黄霭英 康锦屏 主编

数学

高中生能力培养丛书

（供高一年级使用）

与新教材同步·与新教材同步·与新教材同步

高中生能力培养丛书

数 学

（供高一年级使用）

分科主编 方金秋

本册编者 孙永顺 何继芳

王万忠 逯桂森

华 夏 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

数学/黄霭英,康锦屏主编．－北京:华夏出版社,1997.1
(高中生能力培养丛书)
供高一年级使用
ISBN 7－5080－1138－4

Ⅰ.数…　Ⅱ.①黄…　②康…　Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 23805 号

华 夏 出 版 社 出 版 发 行
(北京东直门外香河园北里 4 号　邮编:100028)
新　华　书　店　经　销
中国建筑工业出版社印刷厂印刷
787×1092 毫米 32 开本　12.5 印张　268 千字
1997 年 1 月北京第 1 版　　1997 年 1 月北京第 1 次印刷
印数 1－11000 册
ISBN 7－5080－1138－4/G·747
定价:13.40 元

编者的话

由于在教育学院执教所具有的条件，因而有了广泛接触、深入了解中学教育的机会，有了博览研究全国各地出版部门编辑出版的有关中学教学的各类书籍的机会。研读之余，感慨良深。那些书籍虽或多或少有助于教师的教，学生的学，但均不无缺憾之处：有的详于知识而略于将知识转化为能力的指点；有的详于题例的堆列而略于重点、难点知识的疏解；有的虽兼顾了知识与题例，但又缺乏规律与方法的揭示与提供……。至于专门在能力培养上下力气的得力之作，更是凤毛麟角了。看到这多如牛毛的大同小异的书籍，我们感到忧心。为培养高级中学学生学习能力和提高教师教学质量，我们约集了北京市专门从事中学教育或专门研究中学教育的有共识的专家、学者，编著了这套丛书，名之曰《高中生能力培养丛书》。采众家之长，去各家之短。本丛书体现了如下特点：重点难点知识的疏解与典型题例相结合；精讲知识与怎样将知识转化为能力的点拨相结合；精选、精设典型题例与解题思路、解题方法的分析、揭示相结合；注重指导平时教学与适应高考实际需要相结合。因此，丛书是科学性、针对性、实用性、有效性的有机统一。编著此丛书的构想方案形成以后，华夏出版社为丛书出版竭尽心力，北京市原教育局长、中学教育专家陶西平同志欣然同意任丛书顾问，为此，我们由衷地表示谢意！由于时间紧，任务重，难度大，因此是否将美好的设想变成了现实，尚待广大中学师生在实践中去验证。

黄霭英　康锦屏

目 录

第一部分 代 数

第二部分 立体几何

第一部分　代数部分

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一、重点难点知识

(一)重点难点知识说明

第一个重点知识是集合的基本概念和集合运算，要正确理解不同运算的涵义，注意运用对比的方法，反复比较不同运算的区别.

第二个重点和难点是映射及函数的概念. 映射 $f:A\to B$ 是从集合 A 到集合 B 的特殊对应，它必须满足两点：①对集合 A 中的每一个元素；② 在集合 B 中都有唯一的元素与之对应. 如果在集合 A 中存在一个元素按照对应法则 f 在集合 B 中没有元素与其对应或有不止一个元素与其对应，那么 f 就不是从集合 A 到集合 B 的映射. 例如：$A=R=B$，对应法则 f 是“取倒数”由于对 $0\in A$ 按对应法则 f 在 B 中没有元素与其对应，因此这个对应不是从 A 到 B 的映射. 再如 $A=\{1\}$，$B=\{1,-1\}$，对应法则 f 是“求平方根”. 由于 -1，1 都是 1 的平方根，所以按对应法则 f，对 $1\in A$ 在 B 中有两个元素 1 和 -1 与其对应，因此这个对应也不是从 A 到 B 的映射.

如果映射 $f: A \to B$ 具有下列特征:

①原象不同则象也不同,即任意 X_1、$X_2 \in A$,若 $X_1 \neq X_2$ 则 $f(X_1) \neq f(X_2)$;

② 对集合 B 中任意一个元素在集合 A 中都能找到它的原象.

则 $f: A \to B$ 叫一一映射,它可确定另一个映射 $f^{-1}: B \to A$ 这个映射的原象是 $f: A \to B$ 的象,象是 $f: A \to B$ 的原象,它叫 $f: A \to B$ 的逆映射.

