高校经典教材同步辅导丛书

配套清华版 · 胡运权主编

教你用更多的自信面对未来！

一书两用

同步辅导+考研复习

运筹学教程

（第四版）

同步辅导及习题全解

主　编　边文思　焦艳芳

习题超全解

名师一线经验**大汇集**，解题步骤**超详细**，方法技巧**最实用**

新版

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

运筹学教程（第四版）同步辅导及习题全解

主　编　边文思　焦艳芳

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是与清华大学出版社出版，胡运权主编、郭耀煌副主编的《运筹学教程》（第四版）一书配套的同步辅导及习题全解辅导书。

《运筹学教程》（第四版）共有14章，分别介绍线性规划与单纯形法、线性规划的对偶理论与灵敏度分析、运输问题、目标规划、整数规划、非线性规划、动态规划、图与网络分析、网络计划、排队论、存储论、对策论、决策分析、运筹学中的启发式方法。本书按教材内容安排全书结构，各章均包括学习要求、重难点分析、知识点归纳、经典例题解析、课后习题全解五部分内容。全书按教材内容，针对各章节习题给出详细解答，思路清晰，逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习《运筹学教程》（第四版）的辅导教材，也可作为考研人员复习备考的辅导教材，同时可供教师备课命题作为参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学教程（第四版）同步辅导及习题全解 / 边文思，焦艳芳主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2015.8
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5170-3613-5

Ⅰ. ①运… Ⅱ. ①边… ②焦… Ⅲ. ①运筹学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第210740号

策划编辑：杨庆川　　责任编辑：周益丹　　封面设计：李　佳

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 **运筹学教程（第四版）同步辅导及习题全解**
作　　者	主　编　边文思　焦艳芳
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　　格	170mm×227mm　16开本　20.5印张　554千字
版　　次	2015年8月第1版　2015年8月第1次印刷
印　　数	0001—5000册
定　　价	30.80元

前言

胡运权主编、郭耀煌副主编的《运筹学教程》(第四版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了与此教材配套的《运筹学教程(第四版)同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑《运筹学教程》(第四版)教材特点,我们在内容上作了以下安排:

1. 学习要求。简单扼要地说明本章的学习目标,明确学习任务。

2. 重难点分析。每章前面均对本章的知识要点进行了整理。综合众多参考资料,归纳了本章几乎所有的考点,便于读者学习与复习。

3. 知识点归纳。对每章知识点做了简练概括,梳理了各知识点之间的脉络联系,突出各章主要定理及重要公式,使读者在各章学习过程中目标明确,有的放矢。

4. 经典例题解析。该部分选取了一些有启发性或综合性较强的经典例题,对所给例题先进行分析,再给出详细解答,并在最后作出点评,意在抛砖引玉。

5. 课后习题全解。教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给了详细的解答。

由于时间较仓促,编者水平有限,难免书中有疏漏之处,敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编 者

2015 年 06 月

目录
contents

目录
contents

目录
contents

目录

contents

第一章 线性规划及单纯形法

线性规划是运筹学中研究较早，理论和算法均比较成熟的一个重要分支。线性规划问题的提出最早是在 1939 年，由前苏联数学家康托洛维奇(Kantorovich，1975 年诺贝尔经济学奖获得者）在研究铁路运输的组织问题、工业生产的管理问题时提出来的。1947 年，美国学者丹西格(G. B. Dantzig)提出了线性规划问题的单纯形方法。后来，库普曼(T. C. Koopmans）和查恩斯(A. Charnes）对线性规划的理论和应用也作出了突出贡献。目前，线性规划在生产计划、运输、军事等领域都得到了广泛的应用。

学习要求

(1) 深刻领会线性规划的各种基与解的基本概念，它们之间的相互关系。

(2) 掌握图解法的计算步骤，注意怎样将目标函数表达成一条直线，这条直线如何平移使得目标函数值上升或下降。

(3) 熟练掌握单纯形法计算的全过程，特别应注意如何列出单纯形表，如何由一个基可行解换到另一个基可行解，基可行解是最优解、无界解或多重解的判断准则。

(4) 理解在什么情况下加入人工变量，人工变量起何作用，用大 M 法计算时目标函数的变化，两阶段法计算时目标函数的构成，掌握这两种计算方法的全过程，在什么情形下线性规划无可行解。

