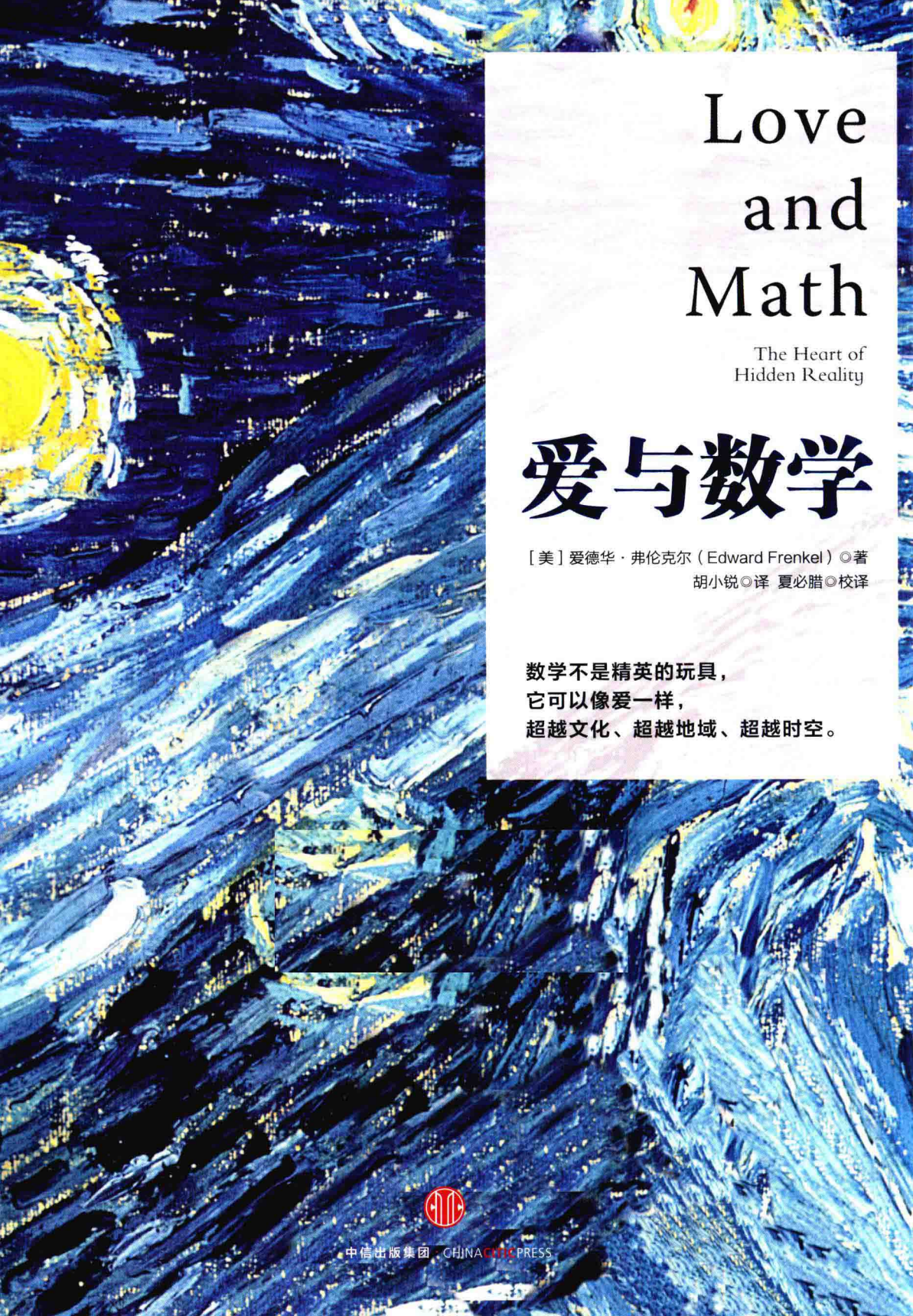




Love and Math

The Heart of
Hidden Reality

爱与数学

[美] 爱德华·弗伦克尔 (Edward Frenkel) ◎著
胡小锐◎译 夏必腊◎校译

数学不是精英的玩具，
它可以像爱一样，
超越文化、超越地域、超越时空。



中信出版集团 · CHINA CITI PRESS

Love and Math
爱与数学

〔美〕爱德华·弗伦克尔 (Edward Frenkel)
胡小锐◎译 夏必腊◎校译



图书在版编目 (CIP) 数据

爱与数学 / (美) 弗伦克尔著 ; 胡小锐译 ; 夏必腊

校译 . — 北京 : 中信出版社 , 2016.4

书名原文 : Love and Math

ISBN 978-7-5086-5807-0

I. ①爱… II. ①弗… ②胡… ③夏… III. ①数学—

普及读物 IV. ① O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 013240 号

Love and Math: The Heart of Hidden Reality by Edward Frenkel

Copyright © 2013 by Edward Frenkel

Simplified Chinese translation copyright © 2016 by CITIC Press Corporation

Published by arrangement with Basic Books, a Member of Perseus Books Group through Bardonia-Chinese Media Agency

