北大燕园

考研必备(2002年版)

数学

最后冲刺模拟试卷

【理工类】

编著　陈文灯

国家行政学院出版社

考研必备(2002年版)

数学最后冲刺

模拟试卷

【理工类】

编著　陈文灯

第一篇　考研数学综合题突破
第二篇　数学最后冲刺模拟试卷(20套)
第三篇　数学最后冲刺模拟试卷答案与详解(20套)

国家行政学院出版社

图书在版编目（CIP）数据

考研必备数学最后冲刺模拟试卷：理工类/陈文灯编著.
－北京：国家行政学院出版社．2000.10
ISBN 7-80140-134-4

Ⅰ.考…　Ⅱ.陈…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 50953 号

2002 年考研必备
数学最后冲刺模拟试卷
【理工类】
陈文灯　编著
*
国家行政学院出版社出版发行
北京市海淀区长春桥路 6 号
邮政编码：100089
发行部电话：68920615　68929949
新华书店经销
北京市朝阳印刷厂印刷
*
787×1092　1/16 开本　16 印张　500 千字
2001 年 9 月第 1 版　2001 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 7-80140-134-4/O·11　　定价：25.00 元

前　言

目前考研数学统考题的特点可以用两句话，十八个字来概括：信息量多，题量大；知识面宽，综合性强，难度大．这个命题的特点在近几年不会有大的变化．面对这种形势如何合理地安排时间，发挥自己的潜能，高效地进行复习，是每个考研学子必须很好解决的问题．解决好了，应试时就能考出自己的水平，或许能超常发挥，考出自己意想不到的好成绩．解决不好就会“事倍功半”．对数学我建议同学们这样复习：

（1）牢记重要的概念、定理和公式．因为这样做可使你应试时节省“追忆”、“推演”的时间，同时可使你少犯错用定理、公式的错误．

（2）掌握一些题型的快速解法，提高解题速度．

（3）掌握重要的变量替换、辅助函数的作法技巧，重要题型的解题思路和方法．这可使你应试时很快找到解题的突破口和切入点．

《数学最后冲刺模拟试卷》就是基于上面的出发点精编了 20 套难度较大、技巧性较强、基本概念较丰富的多种题型的模拟试题。只有通过模拟试题的训练，才能掌握各种题型的解题思路、技巧和方法，理解各基本概念的深刻内涵，才能使考研学子应试时“更上一层楼”，否则将达不到应有的效果。

由于成书仓促，又有新的思路、新的题型，难免有欠缺和不足或错误的地方，请考研学子和数学同仁批评指正。

陈文灯　陈文灯印

2001.9

第一讲　综合题解题指导

所谓综合题就是考查多个知识点的试题.综合题考查的内容可以是同一学科不同章节的,也可以是不同学科的,这就要求考生掌握各知识点之间的关系,真正理解基本概念的实质,融会贯通各概念之间的内在联系,形成知识网来分析和解决问题.例如:

Ⅰ.极限是微积分中的基本方法.研究函数的性质实质上是研究各种类型的极限,如导数、定积分、级数等.考生在复习时要前后贯通,灵活运用.

【例 1】　设函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2},0\leqslant x\leqslant 1$.

(1) 证明:$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\dfrac{\pi^2}{6},x\in[0,1]$;

(2) 计算:$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

【分析】　(1)对 $f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)$ 求导若为零,则该式必为常数 C,再设法定此常数 C 为 $\dfrac{\pi^2}{6}$;(2)对所给积分作变换,同时利用函数 $f(x)$ 的已知展式,$\ln x,\ln(1-x)$ 的幂级数展式,利用逐项积分和(1)的结论等进行计算.

【解】　(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)]$

$$=f'(x)-f'(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}$$

$$=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2})'+(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n^2})'+(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n})-(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^n}{n^2})'+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(1-x)^n}{n^2})'-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}=0.$$

故 $f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=C$　(C 为任意常数).

在上式中,令 $x\to1^-$,两边取极限:

右边:$\displaystyle\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to1^-}\frac{x^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi}{6}$;

$$\lim_{x\to1^-}f(1-x)=\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to1^-}\frac{(1-x)^n}{n^2}=0;$$

$$\lim_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln(1-x)}{\dfrac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to1^-}\frac{\dfrac{-1}{1-x}}{-\dfrac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x(\ln x)^2}{1-x}=\lim_{x\to1^-}\frac{(\ln x)^2+2\ln x}{-1}=0.$$

右边:$\displaystyle\lim_{x\to1^-}C=C$.

因此有 $C=\dfrac{\pi^2}{6}$,即 $f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\dfrac{\pi^2}{6}$.

(2)$I=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2-x}\ln\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{1}{2-x}\ln x\mathrm{d}x$

$$\xlongequal[\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x]{\text{令 } y=2-x}\int_2^1\frac{1}{y}\ln(2-y)\mathrm{d}y=-\int_1^2\frac{\ln(2-y)}{y}\mathrm{d}y$$

$$=-\int_1^2\frac{\ln[2(1-\frac{y}{2})]}{y}dy=-\int_1^2\frac{\ln2}{y}dy-\int_1^2\frac{\ln(1-\frac{y}{2})}{y}dy$$

$$=-\ln2\cdot\ln y\Big|_1^2-\int_1^2\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-\frac{y}{2})^n}{n}}{y}dy \quad (\text{由} -1<-\frac{y}{2}<1 \text{知} -2<y<2).$$

$$=-(\ln2)^2+\int_1^2\frac{1}{y}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n(\frac{y}{2})^n}{n}dy=-(\ln2)^2+\int_1^2\frac{1}{y}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{2^n\cdot n}dy$$

$$=-(\ln2)^2+\int_1^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{n-1}}{2^n\cdot n}dy=-(\ln2)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\int_1^2\frac{y^{n-1}}{2^n\cdot n}dy$$

$$=-(\ln2)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{2^n\cdot n^2}\Big|_1^2=-(\ln2)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\cdot n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n^2}$$

$$=-(\ln2)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-f(\frac{1}{2})\ (\text{因为} f(\frac{1}{2})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n^2}).$$

