



普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

经济应用数学

——微积分

主编 刘云芳 胡 婷 周海兵



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

经济应用数学——微积分

主 编	刘云芳	胡 婷	周海兵
副主编	陈 筱	朱奋秀	徐泰燕
	周 琳	钱 珑	董培佩
	张福生	张志会	

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 简 介

本书以专科层次学生的数学水平为基础,结合目前高校普遍的数学教育现状和特点编写而成。内容设计简明,叙述通俗易懂。内容包括函数、极限和连续、导数和微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、二元函数的微积分、微分方程。

本书可供高职高专的学生,尤其是经济管理类相关专业的学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学.微积分/刘云芳,胡婷,周海兵主编. —武汉:华中科技大学出版社,2015.7
ISBN 978-7-5680-1029-0

I. ①经… II. ①刘… ②胡… ③周… III. 经济数学-高等职业教育-教材 ②微积分-高等职业教育-教材 IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 157626 号

经济应用数学——微积分

刘云芳 胡 婷 周海兵 主编

策划编辑:郭 铭

责任编辑:郭 铭

封面设计:潘 群

责任校对:李 琴

责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)81321913

录 排:武汉市洪山区佳年华文印部

印 刷:武汉科源印刷设计有限公司

开 本:710mm×1000mm 1/16

印 张:14

字 数:288 千字

版 次:2015 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

定 价:32.00 元



本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

前 言

在数学基础相对薄弱的专科生教学上,我们要彻底转变观念,适度放弃对于理论体系的完整性和严谨性的追求,适当减少理论讲解,重点强化运算及应用能力。编者结合自身多年在独立学院教学实践经验,在认真分析了专科生对数学的需求后,编写了高等数学学习的微积分部分。本书有以下特点:

1. 以“必需、够用”为原则。不刻意追求理论体系的完整性和运算技巧,突出数学思想、数学方法的应用。

2. 强调直观,降低难度。采用数据、图像直观启发学生,通过大量基础型例题对知识点进行阐述,外加注解帮助学生加强理解。

3. 本书按章节配备适量的习题。每个小节后面的习题都有参考答案,而每章的总习题都有解题提示或是详细的解题过程,为学生独立自主学习数学提供方便。

本书由湖北经济学院法商学院和武昌工学院合作编写完成。其中,第1章至第4章由湖北经济学院法商学院的刘云芳、周海兵、朱奋秀、钱珑、张福生共同编写;第5章至第8章由武昌工学院的胡婷、周琳、陈筱、徐泰燕、董培佩、张志会共同编写。全书由刘云芳、胡婷统稿。

在本书的编写过程中,参考了众多教材和书籍,借鉴和吸收了相关成果,在此表示衷心感谢。书中标有“※”号的内容为选讲,由任课教师自行决定。

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中难免存在疏漏之处,敬请专家、同行及广大读者指正。

编 者

2015年4月

目 录

第 1 章 初等数学	(1)
1.1 方程与不等式	(1)
习题 1.1	(2)
1.2 实数与区间	(3)
习题 1.2	(5)
1.3 函数	(5)
习题 1.3	(14)
1.4 常用的经济函数	(14)
习题 1.4	(18)
习题一	(18)
第 2 章 极限与连续	(21)
2.1 极限的概念	(21)
习题 2.1	(25)
2.2 无穷小与无穷大	(26)
习题 2.2	(27)
2.3 极限的运算	(28)
习题 2.3	(30)
2.4 两个重要极限	(31)
习题 2.4	(34)
2.5 无穷小的比较	(34)
习题 2.5	(36)
2.6 函数的连续性	(37)
习题 2.6	(42)
2.7 闭区间上连续函数的性质	(43)
习题 2.7	(44)
习题二	(44)
第 3 章 导数与微分	(47)
3.1 导数概念	(47)
习题 3.1	(51)