(5) 理解用矩阵形式代替单纯形表，并用矩阵公式求解线性规划。

重难点分析

(1) 建立线性规划数学模型。

(2) 有关线性规划解的概念、解的形式。

(3) 单纯形法计算、大 M 法、两阶段法等相关解法。

知识点归纳

■ 第一节　线性规划问题及其数学模型

线性规划数学模型

线性规划的数学模型的一般形式。

$$
\begin{array}{l}
\max(\min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad \text{—— 目标函数} \\
\text{s. t.}\left\{
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = (\geqslant, \leqslant)\ b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = (\geqslant, \leqslant)\ b_2 \qquad \text{—— 约束条件} \\
\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = (\geqslant, \leqslant)\ b_m \\
x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{array}
\right.
\end{array}
$$

模型特点：要确定一组变量的值，使之满足一组线性等式或不等式，并使一个线性目标函数实现极大化或极小化，这类问题都称之为线性规划问题。上述模型中，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为决策变量；满足约束条件的一组决策变量的值称为线性规划的一个可行解；一个线性规划所有可行解组成的集合称为线性规划的可行解集（可行域）；使目标函数取得最大值（或最小值）的可行解称为线性规划的最优解。

■ 第二节　线性规划图解法

一、图解法步骤

(1) 画出线性规划问题的可行域；

(2) 画出两条目标函数等值线，所谓目标函数等值线就是位于该直线上的点，具有相同的目标函数值；

(3) 平行移动目标函数等值线，使目标函数在可行域范围内达到最优。

二、图解法举例

1. 图解法的求解过程

图解法简单直观，尤其适用于只含有两个决策变量的线性规划问题。本节首先以花瓶问题为例介绍图解法的具体求解过程，然后再对图解法的求解步骤进行一般性的总结。

花瓶问题

一家玻璃产品生产公司生产带有花样图案的彩色玻璃花瓶。每一个花瓶经过艺术玻璃吹风机从液态加工而成，然后进入储藏室冷却至室温，花瓶有大和小两种尺寸，但是生产过程几乎相当，而且使用同一种材料。不论尺寸，每一个花瓶都需要 20 分钟的艺术加工，每周艺术加工工作时间为 40 小时；大小花瓶每个各需彩色玻璃 2 OZ 和 1 OZ。每周可用的玻璃为 160 OZ。另外，一个小花瓶占用 2 单位储存空间，一个大花瓶占用 3 个单位储存空间，一共有 260 个单位储存空间。大小花瓶的利润贡献率分别为 12 元 / 个和 10 元 / 个。

如表 1-1 所示。问应该怎样安排生产，才能使利润值最大。

表 1-1

工序 花瓶种类	占用材料 (OZ)	艺术加工 (小时)	储存空间 (单位)	利润值 (元)
大花瓶	2	1/3	3	12
小花瓶	1	1/3	2	10
每周可用能力	160	40	260	

解 用 x_1 表示每周生产的大花瓶数量，x_2 表示每周生产的小花瓶数量，该问题的数学模型为

$$\max z = 12x_1 + 10x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 160 \\ \dfrac{1}{3}x_1 + \dfrac{1}{3}x_2 \leqslant 40 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 260 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

首先考虑第一个约束条件，取正好相等的情况 $2x_1 + x_2 = 160$，我们可在直角平面坐标系 $x_1 - x_2$ 中画出一条直线。简单的方法就是找出两个点，然后过两点作一条直线。作直线 $2x_1 + x_2 = 160$。

由图 1-1 可见，直线将图分为两部分，直线上方的点都不满足约束条件，直线和直线下方的点都满足约束条件，直线上的点是临界点。

现在把另外两个约束条件加在同一图上，如图 1-1 所示。

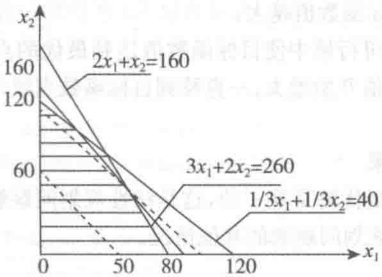

图 1-1

三个约束条件所对应的直线以及两条坐标轴（代表非负约束）所围成的公共区域称为可行域(Feasible Region)，如图 1-1 中的阴影部分所示。可行域中包含的点均为问题的可行解。

