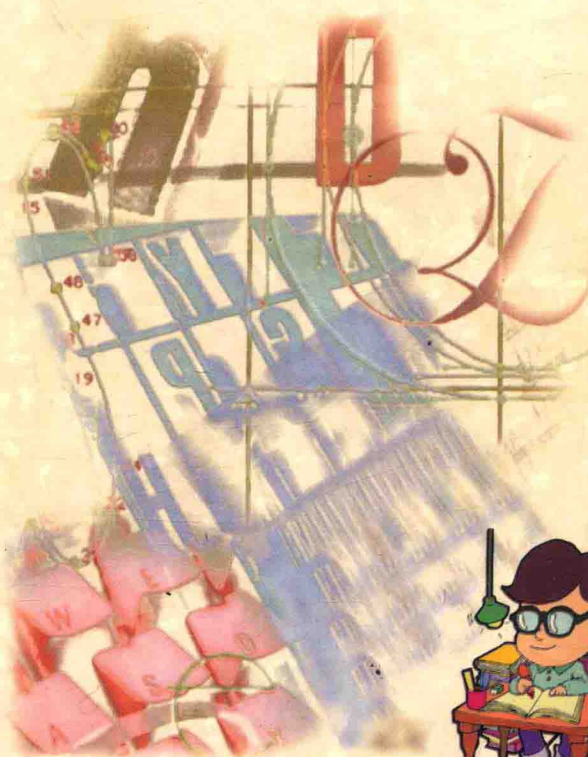


全国高等教育自学考试指导丛书

高等数学

(二)

自学考试指导与题解



东北财经大学出版社

主审
主编

高汝熹
汤羨祥

全国高等教育自学考试指导丛书

高等数学(二) 自学考试指导与题解



主审 高汝熹

主编 汤羨祥

东北财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(二)自学考试指导与题解/汤羨祥主编. —大连:东北财经大学出版社, 1999. 8(2000. 3 重印)

(全国高等教育自学考试指导丛书)

ISBN 7-81044-593-6

I. 高… II. 汤… III. 高等数学-高等教育-自学考试-自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 24814 号

东北财经大学出版社出版

(大连市黑石礁尖山街 217 号 邮政编码 116025)

网 址: <http://www.dufep.com.cn>

读者信箱: dufep@mail.dlptt.ln.cn

东北财经大学印刷厂印刷

东北财经大学出版社发行

开本: 850×1168 毫米 1/32 字数: 291 千字 印张: 11 5/8

印数: 8 001—16 000 册

1999 年 8 月第 1 版

2000 年 3 月第 2 次印刷

责任编辑: 郭 洁 夏少刚

责任校对: 孙萍 林波 郑义

封面设计: 钟福建

版式设计: 单振敏

定价: 18.00 元

前 言

本书是根据《高等数学(二)自学考试大纲》的要求,结合编者从事自学考试教学辅导的经验和自学考试学生的实际情况编写而成的。全书分三大部分:第一部分是学习指导与综合测试题。该部分按章设“学习指导”和“综合测试题”,“学习指导”是对考生学习高等数学(二)时的一种宏观上的指导,以帮助考生准确把握考试大纲所要求的每一个知识点和考核点;“综合测试题”是与近几期的统考题型相一致的,并尽可能按知识考核点分类给出,具有典型性和代表性。第二部分是综合测试题的答案及答案要点。第三部分是附录,包括高等数学(二)全国统考试卷样式、试卷评分标准与标准答案,以及高等数学(二)的学习方法与应试技巧。

本书的特点是紧扣大纲,深入浅出,循序渐进,内容系统而精练,重点突出,逻辑严密,并参考历届统考题型,给出一定数量的练习,以训练和培养考生的分析问题和解决问题的能力,达到本门课程考试大纲的要求,进而也必然会提高考生的应试能力和成功率,因而本书具有很强的指导性。

本书由复旦大学高汝熹教授主审,华东师范大学汤羨祥教授主编,参加编写的还有包超兰副教授和丁大公副教授。

限于编者水平,书中难免有一些疏漏,恳请读者批评指正。

编 者

1999年6月

目 录

第一部分 学习指导与综合测试题

第一篇 线性代数

第一章 行列式.....	1
◎本章学习内容提示与分析.....	1
◎本章综合测试题	20
第二章 矩阵	29
◎本章学习内容提示与分析	29
◎本章综合测试题	46
第三章 线性方程组	59
◎本章学习内容提示与分析	59
◎本章综合测试题	85
第四章 线性空间	98
◎本章学习内容提示与分析	98
◎本章综合测试题.....	105
第五章 特征值问题与实二次型.....	112
◎本章学习内容提示与分析.....	112
◎本章综合测试题.....	134

