

TURING
图灵新知

数 学 II (女 × 孩)

日本数学会出版奖得主
巨作
结城浩 著

朱一飞 译



中国工信出版集团



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

数
|
学
|
女
×
孩



结城浩
◇ 著

朱一飞
◇ 译

人民邮电出版社
北京

图书在版编目 (C I P) 数据

数学女孩 / (日) 结城浩著 ; 朱一飞译. — 北京 :
人民邮电出版社, 2016. 1

(图灵新知)

ISBN 978-7-115-41035-1

I. ①数… II. ①结… ②朱… III. ①数学—普及读
物 IV. ①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第270018号

内 容 提 要

本书以小说的形式展开, 重点描述一群年轻人探寻数学中的美。内容由浅入深, 数学讲解部分十分精妙, 被称为“绝赞的初等数学科普书”。内容涉及数列和数学模型、斐波那契数列、卷积、调和数、泰勒展开、巴塞尔问题、分拆数等, 非常适合对数学感兴趣的初高中生以及成人阅读。

◆ 著 [日] 结城浩
译 朱一飞
责任编辑 乐馨
执行编辑 杜晓静
责任印制 杨林杰

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路11号
邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
三河市中晟雅豪印务有限公司印刷

◆ 开本: 880 × 1230 1/32

印张: 10.625

字数: 325千字

2016年1月第1版

印数: 1-5 000册

2016年1月河北第1次印刷

著作权合同登记号 图字: 01-2015-4404号

定价: 42.00元

读者服务热线: (010)51095186转600 印装质量热线: (010)81055316

反盗版热线: (010)81055315

广告经营许可证: 京崇工商广字第0021号

致读者

本书涵盖了形形色色的数学题目，从小学生都能明白的简单问题，到大学生也难以理解的难题。

本书中通过语言、图形以及数学公式表达登场人物的思路。

如果不太明白数学公式的含义，请先看看就好，继续看下面的故事，泰朵拉会跟您一同前行。

请擅长数学的读者，不要仅仅阅读故事，也务必一同探究数学公式。如此，便可品味到深埋在故事中的别样趣味。

主页通知

关于本书的最新信息，可查阅以下URL。

<http://www.hyuki.com/girl/>

此URL出自作者的个人主页。

© 2007 本书内容受著作权法保护。未经作者·发行者许可，不得擅自复制·复印。

试读结束：需要全本请在线购买：www.ertongbook.com

序 言

光让事情留在记忆里总不行啊，
需要回忆出来大家共享的。

——小林秀雄

我忘不了。

我怎么也忘不了高中时期因数学而结缘的她们。

她们是用一流的解法打动我的才女——米尔嘉，认真向我发问的活力少女——泰朵拉。

回想起那时的岁月，我脑海中顿时浮现出一个个计算公式、一个个新鲜的想法。这些数学公式不会随着时间的推移而显得落伍或陈旧，而是向我展现了欧几里得、高斯、欧拉等数学家们熠熠生辉的才思。