得到包括所有可行解的可行域之后，下一步工作就是寻找最优解了。

下面，在 $x_1 - x_2$ 坐标系中考察目标函数值的变化。不同目标函数值所对应的图形是一组平行的直线（图 1-1 中用虚线表示），直线方程为 $12x_1 + 10x_2 = L$（L 为大于或等于 0 的常数）。显然，离原点越远的直线所对应的 L 值越大。因此，可通过沿目标函数法线方向移动目标函数直线的方法寻找最优解，具体过程为：① 选择相对合适的 L 值（$L \geqslant 0$，且使目标函数直线经过可行域即可），把相应的目标函数直线加在约束条件图上；② 向右上方沿目标函数法线方向平行移动目标函数直线，离原点越远，其目标函数值越大，此时通过的可行域越来越小；③ 当目标函数直线与可行域相切时，则切点就是最优解。

在图 1-1 中，可以观测到最优解是 $x_1 = 20$，$x_2 = 100$。这一点是第二和第三个约束条件所对应直线的交点，对最优解有直接限制作用，这类约束被称为限制约束（Limiting Constrains）。第一个约束条件对最优解未起到直接限制作用，即材料并未直接限制产量，表明材料还有剩余量可供支配。

除上述寻找最优解的方法之外，还可通过求解限制约束所对应直线的联立方程组以得到精确的最优解，并验证观测到的最优解是否正确。

本题中，限制约束为$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \leqslant 40$ 和 $3x_1 + 2x_2 \leqslant 260$。

将两者所对应的直线方程联立得到

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 40 \\ 3x_1 + 2x_2 = 260 \end{cases}$$

求解得：$x_1 = 20$，$x_2 = 100$。

将 x_1 和 x_2 代入目标函数中得到

$$z = 12 \times 20 + 10 \times 100 = 1240$$

所以最大利润值是 1240 元。

根据上述求解过程，我们将图解法的基本步骤归纳如下：

(1) 以一个变量作为横坐标轴，另一个变量作为纵坐标轴，画出平面直角坐标系，并适当选取单位坐标长度。由于变量是非负的，所以画出坐标系的第一象限即可。

(2) 作出各约束条件在坐标系中所对应的直线，找出可行域（常用阴影区域标识）。

(3) 作出目标函数，由于 z 是一个待求的目标函数值，所以目标函数常用一组平行虚线表示，离坐标原点越远的虚线表示的目标函数值越大。

(4) 确定最优解。最优解是可行域中使目标函数值达到最优的点，当目标函数直线由原点开始沿法线方向向右上方移动时，z 值开始增大，一直移到目标函数直线与可行域相切时为止，切点即为最优解。

2. 规划问题求解的几种可能结果

在上例求解过程中得到的最优解是唯一的，这是线性规划问题解的一种情况。现在我们通过改变例题中的条件来看一下线性规划问题解的其他情况。

(1) 无穷多最优解

当我们将目标函数改为 $\max z = 12x_1 + 8x_2$ 时，此时利润值最大的目标函数直线与可行域直线 CD 重合（如图 1-2 所示），CD 线段上的点均使目标函数值达到最优，线性规划问题有无穷多个最优解。

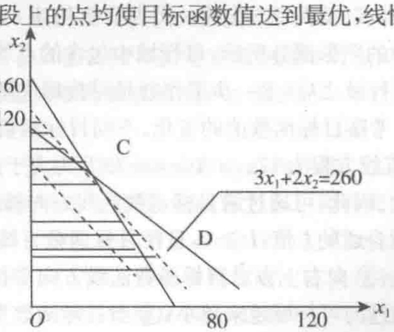

图 1-2

(2) 无界解

如果本例中只有约束条件 $x_2 \leqslant a$，或只有 $x_1 \leqslant a$，其中 a 为常数。那么可行域伸展到无穷，决策变量的取值没有限制，就会产生无界解。造成这种后果的原因通常是建立模型时遗漏了某些必要的资源约束条件。