3.2 导数的基本公式与运算法则	(52)
习题 3.2	(58)
3.3 隐函数的导数、对数求导法和参数方程确定的函数的导数	(58)
习题 3.3	(61)
3.4 高阶导数	(61)
习题 3.4	(63)
3.5 函数的微分	(63)
习题 3.5	(66)
3.6 导数在经济分析中的应用	(67)
习题 3.6	(71)
习题三	(72)
第4章 导数的应用	(74)
4.1 微分中值定理	(74)
习题 4.1	(76)
4.2 洛必达法则	(77)
习题 4.2	(80)
4.3 函数的单调性	(81)
习题 4.3	(82)
4.4 函数的极值与最值	(83)
习题 4.4	(90)
4.5 函数的凹凸性与拐点	(90)
习题 4.5	(92)
4.6 函数图形的描绘	(93)
习题 4.6	(97)
习题四	(97)
第5章 不定积分	(99)
5.1 不定积分的概念	(99)
习题 5.1	(101)
5.2 基本积分公式	(101)
习题 5.2	(103)
5.3 换元积分法	(103)
习题 5.3	(109)
5.4 分部积分法	(110)
习题 5.4	(113)

习题五	(113)
第 6 章 定积分	(116)
6.1 定积分概念	(116)
习题 6.1	(122)
6.2 微积分基本公式	(122)
习题 6.2	(125)
6.3 定积分的换元法	(125)
习题 6.3	(127)
6.4 定积分的分部积分法	(128)
习题 6.4	(130)
6.5 定积分的应用	(130)
习题 6.5	(138)
习题六	(139)
第 7 章 二元函数的微积分	(142)
7.1 空间解析几何简介	(142)
习题 7.1	(145)
7.2 二元函数的定义与连续	(146)
习题 7.2	(149)
7.3 偏导数	(149)
习题 7.3	(152)
7.4 全微分	(153)
习题 7.4	(154)
7.5 二元复合函数的求导法则	(154)
习题 7.5	(157)
7.6 二元函数的极值与最值	(157)
习题 7.6	(162)
7.7 二重积分	(162)
习题 7.7	(170)
习题七	(171)
第 8 章 微分方程	(174)
8.1 微分方程的基本概念	(174)
习题 8.1	(175)
8.2 一阶微分方程	(175)
习题 8.2	(179)

8.3 二阶常系数线性微分方程	(180)
习题 8.3	(184)
8.4 微分方程的应用	(184)
习题八	(186)
课后习题参考答案	(188)
参考文献	(215)

第1章 初等数学

高等数学是在初等数学的基础上发展起来的,它的主体是微积分,其知识和研究方法在自然科学、工程技术、经济管理等领域都有着广泛的应用。本章介绍方程、不等式、函数等基本初等数学知识,以起到承前启后的作用,方便读者更好地学习高等数学。

1.1 方程与不等式

1.1.1 一元二次方程

含有未知数的等式称为方程。方程研究的是事物之间的等量关系,并为人们提供由已知量推求未知量的重要方法,在实际生活中有着非常广泛的应用。其中,我们常见的是只含有一个未知数,且未知数的最高次数是2的方程,此方程称为一元二次方程,它的一般形式为

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$$

对于这种一元二次方程,以 $x^2+3x+2=0$ 为例,我们可以用因式分解法来求根,运算过程如下:

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)=0, \quad \text{即} \quad x+1=0 \quad \text{或} \quad x+2=0$$

所以,该方程的两个根为 $x_1=-1, x_2=-2$ 。

其实,对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$,我们还可以通过配方法变形为

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

然后,再直接开平方,得到它的求根公式

$$x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

这里记 $\Delta=b^2-4ac$,称为根的判别式。当 $\Delta>0$ 时,方程有两个不等实根;当 $\Delta=0$ 时,方程有两个相等实根;当 $\Delta<0$ 时,方程没有实根。

1.1.2 不等式

1. 一元一次不等式

只含有一个未知数,且未知数的最高次数为1的不等式,形如 $ax<b$ ($a \neq 0$),称

为一元一次不等式,其中,不等式中的“ $<$ ”可以换成“ $\leq$ ”、“ $>$ ”或者“ $\geq$ ”。

对于 $ax < b$ ($a \neq 0$), 只需两边同时除以 a 即可求解: (1) 当 $a > 0$ 时, $x < \frac{b}{a}$ 。如 $2x < 4$ 的解为 $x < 2$; (2) 当 $a < 0$ 时, $x > \frac{b}{a}$ 。如 $-3x < 12$ 的解为 $x > -4$ 。

2. 一元二次不等式

只含有一个未知数,且未知数的最高次数为 2 的不等式,形如 $ax^2 + bx + c < 0$ ($a \neq 0$), 称为一元二次不等式。其中,不等式中的“ $<$ ”可以换成“ $\leq$ ”、“ $>$ ”或者“ $\geq$ ”。

