目　录

第六章 行列式与矩阵

求解线性方程组是代数学中的一个基本问题. 我们在中学代数中就解过二、三元的线性方程组, 但是当时的解题方法有很大的局限性, 远不能满足现代科技发展的要求. 本章主要介绍 n 阶行列式的概念、性质和计算方法, 然后利用它研究一类特殊的线性方程组的求解方法, 即克莱姆 (Cramer) 法则.

§6.1 行列式

行列式在物理、力学以及数学的其他分支中都有着非常重要的应用. 在此我们只是通过对二、三元线性方程组求解过程的观察和分析, 引出 2, 3 阶行列式的概念, 然后加以总结并推广.

§6.1.1 预备知识

在给出行列式的定义之前, 先来回忆并总结一下线性方程组的求解问题.

1. 求解二元线性方程组 二元线性方程组的一般形式:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \tag{6.1}$$

这里 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ 都是常数.

方程组的求解通常用消元法, 即在方程组 (6.1) 中消去一个未知量 y, 得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = b_1a_{22} - b_2a_{12}$, 再消去另一个未知量 x, 又得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = b_2a_{11} - b_1a_{21}$. 此时, 如果上式未知元的系数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 那么可解得方程组 (6.1) 的唯一解:

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{6.2}$$

此式具体地反映了方程组 (6.1) 的解对该方程组的系数及常数项的依赖关系.

对于任何一个二元线性方程组 (6.1), 只要 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 就可以通过公式 (6.2) 求出它的解. 但是, 从此公式本身还看不出明显的规律, 因而也不容易记忆. 如果我们引入适当的记号, 情况就大不相同了.

事实上, 公式 (6.2) 的两个分母是相同的, 都是 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 即它只含有未知量的系数. 如果将未知量的系数按它们在方程组 (6.1) 中的位置相应的列成下表:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}. \end{matrix}$$

那么，表中左上角的 a_{11} 与右下角的 a_{22} 的乘积减右上角的 a_{12} 与左下角的 a_{21} 的乘积，刚好就是式 (6.2) 的分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

我们把这个代数和叫作二阶行列式，并用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{6.3}$$

在一个行列式里通常把横排叫行，纵排叫列， $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 叫作行列式的元素. 还把行列式中，从左上角到右下角的对角线叫作主对角线，从右上角到左下角的对角线叫作副对角线，式 (6.3) 右端叫作二阶行列式的展开式.

因此，二阶行列式的展开式就等于它的主对角线上两个元素的乘积与副对角线上两个元素的乘积之差.

再看式 (6.2) 中的两个分子，我们很快发现它们就是下面两个二阶行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

也就是说：在式 (6.2) 中， x 的表达式的分子 D_1 是将分母的行列式 D 中第 1 列的系数 a_{11} 和 a_{21} 分别换为常数项 b_1 和 b_2 而得； y 的表达式的分子 D_2 是将分母的行列式 D 中第 2 列的系数 a_{12} 和 a_{22} 分别换为常数项 b_1 和 b_2 而得. 这样公式 (6.2) 可表为

$$x=\frac{D_1}{D}, \quad y=\frac{D_2}{D}, \tag{6.4}$$

这里的分母 D 称为方程组 (6.1) 的系数行列式.

引入二阶行列式后，公式 (6.2) 变为公式 (6.4). 这不仅形式简单，而且有明显的规律性，很容易记忆也便于推广.

2. 求解三元线性方程组 三元线性方程组的一般形式：

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3. \end{cases} \tag{6.5}$$

方程组 (6.5) 也可用加减消元法去求解，通常情形下其解可表为：

$$\begin{cases} x=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{13}a_{32}+b_3a_{12}a_{23}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}, \\ y=\dfrac{b_1a_{23}a_{31}+b_2a_{11}a_{33}+b_3a_{13}a_{21}-b_1a_{21}a_{33}-b_2a_{13}a_{31}-b_3a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}, \\ z=\dfrac{b_1a_{21}a_{32}+b_2a_{12}a_{31}+b_3a_{11}a_{22}-b_1a_{22}a_{31}-b_2a_{11}a_{32}-b_3a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}. \end{cases}$$

其中分母当然不为零. 但这些公式更复杂, 同样既不便于记忆也不便于计算. 仿照二阶行列式, 引入下列记号和规定: 上式 x, y, z 的分母中三个表达式完全相同, 这个代数和叫作三阶行列式, 用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示并记为 D, 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{6.6}$$

这个三阶行列式右端的展开式比二阶行列式复杂多了.