All rights reserved

本书仅限中国大陆地区发行销售

爱与数学

著 者 : [美] 爱德华 · 弗伦克尔

译 者 : 胡小锐

校 译 : 夏必腊

策划推广 : 中信出版社 (China CITIC Press)

出版发行 : 中信出版集团股份有限公司

(北京市朝阳区惠新东街甲 4 号富盛大厦 2 座 邮编 100029)

(CITIC Publishing Group)

承 印 者 : 中国电影出版社印刷厂

开 本 : 787mm × 1092mm 1/16

印 张 : 20.5

字 数 : 220 千字

版 次 : 2016 年 4 月第 1 版

印 次 : 2016 年 4 月第 1 次印刷

京权图字 : 01-2014-1920

广告经营许可证 : 京朝工商广字第 8087 号

书 号 : ISBN 978-7-5086-5807-0/F · 3582

定 价 : 49.00 元

版权所有 · 侵权必究

凡购本社图书 , 如有缺页、倒页、脱页 , 由发行公司负责退换。

服务热线 : 010-84849555 服务传真 : 010-84849000

投稿邮箱 : author@citicpub.com



在我们身边，有一个存在于平行时空中的秘密世界。她风姿绰约、精致典雅，与我们生活的这个世界有着千丝万缕的联系。这个秘密世界，就是我们大多数人都无法看见的数学世界。本书意在邀请广大读者一起发现、探索这个世界。

我们经常会遇到这样一个悖论。一方面，数学与我们日常生活的方方面面紧密地交织在一起。只要我们上网购物，发送一条文本信息，在互联网上搜索信息，或者使用 GPS（全球定位系统）设备，我们就会用到数学公式和运算法则。另一方面，大多数人在学习数学时却感到头疼不已。用诗人汉斯·马格努斯·恩岑斯贝格尔（Hans Magnus Enzensberger）的话说，数学已经成为“我们文化中的一个盲点，是一片陌生的领土，只有为数不多的精英在名师的指点下

才能占据制高点”。他曾说，在我们认识的人中，几乎没有人“会气急败坏地抱怨：只要在他们面前提起读小说、看照片或者观看电影这些事，他们就会心惊肉跳，甚至痛不欲生”。但是，即使是“受过良好教育的聪明人”也常常以“一种不屑一顾与自以为是的口吻”说着数学“纯粹是折磨人”，是“一场噩梦”之类的话。因此，他们“不喜欢数学”。

为什么会有这种反常现象呢？我认为主要有两个原因。首先，数学比其他学科更抽象，因此令人难以理解。其次，我们在学校学到的只不过是数学知识的冰山一角，而且这些课本内容大多还是很久以前的陈芝麻烂谷子。多年以来，数学已经取得了长足的发展。然而，虽然现代数学的宝库中珍藏着琳琅满目的瑰宝，但我们一直不得其门而入。

如果学校在我们必修的“美术课”上只教给我们粉刷篱笆的方法，却从来不向我们展示达·芬奇（Leonardo da Vinci）与毕加索（Picasso）的作品，那么大家会有什么样的感觉呢？这样做能提高艺术鉴赏力吗？你还会有继续学习的欲望吗？我想答案是否定的。你可能会说：“在学校里学习绘画就是浪费时间。如果非要粉刷篱笆不可，我完全可以雇人去做啊。”当然，这样的教学太荒谬了。但是，学校就是这样教授数学的。因此，在大多数人眼中，学习数学毫无意义，就像在篱笆旁边坐等油漆干透。想要看到美术大师们的画作并不那么困难，但是数学大师们的研究成果却通常被束之高阁。