函数是两个数集间的映射:若 A、B 是两个数集,则映射 $f: A \to B$ 就确定了一个函数关系.每个函数关系有三个要素:定义域,值域,对应法则.其中定义域为 A、对应法则为 f、而值域是 B 的子集,这三个要素中定义域,对应法则确定后值域也就可确定,因此只要两函数的定义域,对应法则相同,它们的值域也一定相同,那么这两个函数就是相同的函数,这就体现出函数的对应法则与定义域处于同等重要的地位,所以在解决函数问题时不能只注重对应法则还应注意定义域的作用.

函数的值域求解比较困难,是这部分知识的难点,要注意掌握方法,掌握不同方法使用的条件和注意的问题,还要注意总结规律和技巧.

第三个重点与难点是函数的图象及性质.作函数图象有两种方法:描点法和利用已知函数的图象通过平移、对称、翻折等变换作相关函数的图象,在作函数的图象时一定要考虑函数的定义域.

判断函数的奇偶性时首先要考虑函数的定义域,只有函数的定义域是关于原点对称的区间时,再判断 $f(-x)=f(x)$

或 $f(-x)=-f(x)$ 是否成立，如果函数的定义域不是关于原点对称的区间，那么这个函数就是非奇非偶函数.

讨论函数的单调性时除了可以用单调性定义外，还可用函数的图象.

第四个重点难点是反函数的概念. 学习反函数的概念要注意以下三点：

① 并非所有的函数都有反函数，只有当函数 $y=f(x)$ 是由 $A\to B$ 的一一映射时，它才有反函数，这个反函数是由它所确定的逆映射形成的其定义域是原函数的值域，值域是原函数的定义域.

② 反函数的图象既可以用描点法作，也可以用反函数的图象与原函数的图象关于直线 $y=x$ 对称这一特性来作，作图步骤是先作出原函数的图象，再利用对称性做出反函数的图象.

第五个重点是幂函数、指数函数和对数函的概念. 对这三个函数要明确它们的特征、性质、和图象，特别是幂函数的图象既是重点又是难点，主要难在图象的形状随指数的取值不同而发生变化，但不管指数取何值，得到的幂函数在第Ⅰ象限都有图象，因此可通过归纳图象在第一象限的变化规律、再结合函数的奇偶性，就可得出所有幂函数图象的变化规律，从而有利于克服这一难点.

幂函数图象有如下规律：

(1) $\alpha>o$ 时，第Ⅰ象限的图象呈抛物线形经过 $(0,0)$，$(1,1)$ 点；

$\alpha<o$ 时，第一象限的图象呈双曲线形经过 $(1,1)$ 点.

(2) 奇函数图象关于原点对称；

偶函数图象关于 y 轴对称；

非奇非偶函数图象只存在第一象限.

(3)当 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$ 时图象在第一象限呈凹状；

当 $0<\alpha<1$ 时 图象在第一象限呈凸状.

(4)在(0,1)区间内越小越上(指数小的图象在上).

(二)知识

1. 主要内容

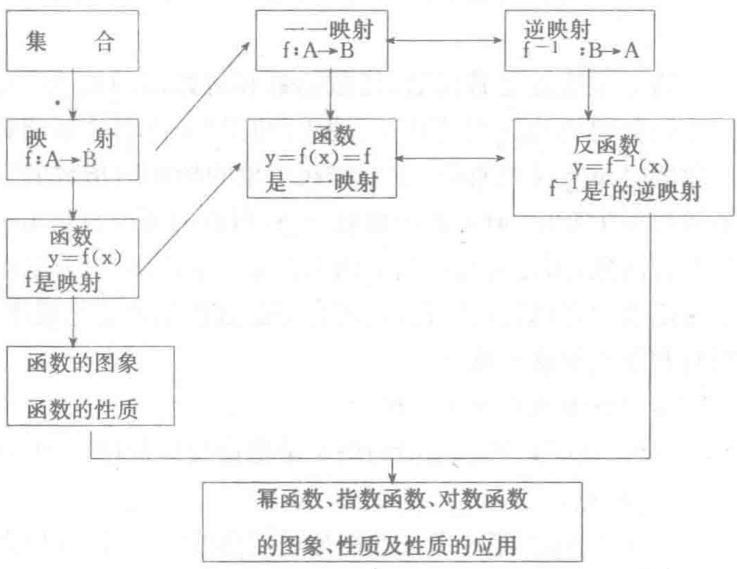
①集合的基本知识

②映射与逆映射,函数与反函数的概念

③函数的图象及函数的基本性质

④幂函数、指数函数、对数函数的定义图象及基本性质

2. 知识结构



二、能力培养

(一)数学思想与方法

中学数学中常用的数学思想有:分类思想、方程思想、函数思想、化归思想、数形结合思想.

