"十三五"应用型本科基础课规划教材

线性代数

Linear Algebra

主 编 陈 帆 王安平
副主编 李小飞 都俊杰 赵 伟

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十三五” 教材

线性代数

主　编　陈　帆　王安平

副主编　李小飞　都俊杰　赵　伟

参　编　秦　川　范臣君　邓义梅

李琼琳　冉庆鹏　陈保周

张月梅

机械工业出版社

本书根据教育部最新制定的高等学校《线性代数课程教学基本要求》，并参考历年研究生入学考试《数学（一）考试大纲》编写而成。

本书共分六章，内容包括行列式、矩阵、向量与其线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型和 MATLAB 应用。书末附有部分习题的答案或提示。

本书可作为高等院校非数学类各专业线性代数课程的教材或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/陈帆，王安平主编. —北京：机械工业出版社，2015. 8

“十三五”应用型本科基础课规划教材

ISBN 978 - 7 - 111 - 50883 - 0

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①陈…②王… Ⅲ. ①线性代数 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 184601 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰
封面设计：路恩中
责任印制：刘 岚
北京京丰印刷厂印刷
2015 年 8 月第 1 版 · 第 1 次印刷
190mm × 215mm · 11 印张 · 256 千字
标准书号：ISBN 978 - 7 - 111 - 50883 - 0
定价：35. 00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
电话服务
服务咨询热线：010-88379833
读者购书热线：010-88379649

网络服务
机 工 官 网：www. cmpbook. com
机 工 官 博：weibo. com/cmp1952
教育服务网：www. cmpedu. com
金 书 网：www. golden-book. com

前　　言

本书是以长江大学工程技术学院自编讲义《线性代数》为基础，结合原讲义在使用过程中所反映出的不足以及作者多年的教学实践经验重新编写而成。全书共分为六章，内容包括行列式、矩阵、向量与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型以及 MATLAB 在线性代数中的应用。

本书在编写过程中，在保持原讲义内容体系的基础上，遵循了“基础为本，渗透思想，注重应用”的原则。首先，对原讲义中基础内容阐述不清的部分进行了修改，对部分语言进行了规范和精炼，并对二次型部分的知识点进行了扩充，力求让学生能够通过阅读本书全面地掌握线性代数的基础知识；其次，对于原讲义中的例子进行了大量的修改，做到每一节中出现的例子与知识点相对应，每节的例子按照层层递进的思维模式，通过这些具有代表性的例子来渗透线性代数的思想方法；最后，结合启发式教学方法，在每章开篇提出一个实际问题引出本章的知识，然后在本章内容中逐步将此问题解决，并对应地在每章的最后一节专门设置了应用案例环节，做到理论与实际相结合。

本书由陈帆、王安平任主编，李小飞、赵伟、都俊杰任副主编。其中，第 1 章由赵伟编写，第 2 章由都俊杰编写，第 3 章与第 6 章由陈帆编写，第 4 章由王安平编写，第 5 章由李小飞编写，全书由陈帆、王安平负责统稿。本书在编写过程中，长江大学工程技术学院基础教学部数学教研室的广大同仁都参与其中，提出了宝贵的建议，在此一并表示感谢！

由于编者水平有限，书中难免有不当之处，敬请广大读者不吝赐教。

本书可作为高等院校本科非教学类各专业线性代数课程的教材，亦可作为研究生入学考试的教学参考书。

编者

目　　录

第1章 行 列 式

在现实生活中，有许多问题都可以归结为解一个线性方程组.行列式作为线性代数的重要组成部分，是研究线性方程组解法的重要工具，具有广泛的应用. 假如你是自主创业的老板，你销售的甲、乙、丙、丁四种商品四个月的总利润(单位：万元)如表1-1所示，试求出每种商品的利润率.

表1-1

商品 / 月次	销售额/万元				总利润/万元
	甲	乙	丙	丁	
1	4	6	8	10	2.74
2	4	6	9	9	2.76
3	5	6	8	10	2.89
4	5	5	9	9	2.79

类似的问题便可归结为一个线性方程组，并利用行列式来解决.本章首先以二元和三元线性方程组的求解为背景引入行列式的概念，然后讨论行列式的性质和计算方法，最后给出解特殊 n 元线性方程组的方法—克莱姆法则.