——数学穿越时空。

我一边想着那些计算公式，一边体会着古时候数学家们体验到的那份感动。即便是几百年前就已经被证明的也没关系，现在我一边追溯理论一边埋头苦思的东西一定是自己的东西。

——通过数学穿越时空。

拨开层层密林，找出藏宝，数学就是这样一种令人兴奋的寻宝游戏。

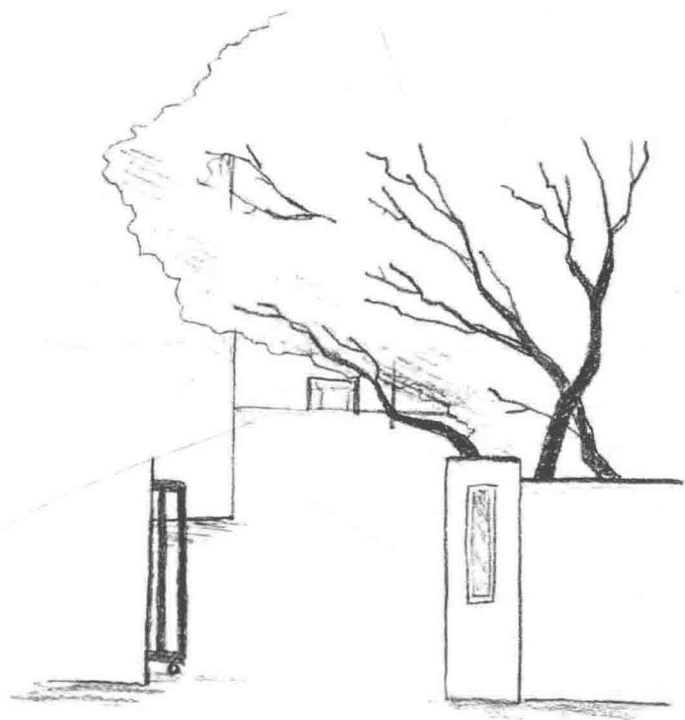
2 序言

比拼智力，寻找最牛的解法，数学就是这样一场激烈的战斗。

那时，我开始使用名叫数学的武器。但是，那种武器往往过于巨大，很多时候不能灵活操控。这种感觉正如我很难操控自己年轻时的青涩，很难控制对她们的思念一样。

光让事情留在记忆里总不行啊，需要回忆出来大家共享的。

那我就从高一的春天开始讲起吧。



致读者

序言

第 1 章	数列和数学模型	1
1.1	樱花树下	1
1.2	自己家	5
1.3	数列智力题没有正确答案	8

第 2 章	一封名叫数学公式的情书	13
2.1	在校门口	13
2.2	心算智力题	14
2.3	信	15
2.4	放学后	16
2.5	阶梯教室	17
2.5.1	质数的定义	19
2.5.2	绝对值的定义	23
2.6	回家路上	25
2.7	自己家	27
2.8	米尔嘉的解答	31
2.9	图书室	33
2.9.1	方程式和恒等式	33

2 目录

2.9.2 积的形式与和的形式	37
2.10 在数学公式另一头的人到底是谁	41

第3章 ω的华尔兹	43
3.1 图书室	43
3.2 振动和旋转	46
3.3 ω	53

第4章 斐波那契数列和生成函数	61
4.1 图书室	61
4.1.1 找规律	62
4.1.2 等比数列的和	64
4.1.3 向无穷级数进军	64
4.1.4 向生成函数进军	66
4.2 抓住斐波那契数列的要害	68
4.2.1 斐波那契数列	68
4.2.2 斐波那契数列的生成函数	70
4.2.3 封闭表达式	71
4.2.4 用无穷级数来表示	73
4.2.5 解决	75
4.3 回顾	79

第5章 基本不等式	81
5.1 在“神乐”	81
5.2 满是疑问	83
5.3 不等式	85

5.4	再进一步看看	94
5.5	关于学习	97
<hr/>		
第6章	在米尔嘉旁边	103
6.1	微分	103
6.2	差分	107
6.3	微分和差分	109
6.3.1	一次函数 x	110
6.3.2	二次函数 x^2	111
6.3.3	三次函数 x^3	113
6.3.4	指数函数 e^x	115
6.4	在两个世界中往返的旅行	117
<hr/>		
第7章	卷积	121
7.1	图书室	121
7.1.1	米尔嘉	121
7.1.2	泰朵拉	125
7.1.3	推导公式	125
7.2	在回家路上谈一般化	129
7.3	在咖啡店谈二项式定理	130
7.4	在自己家里解生成函数	140
7.5	图书室	146
7.5.1	米尔嘉的解	146
7.5.2	研究生成函数	152
7.5.3	围巾	155
7.5.4	最后的要塞	156

7.5.5 攻陷	159
7.5.6 半径是0的圆	163

第8章 调和数	167
8.1 寻宝	167
8.1.1 泰朵拉	167
8.1.2 米尔嘉	169
8.2 图书室里的对话	170
8.2.1 部分和与无穷级数	170
8.2.2 从理所当然的地方开始	173
8.2.3 命题	175
8.2.4 对于所有的……	178
8.2.5 存在……	180
8.3 螺旋式楼梯的音乐教室	184
8.4 令人扫兴的 ζ 函数	186
8.5 对无穷大的过高评价	187
8.6 在教室中研究调和函数	194
8.7 两个世界、四种运算	197
8.8 已知的钥匙、未知的门	203
8.9 如果世界上只有两个质数	205
8.9.1 卷积	206
8.9.2 收敛的等比数列	207
8.9.3 质因数分解的唯一分解定理	208
8.9.4 质数无限性的证明	209
8.10 天象仪	213

第 9 章 泰勒展开和巴塞尔问题	217
9.1 图书室	217
9.1.1 两张卡片	217
9.1.2 无限次多项式	219
9.2 自学	222
9.3 在那家叫“豆子”的咖啡店	224
9.3.1 微分的规则	224
9.3.2 更进一步微分	227
9.3.3 $\sin x$ 的泰勒展开	230
9.3.4 极限函数的图像	233
9.4 自己家	237
9.5 代数学基本定理	239
9.6 图书室	245
9.6.1 泰朵拉的尝试	245
9.6.2 要到达哪里	248
9.6.3 向无限挑战	255

第 10 章 分拆数	259
10.1 图书室	259
10.1.1 分拆数	259
10.1.2 举例	261
10.2 回家路上	267
10.2.1 斐波那契手势	267
10.2.2 分组	269
10.3 “豆子”咖啡店	271
10.4 自己家	273