例 1 解不等式 $x^2 + 3x + 2 < 0$ 。

解 首先,对 $x^2 + 3x + 2$ 进行因式分解,显然,当且仅当两个因式 $x+1$ 、 $x+2$ 异号(一正一负)时,它们的乘积才会小于零。

求解该不等式对应的一元二次方程 $x^2 + 3x + 2 = 0$, 得 $x_1 = -1$, $x_2 = -2$ 。

易知,当 $x < -2$ 或 $x > -1$ 时,两因式 $x+1$ 、 $x+2$ 均大于零,此时 $(x+1)(x+2) > 0$; 当 $-2 < x < -1$ 时,两因式才是一正一负的,此时 $(x+1)(x+2) < 0$ 。

所以不等式的解为 $-2 < x < -1$ 。

3. 绝对值不等式

含有未知数的绝对值的不等式,称为绝对值不等式。这里我们仅简述以下几个常见的绝对值不等式:

$$|x| < a \Rightarrow -a < x < a \text{ (其中 } a > 0, \text{下同)};$$

$$|x| > a \Rightarrow x < -a \text{ 或 } x > a;$$

$$|x-b| < a \Rightarrow -a+b < x < a+b;$$

$$0 < |x-b| < a \Rightarrow -a+b < x < b \text{ 或 } b < x < a+b, \text{也即 } -a+b < x < a+b \text{ 且 } x \neq b.$$

注: $|x-b| < a$ 表示的是与点 $x_0 = b$ 的距离小于 a 的全部点的集合,其中包含点 $x_0 = b$; 而 $0 < |x-b| < a$ 表示的是与点 $x_0 = b$ 的距离小于 a 的全部点的集合,但其中不包含点 $x_0 = b$ 。

习 题 1.1

1. 求解下列一元二次方程:

$$(1) x^2 - 4x + 4 = 0; \quad (2) x^2 - 5x + 6 = 0; \quad (3) x^2 - 3x + 1 = 0.$$

2. 解下列不等式,并在数轴上表示出来:

$$(1) 0 < x^2 < 9; \quad (2) |x-4| < 7; \quad (3) x^2 - 5x + 6 > 0.$$

3. 已知方程 $x^2 - kx + 4 = 0$, 问:

(1) 方程何时有两个相等实根?

(2) 方程何时有两个不同实根?

(3) 方程何时无实根?

4. 已知方程 $x^2 + bx + c = 0$ 有两个相等的非零实根, 且 b 与 c 互为相反数, 求 b, c 的值。

1.2 实数与区间

函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象。在数学、自然科学、经济学和管理科学的研究中, 经常会遇到函数关系。在微积分学中, 我们会陆续学习到极限、连续、导数、积分等知识, 在这些数学分析中, 函数一直都是研究的基本对象, 因而它是微积分中最重要的概念之一。

1.2.1 实数与数轴

随着生产的发展, 人们对于数的认识也是逐步深入和发展的。由于要对劳动成果进行分配和交换, 所以人们需要计数, 因而首先认识了自然数集, 继而发展到整数集、有理数集, 再进一步发展到无理数集。有理数与无理数统称为实数。可以证明, 实数充满整个数轴而没有空隙, 也就是实数不仅具有稠密性, 而且具有连续性。这样, 在数轴上的点就与实数间建立了一一对应的关系, 数轴上的每一点都表示某一个实数, 而每一个实数也都对应着数轴上的某一个点。正因为如此, 我们常把数轴上的点和实数不加区别地混合使用, 并称数轴为实数轴。其中常用的数集如下。

① 自然数集: $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$;

② 整数集: $\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$;

③ 有理数集: $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbf{Z}, q \neq 0, \text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质} \right\}$;

④ 实数集: $\mathbf{R}$, 其中 $\mathbf{R}^+ = \{x \mid x > 0, x \in \mathbf{R}\}$ 。

1.2.2 区间与邻域

在实际问题中, 一个变量根据其所研究问题中的条件, 一般会受到一定的限制, 也即变量会有一定的取值范围, 如果超出这个范围, 就会使研究失去意义。在数学中常用区间表示一个变量的变化范围, 区间用符号 I 表示, 下面介绍一些常见的区间记号。

