北京市海淀区教师进修学校
部分教师

海淀全国升学考试题库

精选

初中数学

全国升学考试

海淀题库精选

初中数学

海　浩　主编

黑龙江朝鲜民族出版社

（黑）新登字第3号

责任编辑:姜贤模　朴钟宪
责任校对:郑　善
特约校阅:刘玉环
封面设计:曲　刚

全国升学考试海淀题库精选
初中数学
海浩 主编
*
黑龙江朝鲜民族出版社出版
牡丹江书刊印刷厂印刷
新华书店延边发行所发行
开本 787×1092 毫米 1/16·11.75 印张·280 千字
1997 年 8 月第 1 版 1997 年 10 月第 2 次印刷
印数:30 001—50 000 册

ISBN 7—5389—0678—9/G·117
定价:14.40 元

出版说明

《全国升学考试海淀题库精选》由北京市海淀区教师进修学校高级教师海浩主编。

该书依据现行的教学大纲和中考、高考说明的要求，对以往历届初考、中考、高考试题加以总结，在题山解海中精选精编。

该书主要包括两方面的内容：首先是例题精选与解析。该部分知识主要介绍了解题的关键和技巧，介绍了知识点及其运用，力争达到在掌握基础知识的同时注重能力的培养。其次是习题。习题都按“考试”说明中的知识点和能力要求层次编选，只要做了就能掌握解题的技巧与方法，提高解题的能力，增强解题的准确性，加快解题的速度。

该书三套，共十三册。其中包括小学语文、数学二册；初中语文、数学、物理、化学、英语五册；高中语文、数学、物理、化学、历史、英语六册。

书中若有不当及疏漏之处敬请广大师生批评指正，以便做好修订工作。

编　者

一九九七年六月

目　　录

一、数与式

【例题解析】

例 1　填空：

1. 绝对值最小的整数是__________.　　2. $-2\frac{3}{4}$的倒数的相反数是__________.

3. 绝对值不大于 3 的所有整数是__________.

4. 绝对值大于 1 而小于 $5\frac{1}{2}$的所有的奇数是__________.

5. 若两个数的积为零，则这两个数__________.

6. 若两个非负数的和是零，则这两个数是__________.

7. 一个数的倒数等于它本身，则这个数是__________.

8. 若 $a^2=4$，则 $a^3=$__________.

9. 若 $|x|=1$，$|y|=2$，则 $x-y=$__________.

10. 若 $a<\frac{1}{a}$，则 a 的取值范围是__________，若 $a>\frac{1}{a}$，则 a 的取值范围是__________.

注：此例适用于初一年级.

分析：此例中涉及到有理数的一些基本概念，如倒数、相反数、绝对值、非负数等，在求解中要注意各个概念本身的定义是什么，应用中要注意什么等问题.

解：1. 根据绝对值的定义，正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它们的相反数，零的绝对值是零，所以绝对值最小的整数是零.

2. $\frac{4}{11}$.

3. 设 x 的绝对值不大于 3. ∴　$|x|\leqslant 3$. ∴　$-3\leqslant x\leqslant 3$.

∴　$x=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3$.

4. 设 m 的绝对值大于 1 而小于 $5\frac{1}{2}$.

即　$1<|m|<5\frac{1}{2}$. ∴奇数为 $\pm 3,\pm 5$.

5. 至少一个数为零. 6. 这两个数全为零. 7. ± 1.

8. ∵$(\pm 2)^2=4$. 又　$a^2=4$，∴　$a=\pm 2$. ∴　$a^3=\pm 8$.

9. 答：$\pm 1,\pm 3$.

解：∵　$|x|=1$. ∴　$x=\pm 1$. 同理　$y=\pm 2$.

当 $x=1,y=2$ 时，$x-y=-1$；当 $x=-1,y=2$ 时，$x-y=-3$；

当 $x=1,y=-2$ 时，$x-y=3$；当 $x=-1,y=-2$ 时，$x-y=1$.

10. 答：$0<a<1$ 或 $a<-1$；$a>1$ 或 $-1<a<0$.

解：$\because$ $a<\frac{1}{a}$，$\therefore$ 当 $a>0$ 时，$a^2<1$. 即 $(a+1)(a-1)<0$.

$\therefore$ $-1<a<1$. 又 $a>0$；$\therefore$ $0<a<1$；

当 $a<0$ 时，$a^2>1$，即 $(a+1)(a-1)>0$，$\therefore$ $a>1$ 或 $a<-1$.

$\because$ $a<0$，$\therefore$ $a<-1$.

$\therefore$ 当 $a<\frac{1}{a}$ 时，a 的取值范围是 $0<a<1$ 或 $a<-1$.

同理第二问也可有 $a>1$ 或 $-1<a<0$.