1.1 n 阶行列式的定义

在讨论 n 阶行列式之前，先从二元和三元线性方程组的求解过程，引入二阶和三阶行列式，然后将概念推广，得到 n 阶行列式的概念.

1.1.1 二阶与三阶行列式

1. 二阶行列式

例如，对于一个二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1-1-1}$$

利用消元法，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1-1-1)有唯一解，解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

上式给出了二元线性方程组(1-1-1)的一个求解公式. 为了便于记忆，我们引入二阶行列式的定义.

定义 1.1.1 由 2×2 个元素 $a_{ij}(i, j = 1, 2)$ 排成 2 行 2 列(横排称行，竖排称列)，两边各加一条竖线，得到的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为**二阶行列式**. 二阶行列式中，元素 $a_{ij}(i, j = 1, 2)$ 称为行列式第 i 行、第 j 列的元素. 如元素 a_{21} 为行列式第 2 行、第 1 列的元素. 二阶行列式的值为 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$-$ $+$

图 1-1

二阶行列式可用**对角线法则**来记忆. 参看图 1-1，把左上角 a_{11} 到右下角 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，从右上角 a_{12} 到左下角 a_{21} 的虚连线称为**次对角线**，于是二阶行列式等于它的主对角线上两个元素的乘积减去次对角线上两元素的乘积.

根据以上二阶行列式的定义，线性方程组(1-1-1)的解可用二阶行列式表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix},$$

则线性方程组(1-1-1)的解可简记为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{D_1}{D},\\[2ex] x_2=\dfrac{D_2}{D}.\end{cases}\quad (D\neq 0)$$

显然，行列式 D 是方程组中未知量的系数按原来的位置顺序构成的，我们把它称为这个方程组的**系数行列式**；$D_j(j=1,\ 2)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替所得到的行列式.

例 1.1.1 解方程组 $\begin{cases}3x_1+2x_2=7,\\4x_1-\ \ x_2=2.\end{cases}$

解 $D=\begin{vmatrix}3&2\\4&-1\end{vmatrix}=3\times(-1)-2\times4=-11\neq0$,

$D_1=\begin{vmatrix}7&2\\2&-1\end{vmatrix}=7\times(-1)-2\times2=-11$，$D_2=\begin{vmatrix}3&7\\4&2\end{vmatrix}=3\times2-7\times4=-22$.

故所给方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-11}{-11}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-22}{-11}=2.$$

2. 三阶行列式

下面我们来讨论三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\qquad(1\text{-}1\text{-}2)$$

的解法. 类似二元线性方程组的解法，应用加减消元法，不难得出它的求解公式

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}a_{32}b_2-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}, \\ x_3 = \dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}}. \end{cases}$$

显然，上述求解公式繁琐难记，仿照二阶行列式的记法，引入三阶行列式：

定义 1.1.2 由 3×3 个元素 $a_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$ 排成 3 行 3 列，两边各加一条竖线，得到的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为**三阶行列式**，三阶行列式的值为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

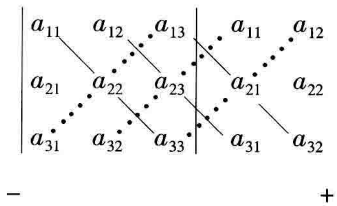

图 1-2

三阶行列式也可用**对角线法则**来记忆或**沙路法则**(如图 1-2 所示)，将三阶行列式的第一列、第二列两列依次写在行列式的右侧，其中各实线连接的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线连接的三个元素的乘积是代数和中的负项.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

若系数行列式 $D\neq0$，则该方程组(1－1－2)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 1.1.2 计算下列行列式(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

(3) $\begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$.