然而, 它也有以下明显的规律: 展开式中有三项符号是正的, 其中 $a_{11}a_{22}a_{33}$ 是主对角线上三个元素的乘积, 其他两项中的每一项都是位于主对角线的一条平行线上的两个元素与副对角线上一元素的乘积. 三个负项对于副对角线也有类似的构成规律. 这些规律也是三阶行列式的计算方法, 这个方法可以用图形表出, 如图 6.1 所示.

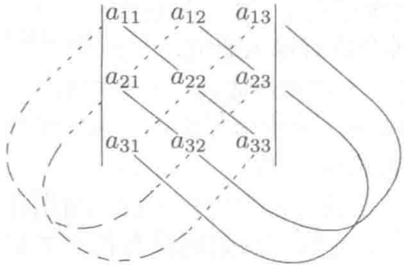

图 6.1

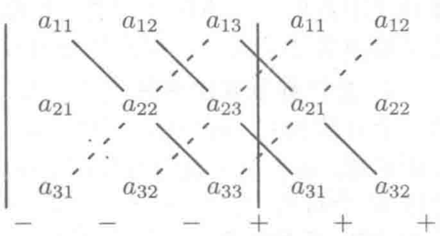

图 6.2

另外, 还有一种计算方法叫作 "对角线法" 或 "沙路法", 即将行列式的前两列元素顺次添加到行列式的后面, 如图 6.2 所示, 三条实线对应的三个元素乘积的前面是正号, 三条虚线对应的三个元素乘积的前面是负号.

有了三阶行列式的定义和计算法则, 三元线性方程组 (6.5) 的以上解 x, y, z 即可用行列式的形式表示: 它们的分母就是系数行列式 D, 它们的分子分别记为行列式 D_1, D_2 和 D_3, 即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

这样, 三元线性方程组 (6.5) 的解, 在它的系数行列式 $D \neq 0$ 时可唯一地表为

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}, \quad z = \frac{D_3}{D}. \tag{6.7}$$

以上是中学代数中二、三元线性方程组的行列式的形式解. 为了研究更一般的线性方程组的求解问题，我们有必要将行列式的概念加以推广.

要把二、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式，首先要弄清楚 n 阶行列式的展开式有多少项，各项由哪些元素构成；其次要弄清楚各项的正负号如何确定等. 为了解决这些问题，我们先抛开线性方程组的求解问题，只对行列式再进行分析研究.

为方便计，我们考察式 (6.6) 定义的 3 阶行列式：3 阶行列式共有 3^2 个元素排成 3 行 3 列；它的展开式共有 $3!(=6)$ 项，其中正、负号各出现 3 项；每项均是 3 个元素的乘积，而且这 3 个元素均来自行列式的不同行和不同列. 如果把这段表述中的“3”全部改成“n”，那么就可得到 n 阶行列式的定义，唯独各项出现的符号原先是用对角线规则确定的，深入研究表明：对角线规则在 n 阶 $(n \geqslant 4)$ 行列式中不再有效，因而需要做更细致的分析.

行列式中的每一个元素都有两个下标 (或叫足码)：第一个下标表示元素所在的行数，称为元素的行下标，简称行标；第二个下标表示元素所在的列数，称为元素的列下标，简称列标. 现将行列式展开式中每一项各元素的行标从小到大依次写成一排，列标也对应地顺次写成一排. 不难发现，在行列式的展开式中各项出现的符号与这个列标的排列次序有关. 这个关系到底是什么？为了搞清楚这个关系，我们还要对 n 元数排列进行深入研究.