例 2 单选题：

1. 一个数的相反数不小于它本身，则这个数是 ( )：

(A) 负数 (B) 零 (C) 负数或零 (D) 以上都不对

2. 下列语句中，正确的是 ( )

(A) 两个奇数的积是偶数 (B) 两个偶数的积是奇数

(C) 一偶一奇数的积是偶数 (D) 两个连续数的平方差是偶数

3. 若 $|-a|>-a$，则必有 ( )

(A) $a>0$ (B) $a<0$ (C) $a<-1$ (D) $-1<a<0$

4. 若 $\frac{a}{b}>1$，则 a、b 应满足的条件是 ( )

(A) $a>b>0$ (B) $a<b<0$ (C) $a>b>0$ 或 $a<b<0$ (D) 以上都不对

5. 若 $x<-2$，则 $|1-|x+1||$ 的值为 ( )

(A) $-2-x$ (B) $x-2$ (C) $2-x$ (D) x

6. 如图 1—1，a、b 在数轴上的位置如图，化简 $|a+b|-|a-b|-|-b|$ 的结果是 ( )

(A) $-b$ (B) $2a+b$

(C) $-2a+b$ (D) $-3b$

7. 如果 n 是正整数，则 $\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)$ 的值为 ( )

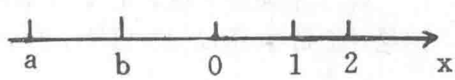

图 1—1

(A) 一定是零 (B) 一定是偶数

(C) 是整数但不一定是偶数 (D) 不一定是整数

8. 一个数四舍五入得到的近似数是 51.90，则它的有效数字为 ( )

(A) 5、1 (B) 9、0 (C) 5、1、9 (D) 5、1、9、0

注：此例也适用于初一年级，且同时适用于中考测试用.

分析：求解选择题，首先要清楚各题中涉及的概念是什么，其次要审好题，明白要求的是什么，最后再依据各题的具体情况选择相应的解法.

解：1. 答：C.

解：$\because$ 一个数的相反数不小于它本身.

即 这个数的相反数大于或等于它本身. 根据相反数的定义，可知，

这个数是负数或零.

2. 答：C.

3. 答：A.

解：若$|-a|>-a$，则　$-a<0$，∴　$a>0$.

4. 答：C.

解：∵　$\frac{a}{b}>1$，∴　a、b同号.

当$a>0$，$b>0$时，且$a>b$，即$a>b>0$；

当$a<0$，$b<0$时，且$a<b$，即$a<b<0$. ∴　应选C.

5. 答：A.

解：∵　$x<-2$，

∴　原式$=|1-[-(x+1)]|=|x+2|=-2-x$

∴　应选A.

6. 答：A.

解：由图示可知

$a<b<0$.

∴　$a+b<0$，$a-b<0$，$-b>0$.

∴　原式$=-(a+b)-(b-a)-(-b)=-b$

∴　应选A.

7. 答：B.

解：设n为偶数时，$1-(-1)^n=1-1=0$. ∴　原式$=0$.

设n为奇数时，设$n=2m+1$.

原式$=\frac{1}{8}\cdot(1+1)[(2m+1)^2-1]=\frac{1}{8}\times2\times[4m(m+1)]=m(m+1)$.

∴　$m(m+1)$为两个连续数的积为偶数.

∴　应选B.

8. 答：D.

例3　填空题：

1. 在数$2.\dot{1}\dot{4}$，$\sqrt{8}$，π，$\frac{22}{7}$，$0.1010010001\cdots\cdots$，$\sqrt{9}$，$\sqrt[3]{4}$，$|\sqrt[n]{-1}|$中，有理数有__________；无理数有__________.

2. 若$|x-y+1|+(x+y-3)^2=0$，则$x^y=$__________.

3. 若$0<x<1$，比较x，$\frac{1}{x}$，x^2的大小为__________$<$__________$<$__________.

4. $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|abc|}{abc}$的值为__________.

5. 若$\sqrt{11-6\sqrt{2}}$的整数部分为a，小数部分为b，则$a+b+\frac{2}{b}=$__________.

注：此例适用于初二年级，且适用于初三中考复习用.

解：1. 有理数有$2.\dot{1}\dot{4}$，$\frac{22}{7}$，$\sqrt{9}$，$|\sqrt[n]{-1}|$；无理数有π，$\sqrt{8}$，$0.1010010001\cdots\cdots$，$\sqrt[3]{4}$.

2. 解：$|x-y+1|+(x+y-3)^2=0$，∴　$|x-y+1|=0$及$(x+y-3)^2=0$.

∴　$\begin{cases}x-y+1=0,\\x+y-3=0.\end{cases}$ ∴　$\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$

$\therefore \quad x^y=1^2=1.$

3. 解：$\because \quad 0<x<1$，$\therefore \quad 0<x^2<x.$

两边同时除以 x，则

$1<\dfrac{1}{x}$. $\therefore \quad x^2<x<\dfrac{1}{x}$.