1. 分类思想

就是根据数学对象本质属性的共同点和不同点将数学对象区分为不同种类的思想方法,它揭示了数学对象之间的规律.

常见的分类讨论一般有以下几种情况:

①概念本身引起的讨论,如指(对)数函数的底数 a 要分为 $0<a<1$ 和 $a>1$ 两种情况.

②含有参数的问题.

③几何中点、线、面位置关系等.

例1　若方程 $\lg(kx)=2\lg(x+1)$ 只有一实数解,求实数 k 的取值范围.

分析:欲求实数 k 的取值范围,一般根据已知列出关于 k 的不等式,然后求解即可.

解:方程化为:$\lg(kx)=\lg(x+1)^2$

$\therefore\quad x^2+(2-k)x+1=0$ ……(*)

$\because$　方程有实根,

$\therefore\quad \triangle=(2-k)^2-4\geqslant 0.$

$\therefore k\leqslant 0$ 或 $k\geqslant 4$.

当 $k=0$ 时,$kx=0$　代入原方程无意义.

当 $k=4$ 时,代入(*)方程得:　$x^2-2x+1=0$

$\therefore\quad x=1$

经检验，$x=1$ 是原方程的根.

当 $k>4$ 时，$\triangle>0$，方程有两不等实根 x_1, x_2，而 $x_1 \cdot x_2=1, x_1+x_2=k-2>0$ 知 x_1、x_2 是两正根都是原方程的根.

当 $k<0$ 时，$\triangle>0$，方程有二实根 x_1、x_2，

$$x_1x_2=1, x_1+x_2=k-2<0.$$

∴ x_1、x_2 均为负根，且其中一根大于 -1，一根小于 -1.

又 $\lg(x+1)$ 要求 $x+1>0$，

∴ 小于 -1 的根为增根，大于 -1 的根为原方程的根.

综合上述情况知，$K=4$ 或 $K<0$ 时，原方程只有一根.

2. 方程思想

就是把问题中的已知量与未知量之间的数量关系，运用数学的符号转化为方程(组)使问题得到解决的思想方法.

例 2 圆台的母线和底面所成的角为 60°. 它有一个半经为 R 的内切球，$R=\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$，求这个圆台的体积.

解： 设上、下底面半经为 $r_1, r_2 (r_1<r_2)$，则母线长 $l=r_1+r_2$，高 $h=2R$

∵ 母线与底面所成的角是 60°，

$$\therefore \frac{r_2-r_1}{r_2+r_1}=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}. \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$\therefore r_2=3r_1. \qquad \cdots\cdots(2)$$

$$\frac{2R}{r_1+r_2}=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad \cdots\cdots(3)$$

$$\therefore r_1+r_2=\frac{4R}{\sqrt{3}}. \qquad \cdots\cdots(4)$$

将(2)代入(4)得 $r_1=\frac{R}{\sqrt{3}}$.

$\therefore\quad r_2=\sqrt{3}R.$

$$\therefore\quad V_{\text{圆台}}=\frac{\pi h}{3}(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)=\frac{2}{3}\pi R(\frac{R^2}{3}+3R^2+R^2)$$

$$=\frac{26}{9}\pi R^3=\frac{26}{9}\left(\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\right)^3\cdot\pi=13\pi$$

3. 函数思想

就是从函数的观点出发分析问题，用函数的有关知识(定义域、值域、性质、极值等)解决问题

例 3　对所有大于正数 a 的 x，不等式，$a+\frac{1}{a}<x+\frac{1}{x}$ 恒成立，求正数 a 的最小值.

分析：设 $f(x)=x+\frac{1}{x}$，则已知条件为 $x>a>0$ 时，$f(x)>f(a)$ 恒成立.

由函数的单调性知：$f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在 $(a,+\infty)(a>0)$ 上为增函数.

下面只要判断出函数 f(x) 在哪个区间上为增函数，就可求出 a 的最小值.

解：设 $f(x)=x+\frac{1}{x}\qquad x\in(0,+\infty)$

任取 x_1、$x_2\in(0,+\infty)$　且 $x_2>x_1$.