设 $\forall a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$ 。

1. 有限区间

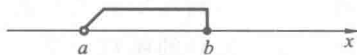
(1) 开区间: $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$;



(2) 闭区间: $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$;



(3) 半开半闭区间: $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$;



类似地, 还有 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ 。

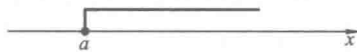


2. 无限区间

(1) $(a, +\infty) = \{x | x > a\}$;



(2) $[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$;



(3) $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$;



(4) $(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$;



(5) $(-\infty, +\infty) = \{x | x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$ 。

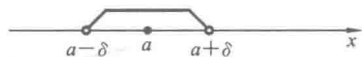


其中, a, b 称为区间的端点。在有限区间中, $b-a$ 称为区间的长度。

3. 邻域

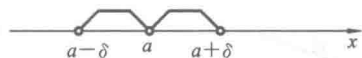
最后, 我们引入某点的邻域与去心邻域。所谓点 a 的邻域, 是指以 a 为中心、 δ 为邻域半径 (其中 $\delta > 0$) 的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$, 记为 $U(a, \delta)$, 也即

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$$



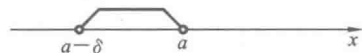
但在一些数学研究中,我们常常会用到点 a 的 δ 去心邻域,记为 $\dot{U}(a, \delta)$:

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$$

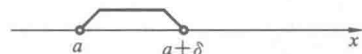


常用的还有点 a 的左 δ 邻域和点 a 的右 δ 邻域:

点 a 的左 δ 邻域,记为 $U_-(a, \delta)$: $U_-(a, \delta) = (a - \delta, a)$



点 a 的右 δ 邻域,记为 $U_+(a, \delta)$: $U_+(a, \delta) = (a, a + \delta)$



例如, $|x - 3| < \frac{1}{10}$, 即是以点 $a = 3$ 为中心、 $\frac{1}{10}$ 为半径的邻域,也即开区间 $(2.9, 3.1)$ 。

习 题 1.2

1. $|x - 5| < \frac{1}{2}$ 是以点 $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}$ 为中心、以 $\underline{\hspace{2cm}}$ 为半径的邻域,也即区间 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. $0 < |x - 1| < 2$ 是以点 $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}$ 为中心、以 $\underline{\hspace{2cm}}$ 为半径的去心邻域,也即区间 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

1.3 函 数

1.3.1 定义

定义 1.1 设 x, y 是两个变量, x 的取值范围为 D , 如果存在一个对应规则 f , 使得对 D 内的每一个值 x 都有唯一的 y 值与之对应, 则这个对应规则 f 称为定义在集合 D 上的函数关系, 或称变量 y 是变量 x 的函数, 记为 $y = f(x)$, $x \in D$. x 称为自变量, y 称为因变量, x 的取值范围 D 称为函数的定义域, y 的取值范围称为函数的

值域。

其中,定义域的求法原则:

- (1) $\frac{1}{x}, x \neq 0$;
- (2) $\sqrt{x}, x \geq 0$;
- (3) $\ln x, x > 0$;
- (4) $\arcsin x$ 和 $\arccos x, -1 \leq x \leq 1$;
- (5) $\tan x, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$;
- (6) $\cot x, x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 。

注:若同时含有上述两种及两种以上情况时,要求出使各部分都成立的交集。

例 1 求函数 $y = \sqrt{4-x^2} + \ln(x^2-1)$ 的定义域。

解 由于 $4-x^2 \geq 0$ 且 $x^2-1 > 0$,

即 $-2 \leq x \leq 2$ 且 $x < -1$ 或 $x > 1$,

所以,该函数的定义域为 $D = [-2, -1) \cup (1, 2]$ 。

例 2 求函数 $\arcsin \frac{x-1}{5} + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域。

解 $\left| \frac{x-1}{5} \right| \leq 1$ 且 $\sqrt{25-x^2} > 0$,

即 $|x-1| \leq 5$ 且 $|x| < 5$,
 $-4 \leq x \leq 6$ 且 $-5 < x < 5$,

因此 $-4 \leq x < 5$ 。

于是,该函数的定义域为 $D = [-4, 5)$ 。

研究一个函数,必须知道自变量与因变量的对应规则以及函数的定义域,否则就不能确定一个函数。若两个函数的对应规则与定义域都相同,我们称两个函数相同,否则称两个函数不相同。至于自变量和因变量用什么字母表示,则无关紧要。因此,只要定义域相同,对应规则相同,则函数 $y=f(x)$ 与 $y=f(t)$ 就是同一个函数。

例 3 下列函数是否相同?为什么?