4. 解：(1)当 a、b、c 均为正数时，原式 $=1+1+1+1=4$；

(2)当 a、b、c 均为负数时，原式 $=-1-1-1-1=-4$；

(3)当 a、b、c 两正一负时，设 $a>0,b>0,c<0$，则原式 $=1+1-1-1=0$；

(4)当 a、b、c 为两负一正时，设 $a<0,b<0,c>0$，则原式 $=-1-1+1+1=0$.

$\therefore$ 由(1)、(2)、(3)、(4)可知，原式的值应为 0 或 ±4.

5. 解：$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{11-2\sqrt{18}}=\sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{2})^2}=|3-\sqrt{2}|=3-\sqrt{2}$

$\therefore \quad a=1, b=(3-\sqrt{2})-1=2-\sqrt{2}$.

$\therefore \quad a+b+\dfrac{2}{b}=1+2-\sqrt{2}+\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}=3-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}=5$

例 4　单选题

1. 若 a 是有理数，b 为无理数，则

(1)$a+b$ 是无理数　(2)$a-b$ 是无理数　(3)ab 是无理数　(4)$\dfrac{a}{b}$是无理数

以上四个命题中，正确命题的个数是　(　　)

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

2. 不同实数 a 与 $2a$ 的大小关系是　(　　)

(A) $a<2a$　(B) $a>2a$　(C) $|a|<|2a|$　(D) 不能确定

3. 对于实数 a，b，下面四个命题中，正确的是　(　　)

(A) 若 $a>b$，则 $a^2>b^2$　(B) 若 $|a|>b$，则 $a^2>b^2$

(C) 若 $a\neq|b|$，则 $a^2\neq b^2$　(D) 若 $a>|b|$，则 $a^2>b^2$

4. 已知 $b<0$，化简 $\sqrt{a^4b^6}$ 等于　(　　)

(A) a^2b^3　(B) $-a^2b^3$　(C) $\pm a^2b^3$　(D) $-a^3b^2$

5. 若 $|x|<3$，化简 $|x+3|-\sqrt{x^2-6x+9}$ 等于　(　　)

(A) 6　(B) $2x$　(C) -6　(D) -2

6. 若使关于 x 的方程 $||x-3|-2|=a$，恰好有三个整数解，则 a 的值为　(　　)

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

注：此例适用于初二年级，也适用于初三总复习.

分析：此例中涉及到实数的概念，如什么是无理数，什么是实数，以及实数的绝对值，比较实数大小的法则以及非负实数等概念.

解：

1. 答：B.

解：$\because$ a 为有理数，b 为无理数，$\therefore$ $a+b$ 与 $a-b$ 均为无理数.

当 $a=0$ 时，$ab=0$，$\dfrac{a}{b}=0$，$\therefore$ (3)、(4)不正确.

$\therefore$ 应选 B.

2. 答：C.

解：$\because\ a$ 与 $2a$ 是两个不同的实数，$\therefore\ a\neq 0$.

若 $a>0$，则 $a<2a$，$\therefore\ |a|<|2a|$.

若 $a<0$，则 $a>2a$，$\therefore\ -a<-2a$. $\therefore\ |a|<|2a|$.

$\therefore$ 应选 C

3. 答：D.

解：$\because\ a>-b$，$\therefore a^2>(-b)^2$ 不对，所以 A 不对；

若 $|a|>-b$，则 $a^2>(-b)^2$ 也不对，故 B 也不对；

若 $-a\neq|b|$，则 $(-a)^2\neq b^2$ 不对，故 C 也不对；

若 $a>|b|$，则 $a>|b|\geqslant 0$. $\therefore\ a^2>|b|^2$，则 $a^2>b^2$.

$\therefore$ 应选 D.

4. 答：B.

$\because\ b<0$，$\therefore\ b^3<0$. $\therefore\ \sqrt{a^4b^6}=-a^2b^3$.

$\therefore$ 应选 B.

5. 答：B.

解：$\because\ |x|<3$，$\therefore\ -3<x<3$.

$\therefore\ x+3>0$ 且 $\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}$ 中，$x-3<0$.

$\therefore$ 原式 $=x+3-[-(x-3)]=2x$

$\therefore$ 应选 B.

6. 答：C.

解：$\because$ 方程有实数解，$\therefore\ a\geqslant 0$. $\therefore\ |x-3|-2=\pm a$.

即 $|x-3|=2+a$, (1)

$|x-3|=2-a$. (2)

$\because$ 方程有三个整数解， $\therefore$ (1)、(2)共有三个整数解.

又 $2+a\geqslant 2-a$， $\therefore\ 2+a>0$，$2-a=0$.

$\therefore\ a=2$.

例 5 用代数式表示下列各题：

1. a、b 的和的绝对值除 a、b 的绝对值的和.

2. a 个人 x 天完成某项工作，$a-b$ 个人完成此项任务需多少天.

3. 十位数字是 x，个位数字是 y 的两位数的相反数的倒数.