3. 全排列及其逆序数 由 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个数码组成的一个有序数组，称为一个 n 阶排列，或叫作 n 个数码的一个全排列. 由中学里所讲的排列组合的知识知道，n 个不同数码的所有不同的全排列总数为 $P_n = n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$. 在这 $n!$ 个排列中，$123\cdots n$ 是唯一的一个完全按自然顺序排列的，叫作自然排列或叫 **标准排列**, 而其余排列中的每一个都有较大的数码排在较小的数码的前面，也就是大小的顺序颠倒.

如果数 i 在数 j 前面并且 $i > j$, 就说这对数码 i, j 在相应的排列中构成一个 **逆序**. 若一个排列中只有 k 对元素为逆序，就称这个排列的逆序数为 k, 自然排列的逆序数为零. 比如，312 的逆序数是 2；321 的逆序数是 3；而 4132 的逆序数是 4. 对于一个给定的 n 元排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$, 其逆序的计算方法如下：

设 i_1 后面比 i_1 小的数码有 m_1 个，i_2 后面比 i_2 小的数码有 m_2 个，$\cdots$, i_{n-1} 后面比 i_{n-1} 小的数码有 m_{n-1} 个，那么，由逆序数的定义，该排列的逆序数就是 $m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1}$, 记为 $t(i_1 i_2 \cdots i_n) = m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1}$.

比如，在排列 7435162 中，$m_1 = 6, m_2 = 3, m_3 = 2, m_4 = 2, m_5 = 0, m_6 = 1$, 于是 $t(7435162) = 6 + 3 + 2 + 2 + 0 + 1 = 14$.

我们将逆序数为奇数的排列称为 **奇排列**, 逆序数为偶数的排列称为 **偶排列**. 如 $t(312) = 2$, 故 312 为偶排列；而 $t(321) = 3$, 故 321 为奇排列.

为了研究排列的奇偶性，还要引入对换的概念：将一个排列中的某两个数码 i 和 j 的位置互换，而其余数码不动，就得到另一个新的排列. 对排列的这

种变换称为一个对换，记为 (i,j). 如， $312 \overset{(1,2)}{\longleftrightarrow} 321$ 或 $4132 \overset{(2,4)}{\longleftrightarrow} 2134$. 排列的对换和排列的奇偶性有密切的关系.

定理 6.1　排列中的每一个对换都要改变排列的奇偶性.

证 设一个排列中互换位置的两个数码是相邻的两个数码，其余的数码位置不变，即原排列是 $\cdots ij\cdots$, 经过对换 (i,j) 变为 $\cdots ji\cdots$, 即

$$\cdots ij\cdots \overset{(i,j)}{\longleftrightarrow} \cdots ji\cdots,$$

其中 "$\cdots$" 表示那些不动的数码.

显然， i 和 j 与其余数码间所成的逆序没有改变，没有动的那些数码间的逆序也不会变. 改变的只是 i 和 j 之间的逆序. 若 $i<j$, 则 i 和 j 在原排列中不构成逆序，而在新排列中构成逆序，也就是说，新排列的逆序数比原排列的逆序数增加 1, 即 $t(\cdots ji\cdots)=t(\cdots ij\cdots)+1$. 反之，若 $i>j$, 则 $t(\cdots ji\cdots)=t(\cdots ij\cdots)-1$. 无论那一种情况，原排列的奇偶性总是变了.

现在设 i,j 不相邻, 在 i,j 之间还有 s 个数码, 设原排列为 $\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots$, $(s>0)$. 经过对换 (i,j) 后

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots \overset{(i,j)}{\longleftrightarrow} \cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots.$$

不难看出，新排列也可以看成是由原排列经过一系列相邻对换而得到.