第二篇 概率统计

第一章 描述统计	148
◎本章学习内容提示与分析	148
◎本章综合测试题	153
第二章 概率的基本概念	155
◎本章学习内容提示与分析	155
◎本章综合测试题	162
第三章 随机变量与概率分布	171
◎本章学习内容提示与分析	171
◎本章综合测试题	180
第四章 抽样和抽样分布	193
◎本章学习内容提示与分析	193
◎本章综合测试题	197
第五章 参数估计	203
◎本章学习内容提示与分析	203
◎本章综合测试题	209
第六章 假设检验	216
◎本章学习内容提示与分析	216
◎本章综合测试题	222
第七章 工序质量控制和抽样检验	227
◎本章学习内容提示与分析	227
第八章 回归分析与相关分析	229
◎本章学习内容提示与分析	229
◎本章综合测试题	241
第九章 经济预测与决策	245
◎本章学习内容提示与分析	245
◎本章综合测试题	250

第二部分 综合测试题答案及答案要点

第一篇 线性代数

第一章	行列式	251
第二章	矩阵	262
第三章	线性方程组	270
第四章	线性空间	293
第五章	特征值问题与实二次型	299

第二篇 概率统计

第一章	描述统计	314
第二章	概率的基本概念	315
第三章	随机变量与概率分布	319
第四章	抽样和抽样分布	328
第五章	参数估计	331
第六章	假设检验	335
第八章	回归分析与相关分析	337
第九章	经济预测与决策	340

第三部分 附 录

一、高等数学(二)全国统考试卷样式	341
二、高等数学(二)试卷答案及评分标准	347
三、高等数学(二)学习方法与应试技巧	351

第一部分 学习指导与综合测试题

第一篇 线性代数

第一章 行列式

◎本章学习内容提示与分析

(一)掌握行列式的定义

1. 二阶行列式和三阶行列式

在求解二元一次方程组和三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

时,为了规范解的形式,引入了二阶行列式和三阶行列式.即定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

称为二阶行列式.也就是说二阶行列式用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示,它等于代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. 在二阶行列式中有两个行和两个列,横的称行,竖的称列. a_{ij} ($i=1,2; j=1,2$) 称为二阶行列式的元素. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为二阶行列式的展开式,它可以用对角线法则进行记忆,即用实线(主对角线)联结的两个元素的乘积减去虚

线(副对角线)联结的两个元素的乘积.

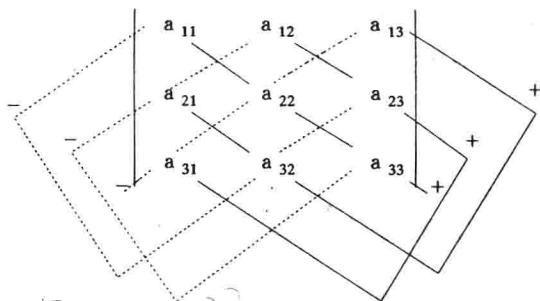
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

例 1: $\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} = 8 \times 11 - 12 \times 5 = 28$

同样可以定义三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

在三阶行列式中有三个行和三个列, a_{ij} 是其第 i 行、第 j 列的元素, 其中 i 称为行标, j 称为列标. 三阶行列式的展开式也可用对角线法则加以记忆, 其中各实线联结的三个元素的乘积是三阶行列式展开式中的正项, 各虚线联结的三个元素的乘积是展开式中的负项.



例 2:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ -9 & -7 & -8 \end{vmatrix} = 3 \times 4 \times (-8) + 1 \times 5 \times (-9) + 2 \times 6 \times (-7) - 3 \times 5 \times (-7) - 1 \times 6 \times (-8) - 2 \times 4 \times (-9) = 0$$

由于更高阶的行列式的展开式不一定满足上述对角线法则, 因此要引入下述一般 n 阶行列式的定义.

2. n 阶行列式

(1) 由 n^2 个元素排成 n 行 n 列后所记成的

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式, 记 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的余子式, 即由行列式 A 中划去第 i 行第 j 列后剩下的 $n-1$ 行 $n-1$ 列元素组成的行列式, 即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

又记 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, 称为元素 a_{ij} 的代数余子式.

(2) n 阶行列式的值用如下的递推法 (或称归纳法) 定义:

当 $n=1$ 时, 定义一阶行列式 $|A| = |a_{11}| = a_{11}$; 假定对 $n-1$ 阶行列式已经定义; 那末对任意的 i, j , M_{ij} 是一个 $n-1$ 阶行列式, 它的值假定是已经定义好的, 则定义 n 阶行列式

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$

用代数余子式表达, 则

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$$

由于式中 A_{i1} ($i=1, 2, \cdots, n$) 是 n 阶行列式 $|A|$ 中第一列各元素 a_{i1} 对应的代数余子式, 故称该式为 $|A|$ 按第一列的展开式.

$$\begin{aligned} \text{例 3: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

例 3 的计算表明,按第一列的展开式与对角形法则的展开式是相同的.

(二) 熟练掌握行列式的性质

性质 1 行列式转置后,其值不变.即

$$|A| = |A^T|$$

$$\text{其中: } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad |A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 $|A^T|$ 为 $|A|$ 的转置行列式(有的书也记作 $|A'|$)

性质 2 行列式的两行(列)元素互换,则行列式之值变号.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 如果行列式 $|A|$ 有两行(或两列)元素相同,则行列式值等于零.