不过，数学之所以如此迷人，并不仅仅是因为它能给人以美的享受。伽利略（Galileo Galilei）说得非常好：“自然界的法则是用数学语言写就的。”数学是一种描述现实、揭示世界运行规律的语言，这种普适性语言已经成为检验真理的黄金标准。在我们生活的这个世界里，数学在科技的驱动之下，已经成为人类力量、财富与进步的源泉，并且在不断巩固其地位。因此，能熟练掌握这门“新”语言的人必将站在社会发展的最前沿。

人们通常对数学有所误解，以为数学不过是一个“工具包”。比如，生物学家研究人员在完成实地调查并收集好数据之后，往往会专门为这些数据建立一个数学模型（有时，他们还会向数学领域的专业人士求助）。尽管这种研究模式也非常重要，但是数学的作用远不止于此。数学可以帮助我们实现利用其他知识无法做到的创新性、颠覆性飞跃。例如，当爱因斯坦（**Albert Einstein**）发现万有引力会导致我们所处的空间弯曲时，他并没有尝试把所涉及的任何数据归纳成方程式。事实上，他甚至没有任何数据可以证明他的这个发现。当时，人们根本无法想象自己所处的空间竟然是弯曲的，大家都“觉得”这个世界是平的。但是，爱因斯坦知道，要想成功地把狭义相对论与他得出的一个深刻认识（即万有引力与加速度会产生相同的效果）一起推广至非惯性系统，建立方程式是唯一可行的方法。用方程式来表现数据的规律，即便在数学领域也属于层次较高的学术活动。50年前，爱因斯坦借助数学家伯恩哈德·黎曼（**Bernhard Riemann**）的研究成果才完成了这项工作。人类大脑的构造决定了我们无法想象维数大于二的弯曲空间，我们只能借助数学才能理解复杂的空间。爱因斯坦的观点是正确的：我们这个宇宙的确是弯曲的空间，而且它还在不断膨胀。这个例子充分说明了数学的重要作用。

这样的例子俯拾即是，不仅在物理学中存在，在其他科学领域也不少（下文将讨论其中一些例子）。历史事实表明，数学思想正在促使科学和技术发生日新月异的变化。即使是那些一开始时被人们视为深奥难懂的纯理论性数学知识，后来也会在实际生活中发挥不可或缺的作用。查尔斯·达尔文（**Charles Darwin**）最初的研究并不依赖于数学，但是他后来在自传中说：“我为自己不能对数学中的重要原理有所领悟而深感遗憾，因为这些原理能增强人的理性思维能力。”我觉得他的这番话就是一个颇有预见性的建议，告诫后人必须充分发掘数学的巨大潜能。

小时候，我并不知道身边还有数学这个秘密世界。同大多数人一样，我也以为数学是一门枯燥无味的学科。不过，我比较幸运，在中学阶段的最后一个学年，一位专业素养极高的数学专业人士帮我打开了数学这一神秘世界的大门。我这才知道，数学不仅典雅美好，而且它还像诗歌、艺术和音乐一样，充满了无限可能。于是，我深深地迷上了数学。

亲爱的读者，我撰写本书就是为了把老师们对我的言传身教传递给你们，向你们展示数学的力量和美，帮助你们进入这个神奇的世界，即便你们从来没想过“数学”与“爱”这两个词竟然可以并列在一起。你们将会和我一样，发现数学可以触及我们的灵魂，使我们的世界观发生天翻地覆的变化。

* * *

数学知识与其他学科知识都有所不同，它极为特殊。我们对物理世界的认知很容易失真，但对数学真理的认知却一成不变。数学真理是经久不变、客观且必然的存在。对所有人而言，无论他们的性别、宗教信仰或者肤色有何不同，无论他们身处何地，同一个数学公式或者定理的含义都不会有任何不同，即便经历上千年也不会发生变化。同时，数学公式和定理是我们所有人的共有财产，任何人都不可以对它们申请专利。在这个世界上，如此深奥、精致，而且所有人都可以随时取用的东西，非数学知识莫属。这样一个知识宝库的存在令人难以置信，它具有非凡的价值。而且，它并非那些“受过良好教育的少数人”的专利，而是人类的共同财产。

数学的一个主要作用是对信息进行排序，信息的排序分类是梵高的画作区别于随意涂鸦的根本原因。随着 3D 打印技术的出现，我们习以为常的现实正在发生着根本性的改变。一切事物都不再属于物理对象的范畴，而是隶属于信息与数据的范畴。我们随时可以把 PDF（便携式文档格式）文档转变成书本，把

MP3（一种能播放音乐文件的播放器）文件转换成一段乐曲，同样，在不久的将来，我们还可以根据需要，利用 3D 打印机，方便地把信息转变成实物。在这个新世界中，数学将大有可为，发挥更加重要的作用。我们可以利用数学知识对信息进行整理、排序，也可以将信息转变成物理现实。

