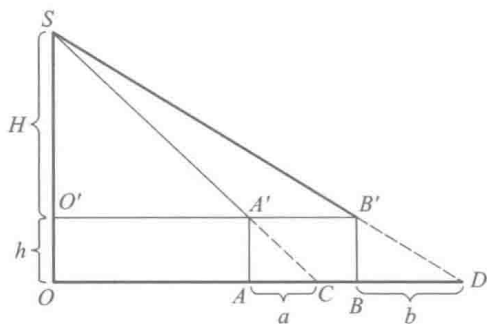


图 1.2

确切知道普遍勾股定理并给出测日方法的陈子是什么年代的人? 这是众所关心的问题. 中国地质学先驱章鸿钊 (1877—1951) 根据天文资料考证出陈子最晚是公元前 6、7 世纪间的人, 可能发现这个普遍勾股定理要比毕达哥拉斯稍早, 至晚也可以说是和毕达哥拉斯同时独立发现^[1] (句末右上角方括号内的

印度—阿拉伯数字，是参考文献的编号)。梁宗巨教授认为“定他是公元前 6、7 世纪时人是恰当的，也就是和毕达哥拉斯大约同时或稍早” [2]。

我桌上有三本数学史权威著作，他们都异口同声地说：商高和《周髀》并未给出勾股定理的证明，《周髀》主要是以文字形式叙述了勾股算法。我国证明勾股定理的第一人是赵爽。

赵爽又名婴，字君卿，约生活于公元 3 世纪初（东汉末至三国时期），吴国人。赵爽学识渊博，熟读《周髀》，仰慕《周髀》，觉得《周髀》意旨简约而深远，言语曲折而中和，担心这部算经由于使人难于理解其意而日久埋没，故为算经作图加注，逐段详细解释经文。他撰写的“勾股圆方图”说，附录于《周髀》首章的注文中，确是我国数学史上具有极高学术价值的文献。文献总结了后汉时期（公元 25—220 年）勾股算术的辉煌成就，文字十分简练，全文只有 530 余字，附图 6 张，阐理透彻。不但对勾股定理和其他关于勾股弦的恒等式给出了相当严格的证明，还对二次方程的解法提出了创新的意见。

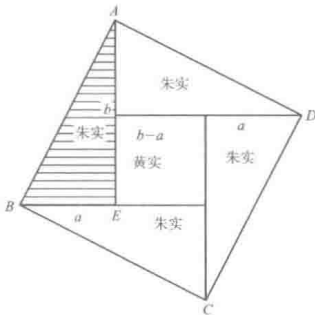


图 1.3

赵爽对勾股定理给出一个漂亮易懂的证明，如图 1.3，“这几乎是一篇无字论文，构思之巧妙，推理之严格、之简洁，令千载后人为之叫绝（王树禾语）”。从赵爽的图 1.3 可以看出正方形 $ABCD$ 的面积 C^2 被剖分为 4 个“朱实”和一个“黄实”，即

$$\begin{aligned} C^2 &= 4 \times \left(\frac{1}{2}ab \right) + (b-a)^2 \\ &= 2ab + b^2 - 2ab + a^2 \\ &= a^2 + b^2, \end{aligned}$$

即直角三角形 ABE 斜边长度的平方等于两直角边长度平方之和。赵爽“勾股圆方图”中的原文是：

句股各自乘，并之为弦实，开方除之即弦。案：弦图又可以句股相乘为朱实二，倍之为朱实四，以句股之差自相乘为中黄实，加差实亦成弦实。

详见图 1.4，勾股圆方图，复制自《中国大百科全书·数学》彩图插页 18；图 1.5 是《周髀算经》宋刻本上的弦图（现存于上海图书馆）。古代人将面积、数的平方和被开方数等称为“实”，赵爽文中“弦实”是指弦长为边的正方形的面积。“弦图”是以弦为方边的正方形，再在其内作四个全等的勾股弦形，各以正方形的边为弦，如图 1.5 或图 1.3。赵爽称勾股弦形的面积为“朱实”，称中间小正方形的面积为“黄实”或“中黄实”。2002 年 8 月，第 24 届国际数学家大会（ICM-2002）在北京召开。图 1.6 是第 24 届大会的会标，其中央图案是经过艺术处理的“弦图”。它标志着中国古代的数学成就和国际数学家对“弦图”的敬重，因为它给出了千古第一定