由(1),取 $x=\frac{1}{2}$,则 $f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})+\ln\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\frac{\pi^2}{6}$,即

$$2f(\frac{1}{2})+(-\ln2)^2=\frac{\pi^2}{6},\text{亦即} f(\frac{1}{2})=\frac{\pi^2}{12}-\frac{(\ln2)^2}{2}.$$

代入上式得:$I=-(\ln2)^2+\frac{\pi^2}{6}-(\frac{\pi^2}{12}-\frac{(\ln2)^2}{2})$,即 $I=\frac{\pi^2}{12}-\frac{(\ln2)^2}{2}$.

【例 2】 求 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}]$.

【分析】 解这种类型的题一般有两种方法.一是夹逼定理,二是化成积分和式,但本题是两种方法的结合,先用夹逼定理,而夹逼的左、右两边再化成积分和式.

【解】 由于 $\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}<\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}<\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}$,

所以 $\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}<\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}<\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x dx=\frac{2}{\pi}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n})=\frac{2}{\pi}.$$

于是由夹逼定理推知原式为 $\frac{2}{\pi}$.

Ⅱ.在复习多元函数的微分学有关知识时,要与向量代数和空间解析几何结合起来复习.它们之间有内在联系,较易出综合题.

【例 3】 设直线 $l:\begin{cases}x+y+b=0,\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 π 上,而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$,求 a,b 之值.

【分析】 利用多元微分法求出平面 π 的方程,由于直线 l 在 π 上,将 l 的方程代入 π 的方程中,便可求出 a,b 值.由于 l 是两个平面的交线,因此,可写出关于过直线 l 的平面束,确定参数使某一平面与 π 重合,从而求出 a,b 之值.

【解法一】 在点 $(1,-2,5)$ 处曲面的法向量 $\boldsymbol{n}=\{2,-4,-1\}$,于是切平面方程为

$$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0,$$

即 $$2x-4y-z-5=0. \qquad (*)$$

由 $l:\begin{cases} x+y+b=0, \\ x+ay-z-3=0, \end{cases}$ 得 $y=-x-b$,进而

$$z=x-3+a(-x-b).$$

代入方程$(*)$,得 $2x+4x+4b-x+3+ax+ab-5\equiv 0$,因而有

$$5+a=0,\quad 4b+ab-2=0.$$

由此解得 $a=-5,b=-2$.

【解法二】 由解法一知,π 方程为 $2x-4y-z-5=0$.过 l 的平面束为

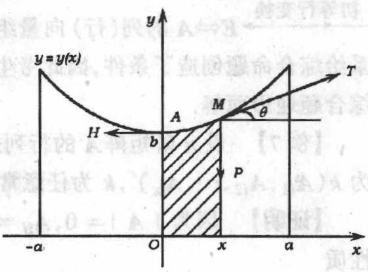
$$\lambda(x+y+b)+\mu(x+ay-z-3)=0,$$

即 $$(\lambda+\mu)x+(\lambda+a\mu)y-\mu z+b\lambda-3\mu=0.$$

令 $\dfrac{\lambda+\mu}{2}=\dfrac{\lambda+a\mu}{-4}=\dfrac{-\mu}{-1}=\dfrac{b\lambda-3\mu}{-5}$,则 $\lambda=\mu,a=-5,b=-2$.

Ⅲ. 在复习微分方程的有关知识时,除了应掌握各类微分方程的求解方法外,要重视微分方程的应用题.列方程,建立数学模型,是考查考生综合应用能力的重要方面.有些微分方程可能是数学问题中提供的,例如有的微分方程是由积分方程提出的,有的来自线积分与路径无关的充要条件,或微分式子是某个原函数的全微分,此时应转化成微分方程来求解,同时还应注意到所给条件中可能还提供了函数的某个函数值、导数值(即初始条件)等信息.

【例 4】 要在一个舞台上用绳索悬吊一幕布,问幕布的上沿应剪成怎样的曲线才能使它底边上的各点正好都接触地平面?



【解】 如右图所示,建立坐标系.设所求曲线为 $y=y(x)$,曲线上任一点 $M(x,y)$ 与点 $A(0,b)$ 之间的弧受三个力:(1)A 点的水平张力 H;(2)M 点的张力 T(沿切线方向);(3)幕布重量 $P=\rho\int_0^x y(t)\mathrm{d}(t)$($\rho$ 为幕布的面密度).弧段在这三力的作用下保持平衡.由平衡条件得

$$\begin{cases} T\cos\theta=H, \\ T\sin\theta=\rho\int_0^x y(t)\mathrm{d}t. \end{cases}$$

两式相除得 $\tan\theta=\dfrac{\rho}{H}\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$,即 $y'=\dfrac{\rho}{H}\int_0^x y(t)\mathrm{d}t$.

两端对 x 求导得 $y''-\dfrac{\rho}{H}y=0$.

此为二阶常系数齐次线性方程,且 $y\Big|_{x=0}=b,y'\Big|_{x=0}=0$,解之得

$$y=C_1e^{\sqrt{\frac{\rho}{H}}x}+C_2e^{-\sqrt{\frac{\rho}{H}}x},\text{且 } C_1=C_2=\frac{b}{2}.$$

故所求曲线为悬链线: $y=\dfrac{b}{2}(e^{\sqrt{\frac{\rho}{H}}x}+e^{-\sqrt{\frac{\rho}{H}}x})=b\,\mathrm{ch}\sqrt{\dfrac{\rho}{H}}x$.