解 (1)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}=1\times1\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0-3\times1\times(-1)-2\times4\times6-1\times5\times0=-49.$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=1\times5\times9+2\times6\times7+3\times4\times8-3\times5\times7-2\times4\times9-1\times6\times8=0.$$

(3)
$$\begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}=abc+0+0-0-0-0=abc.$$

例 1.1.3 解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

解 由于方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1-(-1)\times1\times1-1\times(-3)\times1-(-2)\times2\times(-1)$$

$$=-5\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5,$$

故所求方程组的解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式，为研究四阶及更高阶行列式，下面先介绍有关排列的知识，然后引出 n 阶行列式的概念.

1.1.2 排列与逆序

为了研究一般的 n 阶行列式的概念，先引入排列与逆序的概念.

定义 1.1.3 由自然数 1，2，…，n 组成的一个有序数组，称为一个 n 级**全排列**(简称为**排列**).

例如，1234 和 4312 都是 4 级排列，而 24315 是一个 5 级排列.

显然，在排列 24315 中有较大的数排在较小的数前面.

定义 1.1.4 在一个 n 级排列$(j_1j_2\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)$中，若数 $j_t>j_s$，则称数 j_t 与 j_s 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**，记为 $N[j_1j_2\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n]$.

注 根据上述定义，可按如下方法计算排列的逆序数

设在一个 n 级排列$(j_1j_2\cdots j_n)$中，比 $j_t(t=1,2,\cdots,n)$大的且排在 j_t 前面的数共有 t_i 个，则与 j_t 构成逆序的个数为 t_i，而该排列中所有逆序的个数之和就是这个排列的逆序数. 即

$$N[j_1j_2\cdots j_n] = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i.$$

例 1.1.4 计算排列 32514 的逆序数.

解 在排列 32514 中，3 排列在首位，故其逆序数为 0；2 的前面比 2 大的数只有 1 个，故其逆序数为 1；5 的前面没有比 5 大的数，故其逆序数为 0；1 的前面比 1 大的数有 3 个，故其逆序数为 3；4 的前面比 4 大的数有 1 个，故其逆序数为 1.

于是，$N[32514]=0+1+0+3+1=5$.

定义 1.1.5 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例 1.1.5 计算排列 $n(n-1)(n-2)\cdots321$ 的逆序数，并讨论其奇偶性.

解
$$\begin{aligned} N[n(n-1)(n-2)\cdots321] &= (n-1)+(n-2)+(n-3)+ \\ &\quad \cdots+2+1+0 \\ &= \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

易见，当 $n=4k$，$4k+1$ 时，该排列是偶排列；当 $n=4k+2$，$4k+3$ 时,该排列是奇排列.

定义 1.1.6 将一个排列中某两个元素的位置互换，其余元素不动，就得到一个新的排列，这样一个互换称为一个对换.

定理 1.1.1 任意一个排列经过一个对换后，其奇偶性改变.

利用逆序数，二、三阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2)} (-1)^{N[j_1j_2]} a_{1j_1}a_{2j_2}.$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2)}$ 表示对 j_1j_2 的所有可能的排列求和；

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3)} (-1)^{N[j_1j_2j_3]} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$ 表示对 $j_1j_2j_3$ 的所有可能的排列求和.

类似地，可定义 n 阶行列式.

1.1.3 n 阶行列式的定义

定义 1.1.7 由 $n \times n$ 个元素 $a_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**，其中横排称为**行**，竖排称为**列**，它表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和，各项的符号是：当该项各元素的行标按自然数顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{N[j_1j_2\cdots j_n]} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和. 行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$，这里数 a_{ij} 称为行列式的**元素**，称 $(-1)^{N[j_1j_2\cdots j_n]}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 为行列式的**一般项**.

注 (1) n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，且冠以正号的项和冠以负号的项(不算元素本身所带的符号)各占一半；

(2) $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{N[j_1j_2\cdots j_n]}$ (不算元素本身所带的符号)；

(3) 一阶行列式 $|a|=a$，不要与绝对值记号相混淆.

在行列式中，主对角线以下的元素全为零的行列式，称为**上三角行列式**，主对角线以上的元素全为零的行列式，称为**下三角行列式**，上、下三角行列式统称为**三角行列式**.