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2+\frac{1}{x_2}-x_1-\frac{1}{x_1}$$

$$=(x_2-x_1)(1-\frac{1}{x_1x_2})$$

$\because\quad x_2>x_1>0$

$\therefore$　当　x_1、$x_2\in(0,1)$ 时，$1-\frac{1}{x_2x_1}<0$.

当　x_1、$x_2\in(1,+\infty)$时，$1-\frac{1}{x_2x_1}<0$.

∴　当x_1、$x_2\in(1,+\infty)$时，$f(x_2)-f(x_1)>0$.

即　$f(x)=x+\frac{1}{x}$在$[1,+\infty]$为增函数.

当　x_1、$x_2\in(0,1)$时，$f(x_2)-f(x_1)<0$.

即　$f(x)=x+\frac{1}{x}$在$(0,1)$上为减函数.

又　$x>a>0$ 时，$x+\frac{1}{x}>a+\frac{1}{a}$即$f(x)>f(a)$恒成立.

∴　$f(x)$在$(a,+\infty)$上为增函数.

∴　$(a,+\infty)\subseteq(1,+\infty)$，即　$a\geqslant1$.

∴　a 的最小值为 1.

4. 化归思想

就是把数学问题从未知向已知转化，从复杂向简单转化，从抽象向具体转化等，其目的就是把未知问题转化为已知或易解的.

如例 3 就是用化归思想把不等式问题转化为函数问题来解决.

5. 数形结合思想

就是把数量问题中抽象复杂的关系，借助图形的性质将其直观化、形象化、简单化、这样有利于寻求解题途径

例 4　用函数图象解下列各题.

1. 比较 0.3^2，$\log_2 0.3$，$2^{0.3}$的大小.

2. 当 $0<k<\frac{1}{2}$时，$\sqrt{|1-x|}=kx$ 的解的个数是多少?

3. a 为何值时，不等式 $0\leqslant x^2+ax+5\leqslant4$ 恰有一解.

1. 分析：0.3^2，$\log_2 0.3$，　$2^{0.3}$分别是 $x=0.3$ 时，函数 $y=$

x^2, $y=\log_2 x$, $y=2^x$ 的函数值,故要比较这三个值的大小,只要在同一坐标系内作出这三个函数的图象,然后作出直线 $x=0.3$ 与三图象相交,从交点情况就可判别出这三个值的大小.

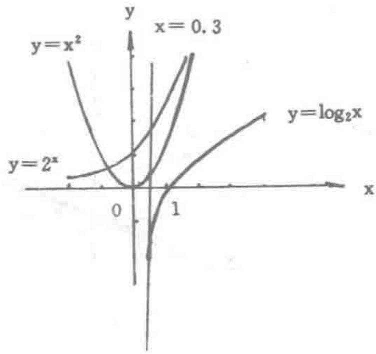


图 1-1

解: 如图 1-1,

当 $x=0.3$ 时,三个函数的函数值进行比较显然有

$\log_2^{0.3}<0.3^2<2^{0.3}$.

2. 分析:设 $y=\sqrt{|1-x|}$, $y=kx(0<k<\frac{1}{2})$,欲求方程解的个数,只需在同一坐标系中作出这两个函数的图象,然后数出两函数图象交点个数即可.

解:在同一坐标系中作出 $y=\sqrt{|1-x|}$ 和 $y=kx$, $(0<k<\frac{1}{2})$ 的图象,如图 1-2. ∵ $0<k<\frac{1}{2}$,

∴ $y=kx$ 的图象夹在 x 轴与 $y=\frac{1}{2}x$ 图象之间,从图象易得到 $y=kx$ 的图象与 $y=\sqrt{|1-x|}$ 的图象有三个交点.

∴ 方程有 3 个根.

3. 分析:如图 1-3,函数 $y=x^2+ax+5$ 与直线 $y=4$ 的交点情况有三种.

(1)图象顶点位于直线 $y=4$ 的下方,不等式有无数多解.

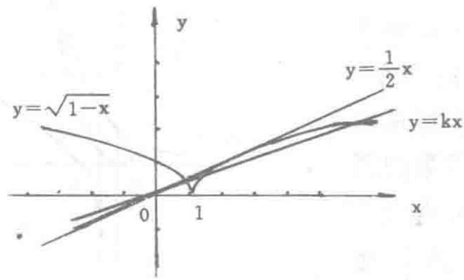


图 1—2

(2)图象顶点位于直线 $y=4$ 上,不等式恰有一解.

(3)图象顶点位于直线 $y=4$ 上方,不等式无解.