【例 5】 设函数 $f(x^2+y^2)$ 连续可微,求 $f(x^2+y^2)$ 使

$$f(x^2+y^2)[(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y]$$

在除原点外的任何平面域 D 内为某二元函数的全微分.

【解】 令 $u=x^2+y^2$,则 $P=(x-y)f(u),Q=(x+y)f(u)$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=f(u)+2x(x+y)f'(u),\ \frac{\partial P}{\partial y}=-f(u)+2y(x-y)f'(u).$$

由 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 得 $f(u)+uf'(u)=0$,分离变量并积分得

$$f(u)=\frac{C}{u},\text{即 } f(x^2+y^2)=\frac{C}{x^2+y^2}(C\neq 0).$$

【例6】 已知函数 $\varphi(x)$ 具有二阶连续导数，L 为不过 y 轴的任一闭曲线，且曲线积分

$$\oint_L [x\varphi'(x)+\varphi(x)-x]\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x-\varphi'(x)\mathrm{d}y=0,$$

试求函数 $\varphi(x)$.

【解】 由 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial x}$ 建立微分方程

$$\frac{1}{x^2}[x\varphi'(x)+\varphi(x)-x]=-\varphi''(x),$$

即 $x^2\varphi''(x)+x\varphi'(x)+\varphi(x)=x$，属欧拉方程.

令 $x=\mathrm{e}^t$ 或 $t=\ln x$，则 $\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)y+\mathrm{D}y+y=x$，

故有 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+y=\mathrm{e}^t$，属二阶常系数非齐次线性方程. 解得 $y=C_1\cos t+C_2\sin t+\frac{1}{2}\mathrm{e}^t$.

所以，所求函数为 $\varphi(x)=C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)+\frac{1}{2}x$.

Ⅳ. 在复习线性代数时，一定要前后融会贯通，灵活运用所学知识来分析和解决问题，不要将它们孤立隔裂来复习.

例如 $|A|\neq 0 \Leftrightarrow A$ 是可逆阵 $\Leftrightarrow r(A)=n$（满秩阵）$\Leftrightarrow A$ 的列（行）向量组线性无关 $\Leftrightarrow AX=0$ 惟一零解 $\Leftrightarrow AX=b$ 对任何 b 均有（惟一）解 $\Leftrightarrow A=P_1P_2\cdots P_N$，其中 $P_i(i=1,2,\cdots,N)$ 是初等阵 $\Leftrightarrow r(AB)=r(B)\Leftrightarrow A \xrightarrow{\text{初等行变换}} E \Leftrightarrow A$ 的列（行）向量组是 R^n 的一个基 $\Leftrightarrow A$ 可以是某两个基之间的过渡矩阵等等. 这种相互之间的联系给综合命题创造了条件，因此考生应该认真总结，开拓思路，善于分析，富于联想，只有这样才能对有较多弯道的综合题迎刃而解.

【例7】 设 n 阶矩阵 A 的行列式 $|A|=0$，且有一个代数余子式 $A_{ij}\neq 0$，证明：线性方程组 $AX=0$ 的所有解为 $k(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})'$，$k$ 为任意常数.

【证明】 因为 $|A|=0, A_{ij}\neq 0$，因而 $r(A)=n-1$，因此 $AX=0$ 的基础解系含有一个解向量. 由行列式的性质

$$\sum_{t=1}^{\infty}a_{jt}A_{it}=\begin{cases}|A|, & j=i,\\ 0, & j\neq i,\end{cases}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$. 则 $\sum_{t=1}^{\infty}a_{jt}A_{it}=0$.

$$\text{即 } A\alpha=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{i1}\\ A_{i2}\\ \vdots\\ A_{in}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$$

亦即 $\alpha=(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in})'$ 是 $AX=0$ 的一个非零解，因而可以作为基础解系，所以 $AX=0$ 的所有解为 $k(A_{i1},\cdots,A_{in})'$，其中 k 为任意常数.

Ⅴ. 在复习概率论与数理统计时，考生要灵活地运用所学知识，建立正确的概率模型，综合运用极限、连续函数、导数、极值、积分、广义积分以及级数等知识去分析和解决实际问题.

【例8】 若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是独立随机变量，方差 $\mathrm{D}\xi_i=\sigma_i^2$，试求 $a_1,a_2,\cdots,a_n(\sum_{i=1}^n a_i=1)$，使得 $\sum_{i=1}^n a_i\xi_i$ 的方差最小.

【解】 若有某 $\sigma_k=0$，取 $a_k=1$，其余 $a_i=0$，则其方差最小. 若所有 $\sigma_i\neq 0$，则可视方差为 n 个变元 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的函数：

$$\mathrm{D}(\sum_{i=1}^n a_i\xi_i)=\sum_{i=1}^n a_i^2\sigma_i^2=f(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

由题设可知有方程 $\varphi(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum_{i=1}^{n}a_i-1=0.$

现用拉格朗日乘数法求方差何时最小，为此作函数

$$F(a_1,a_2,\cdots,a_n)=f+\lambda\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2+\lambda(\sum_{i=1}^{n}a_i-1).$$

令$\frac{\partial F}{\partial a_i}=2a_i\sigma_i^2+\lambda=0,i=1,2,\cdots,n$，解得 $a_i=-\frac{\lambda}{2\sigma_i^2}.$

又$\sum_{i=1}^{n}\frac{-\lambda}{2\sigma_i^2}=1$，从而 $\lambda=-(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma_i^2})^{-1}$. 所以当 $a_i=[\sigma_i^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sigma_k^2}]^{-1}$ 时方差最小，此时方差为

$$\mathbf{D}(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2=(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2})^{-1}.$$

若 σ_i 相等，则 $a_i=\frac{1}{n}$，$\mathbf{D}(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)=\frac{1}{n}\sigma^2.$

【例 9】 若 ξ_1,ξ_2 相互独立，均服从 $\mathbf{N}(a,\sigma^2)$，试证：$\mathbf{E}\max(\xi,\xi_2)=a+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$