性质 3 用某个数 c 乘以行列式的某一行(或某一列),得到的行列式的值是原行列式值的 c 倍.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 1 若行列式的某一行(或某一列)的元素全为零,则这个行列式的值等于零.

推论 2 若行列式某一行(或列)有公因子 c , 则这个 c 可以提到外面来.

性质 4 如果行列式 $|A|$ 的某两行(或两列)成比例, 则行列式值等于零.

性质 5 若行列式中某一行(或某一列)的元素 a_{ij} 都可分解为两元素 b_{ij} 与 c_{ij} 之和, 即 $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ ($j = 1, 2, \dots, n$), 则该行列式可分解为相应的两个行列式之和. 即

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 把行列式的某一行(或某一列)元素都乘以同一个常数加到另一行(或另一列)上去, 则行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{i1} + a_{j1} & ca_{i2} + a_{j2} & \cdots & ca_{in} + a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(三)理解行列式展开定理, 能熟练地应用定理按某一行(列)展开行列式

定理 行列式等于它的任一行(或列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和. 即

设 $|A|$ 是一个 n 阶行列式,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对任意的 i, j , 记 A_{ij} 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式, 则

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^n a_{1j}A_{1j}, i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\text{或 } |A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}A_{ij}, j = 1, 2, \cdots, n$$

推论 行列式 $|A|$ 任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即

$$a_{1i}A_{j1} + a_{2i}A_{j2} + \cdots + a_{ni}A_{jn} = 0, i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

$$\text{或 } a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0, i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

综合上述定理和推论, 得到:

$$\sum_{k=1}^n a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} |A|, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\text{或 } \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} |A|, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

例 4: 计算 n 阶下三角行列式(即它的主对角线以上的元素都等于零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{的值}$$

解: 根据行列式展开定理按第一行展开得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11} a_{22} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \cdots = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}
\end{aligned}$$

[注] 同理, n 阶上三角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

及 n 阶对角行列式:

$$\begin{vmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{vmatrix} = k_1 k_2 \cdots k_n$$

例 4 和[注]中得到的结果可作为公式使用.

(四) 会用行列式定义、性质、展开定理计算行列式和证明一些简单的问题. 知道范德蒙行列式, 能正确运用其结果

1. 用定义计算行列式

例 5: 计算 n 阶行列式 $|A_n| = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & \cdots & c_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解: 由行列式定义, 按第一列展开

$$|A_n| = c_n (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & \cdots & c_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= c_n (-1)^{n+1} c_{n-1} (-1)^{n-1+1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & C_1 \\ 0 & \cdots & c_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \cdots = c_n (-1)^{n+1} c_{n-1} (-1)^n c_{n-2} (-1)^{n-1} \cdots c_2 (-1)^{2+1} c_1 \\
&= (-1)^{3+\cdots+n+n+1} c_1 c_2 \cdots c_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} c_1 c_2 \cdots c_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{这里, 利用 } 3+\cdots+n+n+1 &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 - 2 = \frac{n^2+3n-4}{2} \\
&= \frac{n^2-n+4n-4}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1)
\end{aligned}$$

故 $(-1)^{3+\cdots+n+n+1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (注意到 $2(n-1)$ 为偶数)

[注]同理,用定义可以证明 n 阶行列式.

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{np} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

本例和[注]的结果均可作公式使用. 例如计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 10 & 19 & 25 \\ 7 & 26 & 38 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{4(4-1)}{2}} 3 \times (-2) \times 10 \times 7 = -420$$

2. 用三角行列式结论计算行列式

例 6: 计算下列三角行列式:

$$(1) |A_3| = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 46 & 10 & 0 \\ 108 & 36 & 15 \end{vmatrix} \quad (2) |A_4| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 9 & 21 \\ 0 & -12 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

解: (1) $|A_3| = (-5) \times 10 \times 15 = -750$

(2) $|A_4| = 4 \times (-12) \times (-3) \times 5 = 720$

3. 利用行列式性质计算

例 7: 计算下列行列式

$$(1) |A_4| = \begin{vmatrix} 1 & 105 & 2 & 7 \\ 2 & 218 & 4 & 5 \\ 3 & 79 & 6 & 9 \\ 4 & 53 & 8 & 13 \end{vmatrix} \quad (2) |B_4| = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

解: (1) $|A_4| = 0$ (第 1、第 3 列成比例)

(2) $|B_4| = 0$ (第 3 行元素全为零)

例 8: 计算下列行列式

$$(1) |A_4| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2) |A_n| = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

解:

$$\begin{aligned} (1) |A_4| &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 1 \\ \times (-2) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 1 \\ \times 3 \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times (-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1 \times (-1) \times (-2) \times (-2) = 4 \end{aligned}$$

$$(2) |A_n| = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

$\uparrow$
 $\times 1$
 $\times 1$
 $\times 1$
 $\times 1$

$$= \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x & a \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times (-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

[注] 本例的方法是用行列式的性质, 先化成上三角行列式, 然后用上三角行列式计算方法做, 这种方法在行列式的计算中是用得比较多的。

例 9: 计算行列式 $|A_3| = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

解:

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \times 1 \\ \times 1 \end{array} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$