注：此例适用于初一年级，也适用于初三总复习.

分析：布列代数式，关键在于要确定它涉及到什么运算及相应的运算顺序，其后利用运算符号连接起来即可，而各种运算与相应的运算顺序都是用文字表达的，因此要理解“和、差、倍、分”及“乘方，开方”“相反数、绝对值、倒数”等的含义及如何正确用符号表达.

解：1. $\dfrac{|a+b|}{|a|+|b|}$. 2. $\dfrac{ax}{a-b}$. 3. $-\dfrac{1}{10x+y}$.

例 6 计算下列各题：

1. $(-x+5+4x^4-2x^3)-(x^3-2x^4+5x-8)$

2. $3a-\{2c-[6a-(c-b)+c+(a+8b-6c)]\}$.

3. $(3a^{n+3}-9a^{n+2}+5a^{n+1}-2a^n)-(-a^n+10^{n+3}-5a^{n+1}-7a^{n+2})$.

4. 已知 $m=3a^2-3b^2+c^2$, $n=a^2-b^2+c^2$, $p=5a^2-2b^2-3c^2$，若 $a=\frac{1}{7}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=-\frac{1}{3}$ 时，求 $m-(n-p)$ 的值.

注：此题适用于初一年级.

分析：整式的加减法关键在于掌握两点，其一是能正确地脱括号，尤其是括号前是负号时更是如此；其二是能正确地确定同类项并能正确地合并，此外一般习惯上把多项式写成降幂或升幂排列的形式，这样既便于运算也便于检验计算结果的正确性.

解：

1. 原式 $=(4x^4-2x^3-x+5)-(-2x^4+x^3+5x-8)$

$=4x^4-2x^3-x+5+2x^4-x^3-5x+8=6x^4-3x^3-6x+13$

2. 原式 $=3a-\{2c-[6a-c+b+c+a+8b-6c]\}=3a-\{2c-[7a-6c+9b]\}$

$=3a-\{8c-7a-9b\}=3a-8c+7a+9b=10a+9b-8c$.

3. 原式 $=3a^{n+3}-9a^{n+2}+5a^{n+1}-2a^n-10^{n+3}+7a^{n+2}+5a^{n+1}+a^n=-7a^{n+3}-2a^{n+2}+10a^{n+1}-a^n$.

4. $m-(n-p)$

$=(3a^2-3b^2+c^2)-[(a^2-b^2+c^2)-(5a^2-2b^2-3c^2)]$

$=3a^2-3b^2+c^2-[a^2-b^2+c^2-5a^2+2b^2+3c^2]$

$=3a^2-3b^2+c^2-a^2+b^2-c^2+5a^2-2b^2-3c^2$

$=7a^2-4b^2-3c^2$.

把 $a=\frac{1}{7}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=-\frac{1}{3}$ 代入，得 $7a^2-4b^2-3c^2=7\times(\frac{1}{7})^2-4\times(\frac{1}{2})^2-3\times(-\frac{1}{3})^2$

$=-\frac{25}{21}$.

例 7　分解因式：

1. $-2x^2y+6x^2y^2+8xy^3$.

2. $(x-2y)(2x+xy)+xy(2y-x)+y(2x-4y)$.

3. $(x+1)^2-9(x-1)^2$.

4. $4a^2c^2-(a^2-b^2+c^2)^2$.

5. $a^6-\frac{1}{64}$.

6. $12x^2+34x-6$.

7. x^6-7x^3-8.

8. $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$.

9. x^3-2x-4.

10. $x^2+xy-6y^2+x+13y-6$.

注：此例适用于初二年级且又适用于初三年级总复习用. 其次由于考虑到篇幅的关系，所以没有把基础题列出来，只是把有些综合性的题目列出来求解.

分析：由于因式分解是整式乘法的逆变形，所以要理解因式分解的目的只在于形变，而不能改变原多项式的大小。在方法的运用上，首先要考虑提取公因式，其次考虑用公式法及十字相乘法，最后考虑用分组分解法. 当然除此之外还有添补项，折项(或裂项)及双十字相乘等方法. 因式分解时还有一个问题必须考虑，即要分解到不能分解为止.

解：

1. $-2x^2y+6x^2y^2+8xy^3=-2xy(x-3xy-4y^2)$.