6 目录

10.5	音乐教室	278
10.5.1	我的发言(分拆数的生成函数)	279
10.5.2	米尔嘉的发言(分拆数的上限)	287
10.5.3	泰朵拉的发言	292
10.6	教室	296
10.7	寻找更好的上限之旅	298
10.7.1	以生成函数为出发点	299
10.7.2	“第一个转角”积变为和	300
10.7.3	“东边的森林”泰勒展开	301
10.7.4	“西边的山丘”调和数	307
10.7.5	旅行结束	308
10.7.6	泰朵拉的回顾	311
10.8	明天见	312
	尾 声	315
	结 语	319
	参考文献和导读	321

第1章

数列和数学模型

1, 2, 3。3是1。

1, 2, 3。3是2。

——大岛弓子,《棉之国星》

1.1 樱花树下

那是高一的春天。

开学典礼那天,春光明媚。

“美丽的樱花开了……大家在新学期新起点之际……在这有着悠久历史的校舍里……努力学习、努力锻炼……少年易老学难成……”

校长那冗长的致辞简直引人入睡,我借着扶正眼镜的机会强忍住了呵欠。

开学典礼结束后,我在回教室的途中悄悄地溜了出来,独自一人漫步在校内的樱花树林间。周围连个人影都没有。

我现在15岁。15岁、16岁、17岁……毕业的时候我将18岁了。有一个4次方的数字和一个质数。

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 \quad 4 \text{次方数}$$

$$17 = 17 \quad \text{质数}$$

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$$

现在教室里同学们一定正进行着自我介绍。我不擅长自我介绍，究竟该说说自己的什么呢？

“我喜欢数学，兴趣是讨论计算公式。请多多关照。”

我想象了下又停住了。

算了，管他呢。静静地上课，在谁都不会去的图书室学数学，就这样像初中时一样度过高中三年的时光吧。

映入眼帘的是一棵硕大的樱花树。

树下站着一个少女，她正抬头仰望着那棵樱花树。

我想：她是位新生吧，大概和我一样也是溜出来的。

我也抬头望了望那棵樱花树。模模糊糊的花色遮住了天空。

刮起一阵风，飘舞着的樱花花瓣将少女裹住。

少女也看到了我。

她身材高挑，长发乌黑亮丽，嘴巴紧闭着，一副认真的表情。脸上架着副金丝眼镜。

她清楚地念着：“1, 1, 2, 3。”

念完这4个数字之后，少女便不出声了，用手指着我，好像在说：“喂！你，请回答接下来的数字。”

我指着自已：“要我回答？”

她没有说话，而是点了点头。食指仍然指向我。

到底是什么呢？在樱花树丛中好好地散着步，为什么非要做什么猜数字的游戏呢？对了，刚才她说的是什么呢？

我回想她刚才的题目：“1, 1, 2, 3。”

啊，原来如此。我知道了。

“1, 1, 2, 3的后面接着的数字是5，接下来是8，再接下来是13，然后是21，然后再是……”我开始滔滔不绝地回答。

她向我伸出手掌，示意我不要说了。

接着，她给我出了另外一道题，又是4个数字。

1 4 27 256

她又指向我。

这是在考我吗？

“1, 4, 27, 256。”

我突然一下子找到了规律。

我回答说：“1, 4, 27, 256，接下来是3125吧，再接下来是……心算是不行了。”

她听到我说“心算是不行了”之后神色显得有些不满，摇了摇头，便告诉了我答案。

“1, 4, 27, 256, 3125, 46656, …”她的声音很响亮。

接着，她闭上眼，头微微朝上抬起，好似正在仰望樱花树。食指朝着天空飞快地写着些什么。

唯一从这个女孩口中说出的只是些数字，她漫不经心地将那些数字排列起来，略做些手势。但是我的目光却一直盯着这个与众不同的女孩。她到底想干什么？

她朝我这里看了看。

6 15 35 77

又是4个数字。

“6, 15, 35, 77。”

我心想，这题好难啊。我开动脑筋拼命思考，6和15是3的倍数，但是35却不同了，35和77是7的倍数。如果可以在纸上写写的话应该马上能解出来。

我瞟了她一眼，樱花树下的女孩还笔挺地站在那里，很认真地看着我，甚至都不掸一下飘落到头发上的樱花花瓣。那副认真的模样仿佛是在考试一样。

“啊，我知道了。”

我刚一说，她顿时变得神采奕奕，微微一笑。我第一次看到她笑，便情不自禁地大声回答：

“6, 15, 35, 77的后面是133。”

她摇了摇头，长发飘动，花瓣也随之飘落。她的表情仿佛在说：“哎呀呀，真可惜。”