【证明】 ξ_1,ξ_2 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}]},$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\max(\xi_1,\xi_2)&=\iint\max(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{x}xf(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}y\\&\quad(\text{因为}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{x}(x-a)f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x}^{+\infty}(y-a)f(x,y)\mathrm{d}y+a.\end{aligned}$$

在前一积分中交换积分次序，在后一积分中交换 x 与 y 得

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\max(\xi_1,\xi_2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{y}^{+\infty}(x-a)f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{y}^{+\infty}(x-a)f(y,x)\mathrm{d}x+a\\&=a+2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{(y-a)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}y\cdot\int_{y}^{+\infty}(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{\text{令 }t=\frac{y-a}{\sigma}}a+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(y-a)^2}{\sigma^2}}\mathrm{d}y=a+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma e^{-t^2}\mathrm{d}t\\&=a+\frac{\sigma}{\pi}\cdot\sqrt{\pi}=a+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$

为了帮助考生在综合题解答上有所突破，下面介绍几种思维策略，希望能激励考生克服思维定式，灵活综合运用所学知识，启发考生综合题解题思路，揭示综合题解题规律.

Ⅰ. 巧妙利用初等变换技巧

【解题提示】 初等变换技巧分为三大类型：(1) 变量替换（前面已有详细叙述）；(2) 恒等变形；(3) 不等式放缩，主要利用不等式的性质和一些基本不等式. 在解答某些综合题时，如果能巧妙地利用这些变换，往往能够促进未知向已知、困难向容易、繁琐向简单的迅速转化，进而达到预期目的.

【例 10】 设曲线 C 为 $y=\sin x,x\in[0,\pi]$，试证：$\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2\leqslant\int_C x\mathrm{d}s\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2.$

【分析】 首先将所证不等式转化为

$$\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2\leqslant\int_0^{\pi}x\sqrt{1+\cos^2x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2.$$

对此不等式,右边比较显然:

$$\int_0^{\pi} x\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{2}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2.$$

故只需证明左边.根据定积分中被积函数的特征,可考虑先作变量替换 $x = \frac{\pi}{2} + t$,再利用不等式:$\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2})$,使之变形为宜于处理的定积分.

【证明】 令 $x = \frac{\pi}{2} + t$,并利用定积分的对称性,得

$$\int_0^{\pi} x\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$\geqslant \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+(\frac{2}{\pi}t)^2}\,\mathrm{d}t \xlongequal{\text{令}u=\frac{2}{\pi}t} \frac{\pi^2}{2}\int_0^1\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

分部积分,并利用不等式:$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}(a>0,b>0)$,得

$$\int_0^1\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u = u\sqrt{1+u^2}\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{d}u$$

$$\geqslant \sqrt{2} - \int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{2u}}\mathrm{d}u = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 u^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}u = \frac{4}{5}\sqrt{2}.$$

因此,有 $\int_0^{x} x\sqrt{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{5} = \frac{2\sqrt{2}}{5}\pi^2 > \frac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2.$

Ⅱ.充分挖掘隐含条件

【解题提示】 在解综合题时,要求考生充分分析和利用题设中所给条件,同时也要善于从题设内涵或结论中挖掘隐含条件.这些隐含条件往往是解题的关键.寻找隐含条件一般从以下几方面着手:① 问题所涉及的基本概念的内涵和性质;② 几何图形的特征;③ 与问题相关学科的知识;④ 分析给定关系式的结构特点;④ 要证明的结论.

【例 11】 已知函数 $f(x)$ 满足方程

$$f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

试求 $f(x)$.

【分析】 首先注意到定积分 $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 是一个常数,且大于0,于是可令 $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = a\ (a>0)$.观察到了这一隐含条件后,根据 $f(x)$ 满足的方程,再去先求出 a,最后可求出 $f(x)$.

【解】 令 $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = a$,则 $f(x) = 3x - a\sqrt{1-x^2}$,即 $\int_0^1(3x - a\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x = a$,

亦即 $\int_0^1(9x^2 + a^2 - a^2x^2 - 6ax\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x = a.$

积分后化简得方程 $2a^2 - 9a + 9 = 0.$

解此方程得 $a = 3, a = \frac{3}{2}.$

故 $f(x)$ 有两个解:$f(x) = 3x - 3\sqrt{1-x^2}$ 及 $f(x) = 3x - \frac{3}{2}\sqrt{1-x^2}.$

【例12】 设 $f(x), g(x)$ 为连续可微函数,且

$$\omega = yf(xy)\,\mathrm{d}x + xg(xy)\,\mathrm{d}y.$$

(1) 若存在 u,使得 $\mathrm{d}u = \omega$,求 $f - g$;

(2) 若 $f(x) = \varphi'(x)$,求 u 使得 $\mathrm{d}u = \omega$.

【分析】 (1) 是在已知 ω 为某一函数 u 的全微分的条件下,求 $f - g$,因而可根据 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$(隐含条件)解出;(2) 是求全微分的原函数,要利用(1) 的结果.