2. $(x-2y)(2x+xy)+xy(2y-x)+y(2x-4y)$
$=(x-2y)(2x+xy)-xy(x-2y)+2y(x-2y)$
$=(x-2y)[(2x+xy)-xy+2y]=2(x-2y)(x+y)$.
3. $(x+1)^2-9(x-1)^2=[(x+1)+3(x-1)][(x+1)-3(x-1)]$
$=(4x-2)(-2x+4)=-4(2x-1)(x-2)$.
4. $4a^2c^2-(a^2-b^2+c^2)^2=[2ac+(a^2-b^2+c^2)][2ac-(a^2-b^2+c^2)]$
$=[(a^2+2ac+c^2)-b^2][b^2-(a^2-2ac+c^2)]=[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]$
$=(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)$.
5. $a^6-\frac{1}{64}=(a^3)^2-(\frac{1}{8})^2=(a^3+\frac{1}{8})(a^3-\frac{1}{8})$
$=(a+\frac{1}{2})(a-\frac{1}{2})(a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{4})(a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4})$.
另解：$a^6-\frac{1}{64}=(a^2)^3-(\frac{1}{4})^3=(a^2-\frac{1}{4})(a^4+\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{16})$.
$=(a+\frac{1}{2})(a-\frac{1}{2})[(a^4+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{16})-\frac{1}{4}a^2]$
$=(a+\frac{1}{2})(a-\frac{1}{2})(a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{4})(a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4})$.
6. $12x^2+34x-6=(12x-2)(x+3)=2(6x-1)(x+3)$.
7. $x^6-7x^3-8=(x^3-8)(x^3+1)=(x-2)(x^2+2x+4)(x+1)(x^2-x+1)$.
另解：$x^6-7x^3-8=x^6-8x^3+x^3-8=x^3(x^3-8)+(x^3-8)$
$=(x^3-8)(x^3+1)=(x+1)(x-2)(x^2-x+1)(x^2+2x+4)$.
8. $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$
$=x^4(x-1)-2x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^4-2x^2+1)$
$=(x-1)(x^2-1)^2=(x-1)(x+1)^2(x-1)^2=(x-1)^3(x+1)^2$.
另解：$x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=x^3(x^2-x-2)+(2x^2+x-1)$
$=x^3(x-2)(x+1)+(2x-1)(x+1)=(x+1)[x^3(x-2)+(2x-1)]$
$=(x+1)[(x^2+1)(x^2-1)-2x(x^2-1)]$
$=(x+1)(x^2-1)(x^2-2x+1)=(x+1)^2(x-1)^3$.
9. $x^3-2x-4=x^3-8-2x+4$
$=(x-2)(x^2+2x+4)-2(x-2)=(x-2)(x^2+2x+2)$
另解：$x^3-2x-4=x^3+2x^2+2x-2x^2-4x-4$
$=x(x^2+2x+2)-2(x^2+2x+2)=(x^2+2x+2)(x-2)$.
10. $x^2+xy-6y^2+x+13y-6$
$=(x^2+xy-6y^2)+(x+13y)-6=(x+3y)(x-2y)+(x+13y)-6$
$=[(x+3y)-2][(x-2y)+3]=(x+3y-2)(x-2y+3)$.
例 8　填空：
1. 分式$\frac{x+3}{2x^2+13x+6}$有意义，则 x 的取值范围是__________.
2. 分式$\frac{|x|-1}{2x^2+x-1}$的值等于零，则 x 的值等于__________.

注:此例适合于初二,同时也适合于初三总复习.

分析:要确定分式是否有意义,根据分式的定义可知,分式的分母为零时,分式无意义;分母不为零时,分式有意义.因此要确定分母中字母的取值是否使分母为零,其次要使分式为零,它的先决条件是分式有意义时,使分子为零时的字母取值就是使分式为零的字母的值.

解:

1. ∵ 分式有意义. ∴ $2x^2+13x+6\neq 0$. 即 $(2x+1)(x+6)\neq 0$.

∴ $x\neq -\frac{1}{2}$, $x\neq -6$. ∴ 当 $x\neq -\frac{1}{2}$ 且 $x\neq -6$ 时,分式有意义.

2. ∵ 分式等于零, ∴ 令 $|x|-1=0$. ∴ $x=\pm 1$.

∵ $2x^2+x-1\neq 0$. ∴ $(2x-1)(x+1)\neq 0$. ∴ $x\neq \frac{1}{2}$ 且 $x\neq -1$.

∴ 当 $x=1$ 时,分式 $\frac{|x|-1}{2x^2+x-1}$ 的值为零.

例 9 选择题:(四选一)

1. 下列各分式的变形,正确的是 ( )

(A) $\frac{ab}{-a+b}=-\frac{ab}{a+b}$ (B) $\frac{-x}{x-y}=\frac{x}{-x-y}$

(C) $\frac{-a}{2a-b}=\frac{a}{b-2a}$ (D) $\frac{-x+1}{x^2+1}=-\frac{1-x}{x^2+1}$

2. 使分式的分子、分母中字母的最高次项的系数为整数,下列各式求解正确的是 ( )

(A) $\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y}{\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y}=\frac{2x+3y}{3x-2y}$ (B) $\frac{0.1x-1}{0.3x+y}=\frac{x-1}{3x+y}$

(C) $\frac{0.05a+0.1b}{0.2a-0.3b}=\frac{5a+b}{2a-3b}$ (D) $\frac{\frac{1}{2}x^2-0.3y}{\frac{1}{5}x+0.1y^2}=\frac{5x^2-3y}{2x+y^2}$

注:此例适用于初二年级,也适合于初三总复习.