例 1.1.6 计算上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0).$$

解 行列式的一般项为

$$(-1)^{N[j_1j_2\cdots j_n]}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

现在考察不为零的项，a_{nj_n}取自第 n 行，但只有 a_{nn}不为零，故只可取$j_n=n$；$a_{n-1,j_{n-1}}$取自第 $n-1$ 行，只有 $a_{n-1,n-1}$及 $a_{n-1,n}$不为零，因 a_{nn}取自第 n 列，故 $a_{n-1,j_{n-1}}$不能取自第 n 列，从而$j_{n-1}=n-1$；同理可得，$j_{n-2}=n-2$，…，$j_2=2$，$j_1=1$，所以不为零的项只有

$(-1)^{N[j_1j_2\cdots j_n]}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{N[12\cdots n]}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理，下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

在 n 阶行列式的定义中，我们还可以将各项的列标按自然数排列，通过对行标排列的逆序数来判断对应项的符号是正号还是负号. 因此，n 阶行列式的定义还有如下等价定义：

定义 1.1.7′ n 阶行列式也可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum (-1)^{N[i_1i_2\cdots i_n]}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

例 1.1.7 在六阶行列式中，下列两项各应带什么符号？

(1) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$；　(2) $a_{36}a_{25}a_{42}a_{51}a_{13}a_{64}$.

解 (1) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}=a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$，列标 431265 的逆

序数为

$$N[431265]=0+1+2+2+0+1=6$$

所以 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$应带正号.

(2) $a_{36}a_{25}a_{42}a_{51}a_{13}a_{64}=a_{13}a_{25}a_{36}a_{42}a_{51}a_{64}$列标 356214 的逆序数为

$$N[356214]=0+0+0+3+4+2=9,$$

所以 $a_{36}a_{25}a_{42}a_{51}a_{13}a_{64}$应带负号.

例 1.1.8 用行列式的定义计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

解
$$\begin{aligned} D_n &=(-1)^{N[(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot n]}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{n,n} \\ &=(-1)^{N[(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot n]}1\cdot 2\cdots(n-2)\cdot(n-1)\cdot n \\ &=(-1)^{N[(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot n]}n!, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &=N[(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot n]=0+1+2+\cdots+(n-2)+0 \\ &=\frac{(n-1)(n-2)}{2}, \end{aligned}$$

所以

$$D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!.$$

习题 1-1

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 7 & -3 \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \end{vmatrix}$.

2. 求解方程：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$；　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$.

3. 用行列式解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 8, \\ 2x_1 - x_2 = 3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$

4. 计算下列各排列的逆序数，并指出它们的奇偶性：

(1) 45132；　　(2) 351624；

(3) $n(n-1)\cdots 21$；　　(4) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$.

5. 用行列式的定义计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$；

(2) $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

6. 求一个二次多项式 $f(x)$，使

$f(1) = 0$，　$f(2) = 3$，　$f(-3) = 28$.

1.2　行列式的性质

行列式的计算是一个很重要的问题. 二阶与三阶行列式的计算可以用对角线法则或行列式的定义，但当行列式的阶数较高时，对角线法则不可用，而用定义计算，计算量非常大，为此，我们有必要讨论行列式的性质，以达到简化计算的目的.

将行列式 D 的行与对应的列互换后，得到新的行列式，称为行列式 D 的**转置行列式**，记为 D^{T}（或 D'）. 如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.2.1 行列式的值与它的转置行列式的值相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

如二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

所以 $D=D^{\mathrm{T}}$.

由性质 1.2.1 知，行列式的行与列具有同等地位，即对于行成立的性质，对于列也是成立的.

性质 1.2.2 互换行列式的两行(列)，行列式的值仅改变符号.

如三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}a_{12}a_{33}+a_{22}a_{13}a_{31}+a_{23}a_{11}a_{32}-$$

$$a_{23}a_{12}a_{31}-a_{22}a_{11}a_{33}-a_{21}a_{13}a_{32}$$

$$=-(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})$$