- (1) $f(x) = \frac{x}{x}, g(x) = 1$;
- (2) $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$;
- (3) $f(x) = 2\sin x \cos x, g(x) = \sin 2x$ 。

解 (1) 不相同,因为定义域不同, $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。

(2) 不相同,因为对应规则不同,当 $x = -1$ 时, $f(x) = -1$, 而 $g(x) = 1$ 。

(3) 相同, 因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的对应规则相同, 定义域也相同, 均为区间 $(-\infty, +\infty)$ 。

1.3.2 函数的表示法

如何表示函数关系是需要我们不断研究和发现的。常用的函数表示法有三种: 一种是用数学公式来表示, 称为**解析法**; 一种是用坐标系中的曲线反映两个变量之间的函数关系, 称为**图示法**; 还有一种方法是用一个表格反映两个变量之间的函数关系, 称为**表格法**。高等数学中讨论的函数大多由解析法表示, 这是由于对解析公式可以进行各种运算, 便于研究函数的性质。这里有一点必须指出: 用解析法表示函数, 不一定总是用一个式子表示。有些函数, 对于其定义域内自变量 x 不同的值, 不能用一个统一的数学表达式表示, 而要用两个或两个以上的式子表示, 这类函数称为**分段函数**。例如:

国际航空信件的邮资 F 与重量 m 的关系是

$$F(m) = \begin{cases} 4, & 0 < m \leq 10 \\ 4 + 0.3(m - 10), & 10 < m \leq 200 \end{cases}$$

在这个实际应用问题中, 我们可以看到, 由于信件重量的不同, 邮资的运算公式不同, 两个公式并不能合成一个公式来表示, 因此此处用到分段函数来表达。进一步地, 如果在该分段函数中, 要求出函数值 $F(3)$ 、 $F(8)$ 和 $F(20)$, 我们应该根据自变量 m 取值所属的区间范围来判定到底使用哪个表达式进行函数值的运算。当 m 用 3 替代, $3 \in (0, 10]$, 由第一个关系式表示, 得到 $F(3) = 4$, 同理可以得到 $F(8) = 4$; 当 m 用 20 替代, $20 \in (10, 200]$, 由第二个关系式表示, 得到 $F(20) = 4 + 0.3 \times (20 - 10) = 7$ 。

1.3.3 几个特殊函数

(1) 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

绝对值函数的图像如图 1.3.1 所示。

(2) 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

符号函数的图像如图 1.3.2 所示。

(3) 取整函数 $y = [x]$, 也称为高斯函数, 其中, $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 并称 $[x]$ 为 x 的整数部分 (见图 1.3.3)。

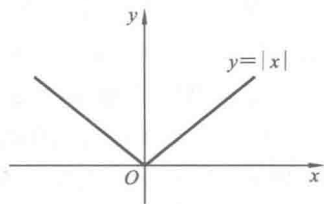


图 1.3.1

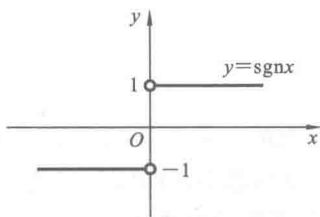


图 1.3.2

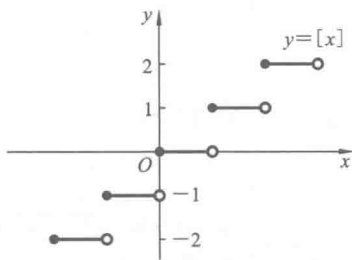


图 1.3.3

例如: $[1.5] = 1$, $[-1.5] = -2$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[0.5] = 0$, 等等。

1.3.4 函数的基本性质

下面把在中学里大家已经知道的函数的基本性质复习一下, 也就是函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性。