【解】 (1) 由于 $\omega = \mathrm{d}u$，且 f,g 连续可微，故$\dfrac{\partial}{\partial y}[yf(xy)] = \dfrac{\partial}{\partial x}[xg(xy)]$. 令 $s = xy$，得

$$f(s) + s\frac{\mathrm{d}f(s)}{\mathrm{d}s} = g(s) + s\frac{\mathrm{d}g(s)}{\mathrm{d}s},$$

即
$$s\frac{\mathrm{d}(f-g)}{\mathrm{d}s} = -(f-g).$$

由此解得
$$f(s) - g(s) = \frac{C}{s}.$$

或
$$f(xy) - g(xy) = \frac{C}{xy}\quad (C\text{ 为常数}).$$

(2) 当 $f(x) = \varphi'(x)$ 时，由(1)，有

$$\mathrm{d}u = yf(xy)\mathrm{d}x + xg(xy)\mathrm{d}y = y\varphi'(xy)\mathrm{d}x + x\left[\varphi'(xy) - \frac{C}{xy}\right]\mathrm{d}y.$$

由于与积分路径无关，故

$$\begin{aligned} u &= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} y\varphi'(xy)\mathrm{d}x + x\left[\varphi'(xy) - \frac{C}{xy}\right]\mathrm{d}y + C_1 \\ &= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} [y\varphi'(xy)\mathrm{d}x + x\varphi'(xy)\mathrm{d}y] - \frac{C}{y}\mathrm{d}y + C_1 \\ &= \varphi(xy) - C\ln y + C_0\quad (C, C_0\text{ 为任意常数}). \end{aligned}$$

【例 13】 设函数 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$ 定义在$[0,1]$上，证明它在$(0,1)$上满足下述方程：

$$f(x) + f(1-x) + \ln x\ln(1-x) = f(1).$$

【分析】 由题设中幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$ 的收敛半径为 1，且数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，因而由阿贝尔定理，可知 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x) = f(1)$(隐含条件).

【证明】 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$ 的收敛半径为 1，且数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，因而由阿贝尔定理，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x) = f(1)$.

又 $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x^n)'}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n} = -\dfrac{1}{x}\ln(1-x)$，从而 $f'(1-x) = -\dfrac{1}{1-x}\ln x$.

故
$$f'(x) - f'(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) - \frac{1}{1-x}\ln x = 0.$$

积分得
$$f(x) + f(1-x) + \ln x\ln(1-x) = c.$$

令 $x\to1^-$，得 $c = f(1)$. 故 $f(x) + f(1-x) + \ln x\ln(1-x) = f(1)$.

【例 14】 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, a+1, 2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (a-1, -a, 1)^{\mathrm{T}}$ 分别是 λ_1, λ_2 所对应的特征向量，$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有特征值 λ_0，λ_0 所对应的特征向量是 $\boldsymbol{\beta}_0 = (2, -5a, 2a+1)^{\mathrm{T}}$. 试求 a 及 λ_0 之值.

【分析】 由题设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，则隐含着 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化，且不同的特征值所对应的特征向量是正交的，利用该隐含条件即可求出 a 及 λ_0 之值.

【解】 设 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 关于 λ_3 所对应的特征向量. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，有 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交，于是

$$\begin{cases} a - 1 - a(a+1) + 2 = 0, & (1) \\ x_1 + (a+1)x_2 + 2x_3 = 0, & (2) \\ (a-1)x_1 - ax_2 + x_3 = 0. & (3) \end{cases}$$

由(1)解出 $a = 1$ 或 $a = -1$.

若 $a = 1$，从(2)，(3)可得 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (-4, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，此时 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 2, 2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0, -1, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_0 = (2, -5, 3)^{\mathrm{T}}$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 关于 λ 的特征向量就是 $\boldsymbol{A}^*$ 关于 $\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$ 的特征向量. 现在 $\boldsymbol{\beta}_0$ 不与任一个 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量共线，说明 $\boldsymbol{\beta}_0$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特

征向量，$a=1$ 不合题意，舍去.

若 $a=-1$，从(2)，(3) 得 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-5,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_0=(2,5,-1)^{\mathrm{T}}$. 那么 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_0=\lambda_3\boldsymbol{\beta}_0$，又 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2$，有 $\lambda_3\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}_0=\boldsymbol{\beta}_0$，即 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\beta}_0=\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_3}\boldsymbol{\beta}_0=2\boldsymbol{\beta}_0$.

所以 $a=-1,\lambda_0=2$.

【例 15】 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)=4$，求 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

【分析】 因为 $f''(x)$ 存在，所以 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 均在 $x=0$ 处连续. 由题设条件 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，显然有 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，故 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$. 这两个结论都是题中隐含着的重要条件，据此可利用洛必达法则使问题迎刃而解.

【解】 利用洛必达法则以及 $f''(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性，得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}=2.$$

因此，所求极限为 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{x}{f(x)}}\right]^{\frac{f(x)}{x^2}}=\mathrm{e}^2$.

【例 16】 试求 c 值，使 $\int_a^b(x+c)\cos(x+c)\mathrm{d}x=0$，其中 $b>a$.

【分析】 通过上式，可以推理出利用奇函数在对称区间上的积分为零这一性质(隐含条件)来求出 c 值.

【解】 $\displaystyle\int_a^b(x+c)\cos(x+c)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令 }x+c=u}\int_{a+c}^{b+c}u\cos u\mathrm{d}u.$

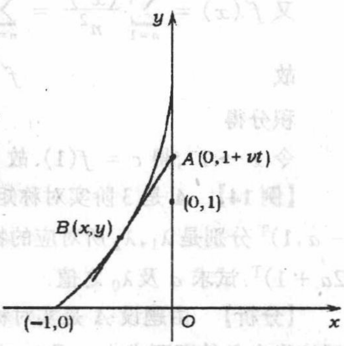
因为 $f(u)=u\cos u$ 为奇函数，所以取 $a+c=-(b+c)$ 可使该积分为 0. 即

$$c=-\frac{a+b}{2}.$$

Ⅲ. 善于捕捉辅助信息

【解题提示】 *在求解综合题时，一定要对题设条件和结论仔细、认真分析，这样往往能捕捉到十分有用的辅助信息，从而导出正确的解题方法.*

【例17】 设物体 A 从点 $(0,1)$ 出发，以速度大小为常数 v 沿 y 轴正向运动；物体 B 从点 $(-1,0)$ 与 A 同时出发，其速度大小为 $2v$，其速度的方向始终指向 A. 试建立物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程，并写出其初始条件.