在本书中，我将向大家介绍数学界近 50 年来的一个重要思想：“朗兰兹纲领”（Langlands Program）。很多人认为朗兰兹纲领是数学中的“大统一理论”（the Grand Unified Theory）。代数、几何、数论、分析与量子物理等领域的研究内容乍一看似乎相去甚远，但是朗兰兹纲领却在这些不同的数学分支之间建立起千丝万缕的联系。如果我们把这些分支看成数学这个秘密世界中的一块块大陆，朗兰兹纲领就是功能强大的运输工具，可以让我们在各个大陆之间瞬时往返。

朗兰兹纲领是数学家罗伯特·朗兰兹（Robert Langlands）于 20 世纪 60 年代后期提出的一个数学理论（朗兰兹现在在普林斯顿高等研究院工作，他使用的办公室就是当年爱因斯坦用过的），它本质上是一个关于对称的开创性数学理论，而对称理论的雏形则要追溯至 200 年前，那是一个年仅 20 岁的法国天才在死亡决斗前夜完成的研究成果。随后，一个令人瞠目结舌的发现丰富了这位天才的研究成果，它不仅帮助人们完成了“费马大定理”（Fermat's Last Theorem）的证明，而且颠覆了人们对数字与方程式的认知。接着，人们又有了一个极为精辟的洞见，即数学有自己的“罗塞塔石碑”（Rosetta Stone）——在数学领域里充满了各种神秘的类比与隐喻。这些类比仿佛是数学这片魔幻土地上的一条条小溪，将朗兰兹纲领分成几何与量子物理两大领域，使原先杂乱无章的世界呈现出井然有序与和谐统一的特点。

我告诉大家这些内容，意在展示数学鲜为人知的其他方面，包括灵感、深刻的思想和惊人的发现。数学打开了一扇门，让我们了解如何打破传统的壁垒，如何在追求真理的过程中充分发挥想象力。无穷理论的创立人格奥尔格·康托

尔（George Cantor）说：“数学的精义在于蕴藏其中的自由。”数学教我们大胆分析现实，研究事实，并以事实为指引义无反顾地朝前迈进。数学把我们从教条与偏见中解放出来，并帮助我们培养创新突破的能力。正因为这些，数学才得以代代相传，延续至今。

由于数学中的这些工具既可以产生积极向上的结果，也可能被用于行凶作恶，因此，我们必须认真考虑数学对现实世界的影响。例如，全球经济危机之所以爆发并造成严重危害，在很大程度上是由于在全球金融市场中普遍存在对数学模型使用不当的问题。很多决策者，由于其数学知识的贫乏，并不能真正理解这些数学模型，但是，在贪欲的驱使之下，他们仍然冒险使用了这些数学模型，最终导致整个金融体系受到重创。他们肆意利用信息的不对称性，丝毫不担心自己的谎言会被戳穿，因为人们一般也不会去了解这些数学模型的作用原理。因此，如果有更多的人能了解这些数学模型与金融体系的运作机制，也许我们就不会被愚弄那么长时间了。

我再举一例。1996年，美国政府组织任命的一个委员会举行了一次秘密碰头会，修改了消费者物价指数（CPI）中的一个公式。消费者物价指数通过测算通胀率来确定税级、社会保障、医疗保健及其他与公民生活指数挂钩的款项。因为这个公式被修改，成千上万的美国公民都受到了影响，但是公众却几乎没有讨论过这个新公式及其造成的后果。最近，又有人试图把这个神秘公式当作美国经济的后门加以利用。

如果每个人都能熟练掌握一定的数学知识，那么这类幕后交易将会少得多。数学就等于严谨加上学术诚信再乘以事实准绳。我们必须通过数学来不断推动社会进步，促使更多的人掌握数学知识与数学工具，以保护自身的权益免受少数当权者的肆意践踏。没有数学，就没有自由。

* * *

数学与艺术、文学和音乐一样，是我们文化遗产的一部分。人类总是渴求发现新事物，掌握它们的新意义，以便更好地了解宇宙以及我们在其中所处的位置。我们无法像哥伦布（Christopher Columbus）那样再发现一块新大陆，也不可能成为第一个踏上月球的人，这的确令人遗憾。但是，如果我告诉你，我们不必越洋远航，也不必飞越太空，就能发现世界奇观，你相信吗？世界奇观就在我们身边，与现实交织在一起，从某种意义上讲，它就埋藏在我们内心深处。数学指引着宇宙的运行，隐藏在各种形状与曲线背后，掌控着小到原子、大到一颗颗恒星的世间万物。