1. 单调性

当自变量增加时因变量也随之增加, 这样的函数称为单调递增函数。单调递减函数恰好是相反的, 在单调递减函数中, 因变量 y 随着自变量 x 的增加而减少。如果函数当 x 增加时, 它所对应的 y 既不是增加, 也不是减少, 这样的函数就不具有单调性。

例 4 判断函数 $f(x) = x^2$ 当 $x > 0$ 时的单调性。

分析 利用单调性的定义, 只要证明对任意的 $x_1 > x_2$, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$ 即可。

解 当 $x > 0$ 时, 取任意的 $x_1 > x_2 > 0$, 在不等式 $x_1 > x_2$ 两端同乘以 x_1 或 x_2 , 显然有 $x_1^2 > x_1 x_2$, $x_1 x_2 > x_2^2$, 由不等式的传递性就得到 $x_1^2 > x_2^2$ 。由定义可知, $f(x) = x^2$ 当 $x > 0$ 时是单调递增的。

2. 奇偶性

一个函数的图形如果关于 y 轴对称, 这样的函数为偶函数。从解析式上看, 如果有 $f(-x) = f(x)$, $f(x)$ 就称为偶函数。

一个函数的图形如果关于原点对称, 这样的函数为奇函数。从解析式上看, 如果有 $f(-x) = -f(x)$, $f(x)$ 就称为奇函数。

例 5 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = x^3 - 1$; (2) $f(x) = x \cos x$ 。

解 (1) 取 $x=1, x=-1$, $f(-1) = -2$, $f(1) = 0$, 显然 $f(-1) \neq -f(1)$, 可知 $f(x) = x^3 - 1$ 不是奇函数。又显然 $f(-1) \neq f(1)$, 由此可知 $f(x) = x^3 - 1$ 不是偶函数。

(2) 因为 $f(x) = x$ 是奇函数, $f(x) = \cos x$ 是偶函数, 而奇函数和偶函数的乘积

是奇函数,所以 $f(x)=x\cos x$ 是奇函数。

3. 有界性

当自变量在定义域中变化时,函数值始终在一个有限的区间内变化,也就是说无论自变量怎样变化,都有 $-M \leq f(x) \leq M$,这条曲线所反映的函数就是有界函数。

例6 讨论下列函数的有界性。

$$(1) f(x) = \sin x; \quad (2) f(x) = \frac{1}{x}, 1 < x < 2; \quad (3) f(x) = \frac{1}{x}, 0 < x < 1.$$

解 (1) 由于 $|\sin x| \leq 1, -\infty < x < +\infty$,即存在 $M=1$,使得对定义域内任意 x 取值,均有 $-1 \leq f(x) \leq 1$,故该函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界。

(2) 由于 $\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{1} = 1 (1 < x < 2)$,故函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, 2)$ 内有界,可取 $M=2$ 。

(3) 由于 $\forall M_1 \in \mathbf{R}^+$,都可取 $x_0 = \frac{1}{M_1+1} \in (0, 1)$,使得 $f(x_0) = \frac{1}{x_0} = M_1 + 1 > M_1$,所以函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内无界。

4. 周期性

如果存在一个正数 T ,对任意的自变量 x ,有 $f(x+T)=f(x)$,这样的函数就称为周期函数。从图形上反映,这个函数在相隔为 T 的任意两点上的函数值都是一样的;也可以这样来看,从任意一点出发,以长度 T 为间隔划分区间,在每个区间上的函数图形都是完全一致的。如初等数学中学过的 $f(x)=\sin x$ 就是一个以 2π 为周期的周期性函数。

1.3.5 反函数与复合函数

1. 反函数

设函数的定义域为 D_f ,值域为 V_f 。对于任意的 $y \in V_f$,在 D_f 上至少可以确定一个 x 与 y 对应,且满足 $y=f(x)$ 。如果把 y 看作自变量, x 看作因变量,就可以得到一个新的函数 $x=f^{-1}(y)$ 。我们称这个新的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数,而把函数 $y=f(x)$ 称为直接函数。

由于习惯上 x 表示自变量, y 表示因变量,于是我们约定 $y=f^{-1}(x)$ 也是直接函数 $y=f(x)$ 的反函数。应当说明的是函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 具有相同的图形。而直接函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的。

2. 复合函数

设 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$,若函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$, $D(f) \cap Z(\varphi)$ 非空,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数,其中 x 为自变量, y 为因变量, u 为中间变量。