【分析】 首先由点 B 的速度指向点 A，知曲线 Γ 在点 B 处的切线斜率等于 $\overline{BA}$ 的斜率，于是得一方程；再由点 B 所走的路程得另一方程；由上面两式消去 t，即得关于 $y=y(x)$ 的积分方程，求导即得微分方程.

【解】 设出发后经 t 时，物体 B 到达的位置为 (x,y)，则此时 A 的位置为 $(0,1+vt)$. 设 B 的运动轨迹曲线为 $\Gamma:y=y(x)$，则由于 B 的速度方向恒指向 A，即 Γ 在点 B 的切线是直线 BA，故得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-(1+vt)}{x-0}\quad\text{或}\quad x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y-1-vt. \tag{①}$$

另一方面，点 B 由 $(-1,0)$ 出发至 (x,y) 沿曲线 Γ 所走曲线的弧长为

$$\int_{-1}^{x}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=2vt. \tag{②}$$

将 ② 中的 vt 代入 ①，得

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y-1-\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x.$$

两边对 x 求导，即得微分方程

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=0.$$

初值条件显然是 $\quad y\Big|_{x=-1}=0, y'\Big|_{x=-1}=1.$

【例 18】 设 f 是可导函数,对于任意实数 s,t 有

$$f(s+t)=f(s)+f(t)+2st, \text{且 } f'(0)=1,$$

求函数 f 的表达式.

【分析】 充分考虑 f 的可导性,利用导数定义(由题设信息 $f'(0)=1$)从已知式中得到 $f'(s)$,$f'(0)$ 的关系,从而可建立 f 与 s 的微分方程,解出 f 的表达式.一般地,若题设中有信息 $f'(a)=$ 常数,则应联想到用导数定义.

【解】 因为 $f(s+t)=f(s)+f(t)+2st$,令 $s=0$,则 $f(0+t)-f(0)=f(t)$.因此

$$\frac{f(0+t)-f(0)}{t}=\frac{f(t)}{t}, \text{则 } f'(0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0+t)-f(0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=1. \qquad ①$$

另一方面,由已知式有:$\dfrac{f(s+t)-f(s)}{t}=\dfrac{f(t)}{t}+2s$,

所以 $f'(s)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(s+t)-f(s)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t)}{t}+2s$.

将 ① 式代入上式得 $\quad f'(s)=1+2s.$

积分得 $\quad f(s)=s+s^2+C.$

上式中令 $s=0$ 得 $f(0)=C$,而由 $f(s+t)=f(s)+f(t)+2st$.

令 $s=t=0$ 得 $f(0)=0$. 而 $C=0$,从而可知 $f(s)=s+s^2$.

【例 19】 设 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$,$f(u)$ 为连续函数,且 $f'(0)=1$,$f(0)=0$,求 $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{F(t)}{t^5}$ $(t>0)$.

【解】 $F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r$,

$$\lim_{t\to+0}\frac{F(t)}{t^5}=\lim_{t\to+0}\frac{4\pi\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{t^5}=\lim_{t\to+0}\frac{4\pi f(t^2)t^2}{5t^4}$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{4\pi[f(t^2)-f(0)]}{5(t^2-0)}=\frac{4}{5}\pi f'(0)=\frac{4}{5}\pi.$$

【例 20】 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$,$f'(0)=2$.试求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan^2 x}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-\cos x)-f(0)}{(1-\cos x)-0}\cdot\dfrac{1-\cos x}{\tan^2 x}$

$$=f'(0)\cdot\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\tan^2 x}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

【注】 不能把 $f(1-\cos x)$ 中的 $1-\cos x$ 换成 $\frac{1}{2}x^2$.

Ⅳ. 注重借助几何直观性

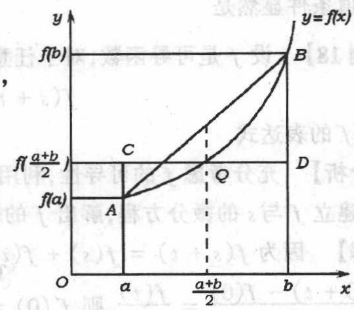
【解题提示】 在解答有些综合题时,如果能根据题设条件画出相应几何图形,了解有关概念的几何意义,凭借几何图形的直观性来分析数学有关问题,将有利于启迪思维,引导方法,构思解题过程,给解题带来很大的方便和捷径.

【例 21】 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续,且对任意的 $t\in[0,1]$ 以及任意的 $x_1,x_2\in[a,b]$ 恒满足不等式 $f(tx_1+(1-t)x_2)\leqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$,证明:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

【分析】 从几何上看,本题所设条件:连续曲线 $y=f(x)$ 是下凸的,因而右边的不等式比较容易证明.而对于左边的不等式,即:矩形 $aCDb$ 的面积不超过曲边梯形 $aAQBb$ 的面积,则需将定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 分成两部分

$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x$，并设法叠加成一项.



【证明】 令 $x = ta + (1-t)b$，则 $\mathrm{d}x = (a-b)\mathrm{d}t$，且当 $x = a$ 时，$t = 1$；$x = b$ 时，$t = 0$. 故

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\int_0^1 f(ta + (1-t)b)\mathrm{d}t$$
$$\leqslant (b-a)\int_0^1 [tf(a) + (1-t)f(b)]\mathrm{d}t$$
$$= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

但另一方面，因为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_2^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x,$$

对后一积分作变量代换：$x = a + b - t$，得

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_{\frac{a+b}{2}}^a f(a+b-t)\mathrm{d}t = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(a+b-t)\mathrm{d}t.$$

故
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x) + f(a+b-x)]\mathrm{d}x$$
$$\geqslant 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(\frac{x+(a+b-x)}{2}\right)\mathrm{d}x = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

因此，有 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

【例 22】 求积分：$I = \int_{-1}^1 \frac{x^2 + 3\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

【分析】 利用对称性，有 $I = 2\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$，作三角代换 $x = \sin t$，得 $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\mathrm{d}t$，以下则不难求解. 但若注意到定积分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 的几何意义，它表示单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与两坐标轴在第一象限所围成的平面图形的面积，则即得 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$. 因此，以下解法就更为简捷.