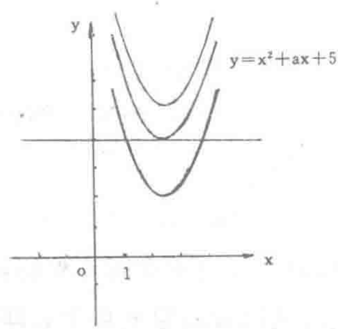


图 1—3

因此,要使不等式恰有一解,只要使 $y=x^2+ax+5$ 的图象顶点在直线 $y=4$ 上,而 $y=x^2+ax+5$ 的顶点坐标为$\left(-\frac{a}{2},\frac{20-a^2}{4}\right)$

∴ 当 $\frac{20-a^2}{4}=4$ 时,即 $a=\pm2$ 时,不等式 $0\leqslant x^2+ax+5\leqslant4$ 恰有一解.

(二)解题思维分析

1. 集合的概念与关系

例 1 判断下列命题是否正确.

(1)所有的老人构成一个集合.

(2)集合$\{(1.2)\}$与集合$\{(2.1)\}$相等.

(3)点$(1,2)$、$(2,3)$构成的集合是$\{(1.2),(2.3)\}$.

分析:(1)由于集合中的元素要具有确定性,而"老人"的特征不确定,故不正确.

(2)集合$\{(1.2)\}$和$\{(2.1)\}$中的元素分别是两点$(1,2)$和$(2,1)$而这两个点不是同一点,故不正确.

(3)由于集合是由两个点$(1,2)$、$(1,3)$组成的,而这两个点又是不同的两个点,故正确.

注:集合具有三个特征,确定性、互异性、无序性,用集合中元素的确定性可以判断一组事物能否组成集合,用集合中元素的互异性与无序性可判断集合的表示方法是否正确.

例 2　已知 $a=\sqrt{11}$,　$A=\{x|\quad x\leqslant 2\sqrt{3},x\in R\}$,则下列关系正确的是(　　)

(A)$a\subset A$;　(B)$a\notin A$;　(C)$\{a\}\in A$;　(D)$\{a\}\subset A$.

分析:由于"$\in$"是元素与集合间的关系符号,而$\{a\}$和 A 都是集合,故排除(C).

又　"$\subset$"是集合与集合间的关系符号,而是 a 元素,故排除(A).

又　$A=\{x|x\leqslant 2\sqrt{3}\}$是由不大于 $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$的数构成的集合,而 $a=\sqrt{11}<\sqrt{12}$.

$\therefore$　$a\in A$. 故排除(B).

$\therefore$　选(D).

注:$\in$,$\notin$是元素与集合间的关系符号,而$\subset$,$\subseteq$是集合与集合间的关系符号,在使用这些符号时,一定要分清是元素与集合间的关系还是集合与集合间的关系,切勿混淆.

例 3　数集　$X=\{2n+1, n\in Z\}$，$Y=\{4k\pm1, k\in Z\}$.
证明:$X=Y$

分析:根据集合相等的定义知,要证 $X=Y$ 只需证 $X\subseteq Y$,且 $Y\subseteq X$.

证:先证 $X\subseteq Y$.

任取 $x\in X$,则有 $x=2n+1, n\in Z$.

若 n 是偶数,设 $n=2k, k\in Z$,则 $x=4k-1$.

∴　$x\in Y$.

∴　$X\subseteq Y$. 下面再证 $Y\subseteq X$.

设 $y\in Y$,则 $y=4k\pm1$ $k\in Z$.

∵　$4k+1=2\cdot 2k+1, 4k-1=2(2k-1)+1$,

又　$k\in Z$　∴　$2k, 2k-1\in X$.

∴　$y\in X$.

∴　$Y\subseteq X$.

∴　$X=Y$.

注:证明 $A=B$,(A、B 是两个集合)的常用方法是
如果 A、B 都不是空集,证明 $A\subseteq B, B\subseteq A$ 同时成立.

如果 A、B 中有一个是空集,通常用反证法证明另一个也是空集.

2. 集合的运算

例 4　设全集 I={不大于 10 的自然数}，P、Q 是它的子集,且 $P\cap\overline{Q}=\{3,7\}$,$\overline{P}\cap Q=\{4,8\}$，$\overline{P}\cap\overline{Q}=\{2、9\}$. 求 $P\cap Q$.

解. ∵　$I=\{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10\}$

又 $P\cap\overline{Q}=\{3.7\}$,

∴　$3、7\in p, 3、7\notin Q$.