分析:分式本身有两个重要的性质,即有关符号法则与分式的基本性质,这两个性质在应用中最易出问题,因此,要正确理解分式的符号法则及基本性质,任意改变分式、分子、分母的三个符号中的两个,分式的值不变;分子、分母同扩大相同的倍数或缩小相同的倍数,分式的值不变.

解:

1. 在(A)中错把分母中第一项的符号当作分母的符号;在(B)中,分母变号时只改变了其中一项的符号;在(D)中,分子的符号并没有改变而改变了分式本身的符号.

∴ 应选 C.

2. 在(A)中,只是直接把分数改变成整数了;在(B)中,分子、分母各有一项没有扩大相同的倍数;在(C)中,分子、分母中各项扩大的倍数不相同.

∴ 应选 D.

例 10　计算：

1. $(\frac{-a}{3b})^3\div 6a^4b^3\div(-\frac{1}{9ab^2})^2$.

2. $\frac{1+x-y-xy}{1-x^2-y^2+x^2y^2}\cdot\frac{1-x-y^2+xy^2}{1+y}$.

注：此例适用于初二年级，也适用于初三年级.

分析：分式的乘除法类似于分数的乘除法，不同的是要先将分子，分母分解因式，以便于在运算中约分与化简. 除此之外，它还有一个运算顺序问题，即先乘方后乘除.

解：

1. $(\frac{-a}{3b})^3\div 6a^4b^3\div(-\frac{1}{9ab^2})^2$

$=\frac{-a^3}{3^3b^3}\div 6a^4b^3\div(\frac{1}{9^2a^2b^4})=-\frac{a^3}{3^3b^3}\cdot\frac{1}{6a^4b^3}\cdot 9^2a^2b^4=-\frac{a}{2b^2}$.

2. $\frac{1+x-y-xy}{1-x^2-y^2+x^2y^2}\cdot\frac{1-x-y^2+xy^2}{1+y}=\frac{(1+x)-y(1+x)}{(1-x^2)-y^2(1-x^2)}\cdot\frac{(1-x)-y^2(1-x)}{1+y}$

$=\frac{(1+x)(1-y)}{(1-x^2)(1-y^2)}\cdot\frac{(1-x)(1-y^2)}{1+y}=\frac{1-y}{1+y}$.

例 11　计算：

1. $\frac{a^3}{a-b}-a^2-ab-b^2$.

2. $\frac{x^2+3x+3}{x^2+3x+2}-\frac{x^2+3x-2}{4-x^2}+\frac{1+2x-2x^2}{x^2-x-2}$.

3. $\frac{x+4}{x^2+3x+2}+\frac{3x-4}{x^2-x-6}-\frac{2x-2}{x^2-2x-3}$.

注：此例适用于初二年级，同时也适用于初三年级总复习用.

分析：分式相加减. 也类似于分数相加减，即它可分为同分母分式相加减及异分母分式相加减，当是异分母相加减时，要先转化为同分母分式相加减的情况，即要先通分，而通分的前提是要先把分母因式分解，从而确定最简公分母，化为同分母之后就可以直接运算了. 在此例中我们给出了分式相加减的两例较复杂的计算题，从中体会解题方法的选择的重要性.

解：

1. 原式$=\frac{a^3}{a-b}-a^2-ab-b^2=\frac{a^3}{a-b}-\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a-b}=\frac{b^3}{a-b}$.

2. 原式$=\frac{x^2+3x+3}{x^2+3x+2}-\frac{x^2+3x-2}{4-x^2}+\frac{1+2x-2x^2}{x^2-x-2}$

$=\frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x+2)}+\frac{x^2+3x-2}{(x+2)(x-2)}+\frac{1+2x-2x^2}{(x-2)(x+1)}$

$=\frac{(x^2+3x+3)(x-2)+(x^2+3x-2)(x+1)+(1+2x-2x^2)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-2)}$

$=\frac{3x^2+3x-6}{(x+1)(x+2)(x-2)}=\frac{3(x+2)(x-1)}{(x+1)(x+2)(x-2)}=\frac{3x-3}{x^2-x-2}$.

另解：原式$=1+\frac{1}{x^2+3x+2}+(1+\frac{3x+2}{x^2-4})-(2+\frac{3}{x^2-x-2})$

$=\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{3x+2}{(x+2)(x-2)}-\frac{3}{(x-2)(x+1)}$

$=\frac{x-2+3x^2+5x+2-3x-6}{(x+1)(x+2)(x-2)}=\frac{3x-3}{x^2-x-2}$.

3. 原式$=\frac{x+4}{x^2+3x+2}+\frac{3x-4}{x^2-x-6}-\frac{2x-3}{x^2-2x-3}$

$=\frac{x+4}{(x+1)(x+2)}+\frac{3x-4}{(x+2)(x-3)}-\frac{2x-3}{(x+1)(x-3)}$

$=(\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x+2})+(\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x-3})-(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-3})=\frac{2}{x+1}$.