(3) 无解或者无可行解

如果增加一个约束 $x_1 \geqslant 13$，则可行域为空集，说明该问题无解。反映在坐标图上，即为代表约束条件的各直线所包含的公共区域为空集。这说明模型的约束条件之间存在矛盾，通常是由于建模时产生了错误。

3. 图解法推测

求解含有两个决策变量的线性规划模型，用图解法比较方便，但它不适用于含有超过三个的多决策变量线性规划模型求解。虽然如此，图解法的解题方法和几何意义对于求解一般的线性规划问题仍有很大启发，使我们产生以下推测：

(1) 线性规划问题解的情况可分以下四种，即唯一最优解、无穷多最优解、无界解和无可行解。

(2) 线性规划问题有解，那么可行域是凸集。

(3) 如果线性规划问题存在最优解，那么唯一最优解一定是可行域凸集的某个顶点，无穷多最优解一定是可行域的某个边或某个面。

(4) 线性规划问题的一般求解思路：先找出凸集的任一顶点，计算该点的目标函数值，对凸集所有顶点的目标函数值进行比较，找出目标函数值最大的顶点即为问题的最优解。

三、线性规划问题的标准形式

规定如下形式的线性规划数学模型为 LP 标准形式。

$$\begin{aligned}&\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n &&\text{——目标函数}\\ &\text{s. t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} &&\text{——约束条件}\end{aligned}$$

与线性规划模型一般形式相比，标准形式的线性规划问题的特点有：① 目标函数极大化($\max z$)；② 约束条件为等号；③ 变量非负；④ 右端常数项大等于零。

上述标准形式的线性规划模型还可写成如下一些形式。

1. 简写形式

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i & (i = 1, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

2. 向量形式或矩阵形式

$$\max z = CX$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = b$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j = 1,\cdots,n$$

或

$$\max z = CX$$
$$AX = b$$
$$X \geqslant 0$$

其中 $C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$；$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$；$p_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^{\mathrm{T}}$；$b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$。

$$A = (p_1, p_2, \cdots, p_n) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

3. 集合形式

$$\max_{X \in R} z = CX \qquad R = \{X \mid AX = b, X \geqslant 0\}$$

规定线性规划问题标准形式的目的是便于理论分析和书写。任何非标准形式的线性规划问题都可以化为标准形式，具体有如下几种情况。

(1) 若 $\min f = CX$

此时可令，$z = -f$，则 $\max z = -\min f = -CX$，这样处理所得最优解不变，读者可以通过用图解法求解下列两个线性规划问题，得到该结论。

$$\min z = -x_1 - x_2 \qquad\qquad \max z = -x_1 - x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}, \qquad \text{s. t}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) 约束条件为“$\leqslant$”时

则约束条件左式加上非负的松弛变量 x_{n+i}，将约束条件 $\sum a_{ij}x_j \leqslant b_i$ 变为等式约束，即 $\sum a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$。

(3) 约束条件为“$\geqslant$”时

则约束条件左式减去非负的过剩变量（剩余变量）x_{n+i}，将约束条件 $\sum a_{ij}x_j \geqslant b_i$ 变为等式约束，即

$$\sum a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$$

(4) 若 x_k 为无限制

则令 $x_k = x_{k1} - x_{k2}$，其中 $x_{k1}, x_{k2} \geqslant 0$。

(5) 若 $b_i < 0$

则 $-b_i > 0$。

以上各种处理方式所得线性规划问题最优解不变。

第三节　线性规划问题解的性质

一、线性规划问题的基本概念

对于标准形式的线性规划

$$\max z = CX \quad \text{(a)}$$
$$AX = b$$
$$X \geqslant 0 \quad \text{(b)}$$

有如下基本概念。

1. 可行解

满足约束条件(b) 的点 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 称为该线性规划的一个可行解。

2. 最优解

使目标函数值达到最大的可行解称为该线性规划的最优解。

3. 基、基变量、非基变量

设约束方程的系数矩阵 A 中,有 m 个线性无关的列向量,且设 $B = (P_1, P_2, \cdots, P_m)$ 线性无关,则称 B 为该线性规划的一个基;相应的向量 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 称为基向量;与之对应的变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 称为基变量,记为 $X_B = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}$;其余的向量为非基向量,记为 $N = (p_{m+1}, p_{m+2}, \cdots, p_n)$;其余的变量为非基变量,记为 $X_N = (x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$。