【解】 $I = 2\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} - 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

$$= 2\arcsin x\Big|_0^1 - 2\cdot\frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ⅴ. 灵活运用反证法

【解题提示】 反证法是通过否定命题结论，引导出与题设条件或已知结论矛盾的方式来证明原命题的正确性. 如果所证结论中含有“不可能”、“不存在”、“至多”、“至少”、“惟一”、“大于或小于”等字眼时，一般考虑用反证法.

【例 23】 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = 0$，则在 (a,b) 内至少存在两点 x_1, x_2，使得 $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

【证明】 用反证法. 由于 $f(x)$ 连续，若 f 在 $[a,b]$ 上无零点，则与 $\int_a^b f\mathrm{d}x = 0$ 矛盾. 若 f 在 (a,b) 内仅有一个零点 x_0，则 $f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 与 $[x_0,b]$ 上均不变号，由积分中值定理可知，存在 $\xi_1 \in (a,x_0)$ 与 $\xi_2 \in (x_0,b)$ 使得

$$0 = \int_a^b xf\mathrm{d}x = \int_a^{x_0} xf\mathrm{d}x + \int_{x_0}^b xf\mathrm{d}x = \xi_1\int_a^{x_0} f\mathrm{d}x + \xi_2\int_{x_0}^b f\mathrm{d}x.$$

又因为$\int_a^b f\mathrm{d}x = 0$,则$\int_a^{x_0} f\mathrm{d}x = -\int_{x_0}^b f\mathrm{d}x$,代入上式有$0 = (\xi_2 - \xi_1)\int_{x_0}^b f\mathrm{d}x$而$f$恒号,$\int_{x_0}^b f\mathrm{d}x \neq 0$,所以必有$\xi_1 = \xi_2$.这与$\xi_1,\xi_2$分属于两个不同区间矛盾.即证得结论成立.

【例 24】 设f在$[0,1]$上连续,$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$,$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = 1$,证明:存在一点$x \in [0,1]$使

$$|f(x)| > 4.$$

【证明】 用反证法.若对任意$x \in [0,1]$,$|f(x)| \leqslant 4$,那么若$f(x) \equiv 4$或$f(x) \equiv -4$,$x \in [0,1]$,则与已知$\int_0^1 f\mathrm{d}x = 0$矛盾.若$|f(x)| \leqslant 4$,且至少在$[0,1]$的某一子区间上$|f(x)| < 4$,不妨设这一子区间为$[\alpha,\beta] \subset [\frac{1}{2},1]$,则

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^1 (x - \frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{2}}^\alpha (x - \frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta (x - \frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x + \int_\beta^1 (x - \frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant 4\int_{\frac{1}{2}}^\alpha (x - \frac{1}{2})\mathrm{d}x + f(\xi)\int_\alpha^\beta (x - \frac{1}{2})\mathrm{d}x + 4\int_\beta^1 (x - \frac{1}{2})\mathrm{d}x \\ &< 4\int_{\frac{1}{2}}^1 (x - \frac{1}{2})\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \quad (\xi \in [\alpha,\beta]).\end{aligned}$$

再由中值定理,有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} (x - \frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x &= f(\eta)\left.\frac{(x - \frac{1}{2})^2}{2}\right|_0^{\frac{1}{2}} \\ &= -f(\eta)\cdot\frac{1}{8} \leqslant \frac{1}{2} \quad (\eta \in [0,\frac{1}{2}],\ |f(\eta)| \leqslant 4).\end{aligned}$$

于是$\int_0^1 (x - \frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} (x - \frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - \frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

但另一方面,$\int_0^1 (x - \frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$,这就产生矛盾.这说明至少有一点$x \in [0,1]$,使$|f(x)| > 4$.

【例 25】 设$\boldsymbol{A}$是n阶下三角阵,证明:

(1) 如果$a_{ii} \neq a_{jj}(i,j = 1,2,\cdots,n$,且$i \neq j)$,则$\boldsymbol{A}$可对角化;

(2) 若$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$,而至少有一个$a_{ij} \neq 0(i > j)$,则$\boldsymbol{A}$不可对角化.

【证明】 (1) $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn}) = 0$.$\boldsymbol{A}$有$n$个不同的特征值$\lambda_1 = a_{11},\lambda_2 = a_{22},\cdots,\lambda_n = a_{nn}$.所以$\boldsymbol{A}$可对角化.

(2) 用反证法.假设$\boldsymbol{A}$可对角化,则$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = (\lambda - a_{11})^n$,$\lambda = a_{11}$是$n$重根,故$\boldsymbol{A}$相似于对角阵$a_{11}\boldsymbol{E}$,即存在可逆阵$\boldsymbol{P}$使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = a_{11}\boldsymbol{E}$.于是

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}a_{11}\boldsymbol{E}\boldsymbol{P}^{-1} = a_{11}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1} = a_{11}\boldsymbol{E}.$$

这与$\boldsymbol{A}$至少有一个$a_{ij} \neq 0(i > j)$矛盾,因而$\boldsymbol{A}$不可对角化.

第二讲　高等数学综合题

Ⅰ.与极限、连续有关的综合题

【例 1】 设$f(x)$当$x \to 1$时其极限存在,在$[0,1]$上可积,且恒有

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 3\lim_{x\to1} f(x).$$

求$f(x)$.