例 12 计算

1. $(\frac{4xy}{x+y}-2x)\div(\frac{4xy}{x+y}-2y)$.

2. $[\frac{x^2+x+1}{x^2-2x+1}-\frac{x^3+1}{(x-1)^2}](x^2-2x+1)$.

注:此例适用于初二年级也适合于初三年级复习用.

分析:对于分式的混合运算而言,它有一个确定运算关系及运算顺序问题,换句话说它是混合运算的关键,一般采用的方法是:先括号内的分式按先乘除后加减的运算;再计算乘除运算,最后是分式的加减运算.除此之外,它本身还有一个方法的选择问题,即按具体题的条件,进行相应的简捷的运算问题.

解:

1. $(\frac{4xy}{x+y}-2x)\div(\frac{4xy}{x+y}-2y)=\frac{4xy-2x^2-2xy}{x+y}\div\frac{4xy-2xy-2y^2}{x+y}$

$=\frac{2x(y-x)}{x+y}\cdot\frac{x+y}{2y(x-y)}=-\frac{x}{y}$.

2. 原式$=[\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}-\frac{x^3+1}{(x-1)^2}]\cdot(x-1)^2$

$=\frac{x^2+x+1-x^3-1}{(x-1)^2}\cdot(x-1)^2=-x^3+x^2+x$.

另解:原式$=\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}(x-1)^2-\frac{x^3+1}{(x-1)^2}\cdot(x-1)^2$

$=x^2+x+1-(x^3+1)=-x^3+x^2+x$.

例 13 已知$(\frac{3x+y}{3x-y}-\frac{3x-y}{3x+y})\cdot(1-\frac{2y}{3x}+\frac{y^2}{9x^2})\div(1-\frac{2y}{3x+y})$,若$x=-\frac{1}{6}$,$y=\frac{3}{2}$,求这个代数式的值.

注:此例适用于初二年级.

分析:与整式的化简求值类似,分式求值问题也需要先化简再求值.

解:原式$=\frac{(3x+y)^2-(3x-y)^2}{(3x+y)(3x-y)}\cdot(1-\frac{y}{3x})^2\cdot\frac{3x+y}{3x-y}$

$=\frac{6x\cdot 2y}{(3x-y)(3x+y)}\cdot(\frac{3x-y}{3x})^2\cdot\frac{3x+y}{3x-y}=\frac{4y}{3x}$.

将$x=-\frac{1}{6}$,$y=\frac{3}{2}$代入,∴ 原式$=\frac{4y}{3x}=\frac{4\times\frac{3}{2}}{3\times(-\frac{1}{6})}=-12$.

例 14 求下列各式的值

1. $\sqrt{(2-x)^2}$. 2. $(\sqrt{(x-3)})^2(x\geqslant 3)$. 3. $|3-2\sqrt{2}|$. 4. $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

注:此例适合于初二年级,初三年级总复习也可以用.

分析:根式化简的依据是$\sqrt{a^2}=|a|$及$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$,所以在应用中要判断用哪一个性质.此外在应用$\sqrt{a^2}$时,要注意当$a$的取值不确定时,需要进行必要的讨论.

解:

1. $\sqrt{(2-x)^2}$

当$2-x>0$时,$\sqrt{(2-x)^2}=2-x$;

当$2-x=0$时,$\sqrt{(2-x)^2}=0$;

当$2-x<0$时,$\sqrt{(2-x)^2}=x-2$.

2. $(\sqrt{(x-3)})^2(x\geqslant 3)$

$\because\ x-3\geqslant 0$,$\therefore\ (\sqrt{x-3})^2=x-3$.

3. $|3-2\sqrt{2}|$

$\because\ \sqrt{2}=1.4144$,$\therefore\ 2\sqrt{2}=2.828$. $\therefore\ 3>2\sqrt{2}$.

即 $3-2\sqrt{2}>0$.

$\therefore\ |3-2\sqrt{2}|=3-2\sqrt{2}$.

4. $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

$=\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}-1$.

说明:在化简类似于$|3-2\sqrt{2}|$时,要注意一般情况下只化简到$|3-2\sqrt{2}|=3-2\sqrt{2}$为止,原因在于$3-2\sqrt{2}$本身就是精确值.

例15 比较下列各组数的大小.

1. $\sqrt{3}$与1.732. 2. $\sqrt{2}$与$\sqrt[3]{4}$. 3. $\sqrt{11}-\sqrt{3}$与$\sqrt{10}-2$.

注:此例适用于初二年级.

解:

1. $\because\ \sqrt{3}\approx 1.732\cdots\cdots$,

$\therefore\ \sqrt{3}>1.732$.