4. 基本解

将上述线性规划约束方程 $AX = b$ 改写成如下形式,即

$$(B, N)(X_B, X_N)^{\mathrm{T}} = b$$

从而有 $BX_B = b - NX_N$。

令 $X_N = 0$,得到线性方程组 $BX_B = b$。

由于 B 中各列向量线性无关,因此解此方程组有唯一解,即 $X_B = (x_1{}^0, x_2{}^0, \cdots, x_m{}^0)^{\mathrm{T}}$。于是得到 $AX = b$ 的一个确定的解,即 $X^0 = (X_B, X_N)^{\mathrm{T}} = (x_1{}^0, x_2{}^0, \cdots, x_m{}^0, 0, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$。称 X^0 为该线性规划对应于基 B 的一个基本解。

同样,在 A 中任选 m 个线性无关的列向量都可以组成一个基,对应就有一个基本解。对于一个线性规划最多有多少个基本解呢?从 n 个中选 m 个进行组合,即 $C_n^m = n!/[(n-m)!m!]$,因此,基本解是有限的。

5. 基可行解

设 X 为线性规划问题对应于基 B 的基本解,若满足 $X \geqslant 0$,则称 X 为该线性规划问题的一个基可行解。B 为该线性规划问题的一个可行基。

从上述定义可知,基本解不一定是可行解,基可行解就是满足非负条件的基本解,或者说既是基本解又是可行解的解。

二、线性规划的基本定理

定义 1.1 设 K 是 n 维欧氏空间的一个点集,若任意两点 $X^{(1)} \in K, X^{(2)} \in K$ 均有 $X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)} \in K, (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$,则称 K 为凸集。

凸集的几何意义是:集合 K 中任意两点连线上的所有的点仍然在 K 中。如图 1-3 所示,在两维空间中的图(a)(b) 为凸集,图(c)(d) 则不是凸集。

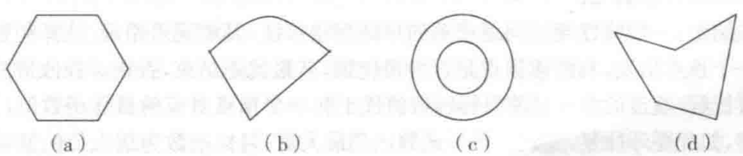

图 1-3

定义 1.2　设 K 为凸集，$X \in K$，若不存在 $X^{(1)} \in K, X^{(2)} \in K(X^{(1)} \neq X^{(2)})$ 以及 $\alpha \in (0,1)$，使得

$$X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)}$$

则称 X 为凸集 K 的一个顶点(极点)。

该定义说明，凸集中的顶点不是凸集中任意两点连线的内点。

定理 1.1　若线性规划存在可行域，则其可行域 $R = \{X \mid AX = b, X \geqslant 0\}$ 是凸集。

证明　$\forall X^{(1)} \in R, \forall X^{(2)} \in R$ 及 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$，

有 $AX^{(1)} = b$ 且 $X^{(1)} \geqslant 0$，

$AX^{(2)} = b$ 且 $X^{(2)} \geqslant 0$，

则 $X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)} \geqslant 0$，

$$\begin{aligned} \text{且 } AX &= A(\alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)}) \\ &= \alpha AX^{(1)} + (1-\alpha)AX^{(2)} \\ &= \alpha b + (1-\alpha)b = b \end{aligned}$$

即 $X \in R$，故 R 为凸集。

定理 1.2　线性规划问题的可行解 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为基可行解的充要条件是：X 的非零分量所对应的系数列向量是线性无关的(证明略)。

由此定理可知，若线性规划系数方程矩阵 A 的秩为 m 时，则任一基可行解的非零分量的个数最多只有 m 个。

定理 1.3　如果线性规划有可行解，则一定有基可行解。

定理 1.4　线性规划问题的基可行解对应于可行域的顶点。

定理 1.5　若线性规划问题的可行域非空有界，则线性规划问题的最优解一定可以在其可行域的某个顶点上得到。

根据上述定理可知：只要线性规划问题有可行解，则它必有基可行解，而可行解的顶点有有限多个。因此，为了求得最优解，我们只需在这有限多个顶点中找到使目标函数取得最大值的那个顶点(基可行解)。求线性规划问题的单纯形方法正是利用这一思想。