【解】 令$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = l$,　$\lim_{x\to1} f(x) = s$.则

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 2l - 3s.$$

上式两边取 $x \to 1$ 的极限，于是

$$s = 7 - 2l - 3s, \text{即 } s = \frac{1}{4}(7 - 2l).$$

于是，$f(x) = 3x^2 + 4x - \frac{3}{4}(7 - 2l) = 3x^2 + 4x + \frac{3}{2}l - \frac{21}{4}$.

上式两边对 x 在[0,1]上积分，得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (3x^2 + 4x + \frac{3}{2}l - \frac{21}{4})\mathrm{d}x.$$

解得 $\quad l = 3 + \frac{3}{2}l - \frac{21}{4}$，则 $l = \frac{9}{2}, s = -\frac{1}{2}$.

故 $\quad f(x) = 3x^2 + 4x - 2 \times \frac{9}{2} - 3 \times (-\frac{1}{2}) = 3x^2 + 4x - \frac{15}{2}$.

【例 2】 求 $\quad \lim\limits_{x\to 1}(x - 1)^3 \sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.

【解】 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ 的收敛域为$(-1,1)$.

$$\text{令 } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = x(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n^2 x^{n-1}\mathrm{d}x)'$$

$$= x(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n)' = x(x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1})' = x[x(\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 nx^{n-1}\mathrm{d}x)']'$$

$$= x[x(\sum_{n=1}^{\infty} x^n)']' = x[x\cdot(\frac{x}{1-x})']' = x[\frac{x}{(1-x)^2}]' = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}.$$

故 $\quad \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^3 \sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^3 \cdot \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} = -2$.

【例 3】 设连续函数 $f(x)$ 在$[1, +\infty]$单调减少，且 $f(x) > 0$，若

$$u_n = \sum_{k=}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x,$$

证明：当 $n \to \infty$ 时，u_n 的极限存在.

【证明】 $u_{n+1} - u_n = \sum\limits_{k=1}^{n+1} f(k) - \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$

$$= f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = f(n+1) - f(\xi), \xi \in (n, n+1).$$

因为 $f(x)$ 在$[1, +\infty)$连续且单调减少，故 $n < \xi < n+1, f(n+1) < f(\xi)$. 从而

$$u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(\xi) < 0,$$

即 $\{u_n\}$ 是单减数列，

$$u_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$$

$$= [f(1) - \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x] + \cdots + [f(n-1) - \int_{n-1}^n f(x)\mathrm{d}x] + f(n)$$

$$= [f(1) - f(\xi_1)] + \cdots + [f(n-1) - f(\xi_{n-1})] + f(n),$$

其中 $i < \xi_i < i+1 (i = 1,2,\cdots,n-1)$，据题设

$$f(i) - f(\xi_i) > 0, \quad f(n) > 0,$$

故 $u_n > 0$，即$\{u_n\}$是单调减少下有界数列，故 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 存在.

【例 4】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}), 0 < |x| < 1$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n}), 0 < |x| < 1$.

【解】 (1) 令 $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$，则

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}.$$

$$f(x) = \left(\frac{x - x^{n+1}}{1 - x}\right)' = \frac{[1 - (n+1)x^n](1 - x) + x - x^{n+1}}{(1 - x)^2}$$

$$= \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1 - x)^2}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1 - x)^2} = \frac{1}{(1 - x)^2}$(因 $|x| < 1$).

(2) 令 $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n}$,则

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (t + t^2 + \cdots + t^{n-1})\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t - t^n}{1 - t}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\int_0^x \frac{t}{1 - t}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t}\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[-x - \ln(1 - x) - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t}\mathrm{d}t\right].$$

由于 $0 < \left|\int_0^x \frac{t^n}{1 - t}\mathrm{d}t\right| < \int_0^{|x|} \frac{t^n}{1 - |x|}\mathrm{d}t = \frac{1}{1 - |x|} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{n + 1}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1 - |x|} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{n + 1} = 0$ (因 $|x| < 1$),

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x}\left[-x - \ln(1 - x) - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t}\mathrm{d}t\right]$

$$= -1 - \frac{\ln(1 - x)}{x}.$$

【例 5】 设 $y(x)$ 在 $[x_0, +\infty)$ 上有连续的一阶导函数,$\lim\limits_{x\to\infty}[y'(x) + y(x)] = a$,求 $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$.

【解】 设 $y'(x) + y(x) = f(x)$,解此微分方程,得

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + c\right].$$

由已知条件有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$.

(1) 当 $a = 0$,且 $\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$ 收敛时,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0 = a$;

(2) 当 $a \neq 0$,或 $a = 0$ 但 $\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$ 发散,则

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + c}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = a.$$

综上所述 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = a$.

Ⅱ. 与导数及其应用有关的综合题

【例 6】 设 $f_n(x) = \cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x$,证明:

(1) 对任意自然数 n,方程 $f_n(x) = 1$ 在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 内有且仅有一个根;

(2) 设 $x_n \in [0, \frac{\pi}{3}]$ 是 $f_n(x) = 1$ 的根,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{3}$.

【证明】 (1) 当 $n = 1$ 时,结论显然成立. 下设 $n > 1$,令 $y = \cos x$,则

$$f_n(x) = g_n(y) = y + y^2 + \cdots + y^n.$$

在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上考虑函数 $h_n(y) = g_n(y) - 1$,因 $h_n(y)$ 连续,且 $h_n(\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2})^n < 0$,$h_n(1) = n - 1 > 0$,所以存在 $y_n \in (\frac{1}{2}, 1)$,使得 $h_n(y_n) = 0$. 又因当 $y \in [\frac{1}{2}, 1)$ 时 $h'_n(y) = 1 + 2y + \cdots + ny^{n-1} > 1$,所以 $h_n(y)$ 严格增. 于是 y_n 是惟一的,而 $y = \cos x$ 在 $[0, \frac{\pi}{3})$ 上严格下降,故对每一个 y_n,存在惟一的 $x_n = \arccos y_n \in (0, \frac{\pi}{3})$ 满足要求.