2. $\sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$. 又 $\sqrt[3]{4}=\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[6]{16}$,

$\because\ \sqrt[6]{16}>\sqrt[6]{8}$,$\therefore\ \sqrt{2}<\sqrt[3]{4}$.

3. $\because\ (\sqrt{11}-\sqrt{3})^2=11-2\sqrt{33}+3=14-2\sqrt{33}$.

又 $(\sqrt{10}-2)^2=10-4\sqrt{10}+4=14-4\sqrt{10}$.

$\because\ \sqrt{11}>\sqrt{3}$及$\sqrt{10}>2$,$\therefore\ \sqrt{11}-\sqrt{3}>0$,$\sqrt{10}-2>0$.

$\therefore\ \sqrt{11}-\sqrt{3}$是$14-2\sqrt{33}$的算术平方根.

同理 $\sqrt{10}-2$是$14-4\sqrt{10}$的算术平方根.

$\because\ 14-2\sqrt{33}>14-4\sqrt{10}$,$\therefore\ \sqrt{11}-\sqrt{3}>\sqrt{10}-2$.

例16 字母取何值时,下列各根式有意义.

1. $\sqrt{-2x}$. 2. $\sqrt{3-2x}$. 3. $\sqrt{-3(x+2)^2}$. 4. $\sqrt{-ab}$. 5. $\sqrt{2-|x|}$.

注:此例适用于初二年级,也适用于初三总复习.

分析:研究根式成立的条件,首先要明确依据什么进行研究,这时的依据只可能是根式的定义,即非负数的非负的方根.

解：

1. $\sqrt{-2x}$

若使 $\sqrt{-2x}$ 有意义，则应 $-2x\geqslant 0$，∴ $x\leqslant 0$.

∴ 当 $x\leqslant 0$ 时，$\sqrt{-2x}$ 有意义.

2. 若使 $\sqrt{3-2x}$ 有意义，则应 $3-2x\geqslant 0$. 解得 $x\leqslant\frac{3}{2}$.

∴ 当 $x\leqslant\frac{3}{2}$ 时，$\sqrt{3-2x}$ 有意义.

3. 若使 $\sqrt{-3(x+2)^2}$ 有意义，则应 $-3(x+2)^2\geqslant 0$.

∵ $-3<0$，且 $(x+2)^2\geqslant 0$.

∴ $x+2=0$.

即 $x=-2$.

∴ 当 $x=-2$ 时，$\sqrt{-3(x+2)^2}$ 有意义.

4. 若使 $\sqrt{-ab}$ 有意义，则应 $-ab\geqslant 0$. 若 $-ab>0$，则 a 与 b 异号.

若 $-ab=0$，则 a、b 中至少一个为零，或 a、b 同时为零.

∴ 当 a、b 异号或 a、b 中至少一个为零及 a、b 同时为零时，$\sqrt{-ab}$ 有意义.

5. 若 $\sqrt{2-|x|}$ 有意义，则应有 $2-|x|\geqslant 0$.

∴ $|x|\leqslant 2$. 解得 $-2\leqslant x\leqslant 2$.

∴ 当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，根式 $\sqrt{2-|x|}$ 有意义.

例 17 当 x 为何值时，$\sqrt{x^2-2x}$ 与 $\sqrt{3x+14}$ 的被开方数相等？

注：此例知识适用于初二年级，但此例本身适用于初三年级.

分析：此例关键在于理解，"要满足被开方数相等"它的确切含义是什么，即这两个同次根式的被开方数相等时，可确定怎样的 x 值.

解：依题意，有 $x^2-2x=3x+14$.

∴ $x^2-5x-14=0$. ∴ $x_1=7$，$x_2=-2$.

当 $x=7$ 时，$\sqrt{x^2-2x}=\sqrt{35}$，$\sqrt{3x+14}=\sqrt{35}$；

当 $x=-2$ 时，$\sqrt{x^2-2x}=\sqrt{8}$，$\sqrt{3x+14}=\sqrt{8}$.

∴ 当 $x=7$ 或 $x=-2$ 时，两根式的被开方数相等.

例 18 解下列各题：

1. 当 m 为何值时，根式 $\sqrt[3m+1]{2xy^2}$ 与 $\sqrt[16-2m]{4x^2y}$ 是同次根式.

2. 当 a、b 分别为何值时，$\sqrt[2a+1]{5a+b+3}$ 与 $\sqrt[a-b+3]{2a+3b+4}$ 是同类根式.

注：此例适用于初二年级，同时也适用于初三总复习.

分析：此例中涉及到两个知识，即同次根式与同类根式. 同次根式是指根指数相同时的根式，而同类根式是指根指数与被开方数分别相等时的根式，由于所求的字母都在根指数或被开方数中，因此需要根据各自要满足的条件转化为含所求字母的方程求解，这种转化为方程的解题思想是很重要的数学思想，应很好地理解与掌握.

解：

1. 依题意，有 $3m+1=16-2m$. 解得 $m=3$.