第四节　单纯形法

基本思想：在有限的基可行解中寻找最优解。即，首先求得一个初始基可行解，并判断其是否为最优解，若是则停止计算，否则转换到另一个基可行解，使目标函数值有所改善。如此重复进行，经过有限次迭代，直到得到线性规划问题的最优解，或判断出无最优解为止。

一、单纯形法的求解步骤

由之前的介绍可知，图解法只适用于含两个决策变量的线性规划问题，而对于含多个决策变量的线性规划问题如何求解呢？

根据相关结论，一般线性规划问题求解的单纯形法算法，其解题思路是：选择初始基可行解，即从可行域的一个顶点出发，判断该顶点是否为最优解，若最优则结束，否则寻找改进的顶点，即转换到另一个基可行解，改进的含义是使目标函数值优于前一个顶点对应的目标函数值，再判断该顶点是否为最优解，如此循环往复，直到使目标函数达到最大值，目标函数为最大值的基可行解(对应于可行域的顶点)即为问题的最优解。该过程如图 1-4 所示。

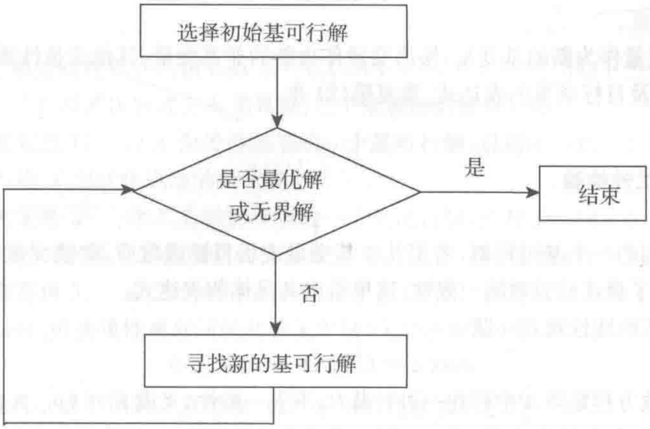

图 1-4

单纯形法的具体步骤为：

(1) 选择初始的基可行解和对应的可行基，确定基变量和非基变量，将目标函数和基变量分别用非基变量表示。

对于线性规划的标准形式

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.1}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = b \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{1.2}$$

直接观察到初始可行基 $B = (p_1, p_2, \cdots, p_m) = I_m$，则 m 个基变量为 $x_1, x_2, \cdots, x_m$；$n-m$ 个非基变量为 $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n$。用非基变量表示基变量可得

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - a_{1,m+1} x_{m+1} - \cdots - a_{1n} x_n \\ x_2 &= b_2 - a_{2,m+1} x_{m+1} - \cdots - a_{2n} x_n \\ &\vdots \\ x_m &= b_m - a_{m,m+1} x_{m+1} - \cdots - a_{mn} x_n \end{aligned} \tag{1.3}$$

将它们代入目标函数可得

$$z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j x_j \tag{1.4}$$

其中 $\sigma_j = c_j - z_j (j = m+1, \cdots, n)$。

(2) 在目标函数式(1.4)中，称非基变量 x_j 所对应的系数 σ_j 为检验数。若 $\sigma_j > 0$，则 x_j 的值从当前值 0 开始增加时，目标函数值将随之增加。我们选择 x_j 作为“换入变量”，转入下一步。如果当前的基可行解有多个非基变量的检验数为正，则选择检验数最大的非基变量作为换入变量；如果所有非基变量的检验数均为 0 或负时，则当前的基可行解即为最优解，问题求解结束。

(3) 在式(1.3)中，观察换入变量增加时，各基变量的变化情况，为保证所有变量的非负性，确定首先减少到 0 的变量 x_n 作为“换出变量”，转入下一步。如果换入变量增加时，所有基变量的值都不减少，则表示可行域无界，且目标函数值将随换入变量的增加而无限增加，此问题属于无界解，至