本书意在鼓励读者探索内涵丰富、五彩斑斓的数学世界，特别是那些没接受过专业数学教育的读者。如果你觉得数学太难，无法理解；或者如果你害怕数学，同时又希望了解数学是否值得你为之努力，那么，本书非常适合你。

人们常常以为，只有经过多年苦苦钻研，才能认识到数学的全部价值。这显然是错误的。有些人甚至认为，大多数人天生就学不会数学。我并不赞成这个观点。我们中的大多数人即使没有学过物理学和生物学的相关课程，却也听说过太阳系、原子及基本粒子、DNA（脱氧核糖核酸）双螺旋结构等概念，甚至还对这些概念的含义有初步的了解。人们很自然地认为这些复杂的概念是我们文化的一部分，也就是我们集体意识的一部分。同样，如果对数学中的重要概念与思想解释得当，那么，大家无须耗费几年的时间辛苦学习数学，也能顺利掌握这些概念与思想。在很多情况下，我们可以略过烦琐的中间步骤，直奔主题。

问题在于，几乎每个人都在谈论星球、原子和DNA等内容，但可能没有人会告诉你现代数学中的某些概念有多么引人入胜。比如，现代数学中有对称群，

也有告诉你 2 加 2 不一定等于 4 的新型数字系统，还有“黎曼曲面”（Riemann Surface）等美丽动人的几何图形。人们在介绍数学的时候，就像指着一只小猫对你说老虎就是这个样子的。但是，老虎与猫根本不是一回事儿。我要在书中向大家展现数学美妙绝伦的一面，用威廉·布莱克^①的话说，就是要让大家领略到“对称中令人震撼的美”。

大家不要误解，我并不是说阅读本书就能让你成为一名专业的数学研究人员。而且，我也不提倡全民学数学。我们可以这样想：在学会一两个和弦之后，我们就可以用吉他弹奏好几首歌了。你不会因此成为世界上最优秀的吉他手，但你的生活却变得更加丰富多彩了。我在本书中教给大家的就是现代数学中的“和弦”。我保证，当你学会这些你以前没有接触过的“和弦”之后，你的生活肯定会变得更加丰富多彩。

我的一位老师伊斯雷尔·盖尔范德（Israel Gelfand）经常说：“人们觉得他们无法理解数学，其实关键在于你是怎么向他们解释数学知识的。如果你问一位醉汉：2/3 和 3/5 哪个大？他肯定答不上来。但是，如果你换一种问法：三个人分两瓶伏特加，和五个人分三瓶伏特加，哪一种方案更好？他会毫不犹豫地告诉你：当然是三个人分两瓶伏特加更好。”

我的目标就是用大家易于理解的语言向大家解释数学这门学科。

我还会穿插介绍我在苏联的成长经历。由于苏联特殊的政治政策，我无法进入莫斯科大学学习，数学研究的大门在我面前“砰”的一声关上了。但是，我没有因此放弃学习数学。我偷偷溜进莫斯科大学听课，我还找了一些数学方面的书籍阅读，有时甚至会读到深夜。只要有爱，还有什么可以阻止你呢？

^① 威廉·布莱克（William Blake），英国第一位重要的浪漫主义诗人、版画家，英国文学史上最重要的伟大诗人之一，虔诚的基督教徒。主要诗作有诗集《纯真之歌》《经验之歌》等。早期作品简洁明快，中后期作品趋向玄妙深沉，充满神秘色彩。

随后，两位杰出的数学家接纳了我，他们成为我的导师。在他们的指引下，我开始了数学研究工作。当时，我还是一名大学生，但是我已经在不懈地探索未知领域了。这是我一生中最难忘的一段时光，尽管当时的政策不允许我在毕业后继续从事数学研究工作。

然而，奇迹出现了。我将自己完成的几篇数学论文偷偷地寄到了国外，结果引起了学术圈的关注，我在 21 岁时收到了赴哈佛大学担任客座教授的邀请。因此，我变成了一个没有博士学位的哈佛教授。随后，我继续在学术征程上前进，开始研究朗兰兹纲领。在过去 20 年里，我参与的一些朗兰兹纲领的研究活动取得了重大突破。在本书中，我将描述杰出数学家们的显著成果以及一些逸事。

* * *

本书的另一个主题是爱。有一次，我发挥了数学家的想象力，发现了“爱的公式”。后来我受到这个爱的公式的启发，拍摄了一部电影——《爱与数学之祭》(*Rites of Love and Math*，我将在本书的后续章节中做详细介绍)。每次我播放这部电影时，总有人问我：“真的有爱的公式吗？”

我回答道：“我们发现的所有公式都是爱的公式。”数学不断为我们贡献永恒而深奥的知识，直接触及所有事物的本质，跨越文化、大陆与历史的障碍，将我们所有人联系在一起。我的梦想是让所有人都能看到这些数学思想、公式和方程式中蕴含的美，都能体会其价值，并为之惊叹不已。这样，我们对世界的爱、我们彼此之间的爱，都将更加丰富、更有内涵。



在撰写本书时，我尽量使用最基本、最直观的方式来解释每一个数学概念。不过，我发现本书的某些章节涉及的数学知识比较深奥（尤其是第 8 章、第 14 章、第 15 章和第 17 章的部分内容）。如果大家在第一次阅读时觉得本书的某些内容难以理解或者十分烦琐，完全可以跳过这些内容（我也经常以这样的方式阅读）。在读完第一遍、掌握了一些新知识之后，再回过头来阅读这些部分，你可能会觉得理解起来要容易一些。而且，跳过这些部分并不影响你对后续内容的理解。

也许我更应该提醒大家的是，某些内容一时看不懂其实无伤大雅。我在从事数学研究时，有 90% 的时间会有不甚明白的感觉，所以，不必紧张，欢迎来到我的世界。困惑（有时甚至是挫败感）是数学研究

的一个必不可少的组成部分。不过，我们要看到积极的一面：如果生活中的一切都无须费力便可理解，那样的生活将会多么无聊！数学研究之所以如此令人兴奋，其原因就在于我们渴望解开这种困惑。我们希望理解自己所研究的内容，希望能够揭开数学神秘的面纱。在真正理解之后，我们内心深处会充满成功的喜悦，此时，你会觉得你所付出的一切都很值得。

在本书当中，我关注的是广阔的图景和不同概念及不同数学分支之间的逻辑关系，而不是技术细节。

我尽量减少使用公式，只要有可能，我都选择用语言来解释。关于书中出现的那几个公式，大家在阅读时也可以跳过不读。

关于数学术语，我需要提醒大家注意一个问题。在撰写本书时，我惊讶地发现，在数学学科中使用的某些特定表达，若在其他情况下使用，有可能意思完全不同。例如，数学中使用的“对应”（corresponding）、“表示”（representation）、“结合”（composition）、“圈”（loop）、“流形”（manifold）、“理论”（theory）等术语就与其在日常语境中的意义不同。只要有这种情况出现，我都会做出解释。此外，只要有可能，我都会用意义明晰的数学术语来替代意义模糊的术语，例如，我用“朗兰兹关系”代替了“朗兰兹对应”。

大家可以登录我的个人网页 <http://edwardfrenkel.com>，查阅我更新的信息及上传的阅读辅助材料。



序 言	VII
导 言	XVII
第 1 章 神秘的怪兽	001
第 2 章 对称的奥秘	011
第 3 章 第五道题	029
第 4 章 理论数学与应用数学	043
第 5 章 辫群与贝蒂数	053
第 6 章 敲开数学世界的大门	067
第 7 章 把一个个小岛连接起来	085
第 8 章 神奇的猜想	097

第 9 章 现代数学的“罗塞塔石碑” 119

第 10 章 李代数与 n 维空间 135

第 11 章 登顶数学险峰 155

第 12 章 数学思维的力量 165

第 13 章 来自哈佛大学校长的邀请 177

第 14 章 层－函数字典 193

第 15 章 数学领域的美丽邂逅 213

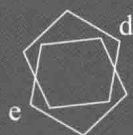
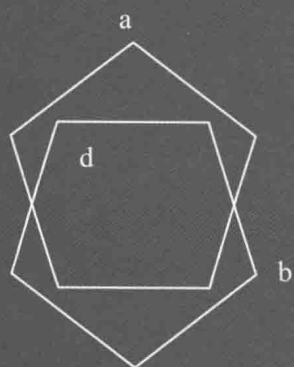
第 16 章 地球人和火星人 231

第 17 章 数学之美 257

第 18 章 爱的公式与终极真理 287

结 语 305

致 谢 309



—— 第 1 章 —— 神秘的怪兽