事实上，从排列 $\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots$ 开始，先将 j 依次与数 $k_s, k_{s-1}, \cdots, k_1$ 对换，经过这 s 次对换后，排列变为 $\cdots ijk_1k_2\cdots k_s\cdots$. 再从这个排列出发，将 i 依次与 $j,k_1,\cdots,k_s$ 对换，又经过 $s+1$ 次对换后，这个排列就变为排列 $\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots$. 前后共经过 $2s+1$ 次相邻对换，就从原排列得到新排列. 前已证：相邻两个数码的一个对换改变排列的奇偶性，因而，原排列经过奇数次的相邻对换最终也改变排列的奇偶性. 亦即原排列和新排列的奇偶性相反. □

定理 6.2　任何一个 n 阶排列都可以经过若干次对换变成自然排列，而所作对换的次数与原排列有相同的奇偶性.

证 设对换次数为 m, 则当 $n=2$ 时，共有两个排列 12 和 21, 而 $21 \overset{(2,1)}{\longleftrightarrow} 12$. 又 $t(21)=1$, 对换的次数 $m=1$, $t(21)$ 与 m 都是奇数，结论成立.

设此定理对任一 $n-1$ 阶排列成立，现证对任一 n 阶排列定理也成立.

设 $i_1i_2\cdots i_{n-1}i_n$ 为任一 n 阶排列, 若 $i_n=n$, 则由归纳假设可知 $i_1i_2\cdots i_{n-1}$ 可经过若干次对换变为 $12\cdots(n-1)$, 而 n 阶排列也同时变成为自然排列 $12\cdots n$.

若 $i_n\neq n$, 此时作对换 (n,i_n) 得排列 $i'_1i'_2\cdots i'_{n-1}n$, 从而化为已证明的情形. 因此，定理的第一部分对任意 n 成立.

因为自然排列为偶排列，由定理 6.1, 若 $i_1i_2\cdots i_n$ 是奇排列，则只有经过奇数次对换才能变成偶排列. 同样，一个偶排列，只有经过偶数次对换才能得到偶排列，即原排列的逆序数与对换次数奇偶性相同，才能变为自然排列. □

推论 6.1 设 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 是任意两个 n 阶排列，则总能经过若干次对换由 $i_1i_2\cdots i_n$ 变到 $j_1j_2\cdots j_n$.

证 由定理 6.2, $i_1i_2\cdots i_n$ 可以经过若干次对换变为 $12\cdots n$, $j_1j_2\cdots j_n$ 也能经过若干次对换变为 $12\cdots n$. 那么，按由 $j_1j_2\cdots j_n$ 变到 $12\cdots n$ 的相反顺序依次对换，即可由 $12\cdots n$ 变到 $j_1j_2\cdots j_n$. 连续经过若干次对换，即可由 $i_1i_2\cdots i_n$ 变到 $12\cdots n$, 进而变到 $j_1j_2\cdots j_n$. □

定理 6.3 当 $n\geqslant 2$ 时，在 n 个数码的全排列中，奇、偶排列各占一半，

证 设 $P_n=n!$ 个全排列中共有 p 个不同的奇排列， q 个不同的偶排列，即 $p+q=n!$. 今对 p 个不同的奇排列进行同一个对换 (i,j), 由定理 6.2, 必将得到 p 个不同的偶排列. 这样，就有 $p\leqslant q$. 同样，对 q 个不同的偶排列进行同一对换 (i,j), 又必推得 $q\leqslant p$. 因此必有 $p=q$ 即各为 $\dfrac{1}{2}n!$. □

§6.1.2 行列式的概念

根据以上讨论，我们现在就不难给出一般的 n 阶行列式的定义了.

定义 6.1 n **阶行列式**$D=\det(a_{ij})=\det(a_{ij})_{n\times n}$ 是由 n^2 个数 $a_{ij}=a_{i,j}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 按如下方式所确定的一个数：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{6.8}$$

其中的求和是对所有的 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 取的，$t(j_1j_2\cdots j_n)$ 为排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

这个和也叫行列式的展开式，它表明：行列式其实就是所有来自不同行和不同列的元素之积的代数和. 当 $n=2,3$ 时，就是前面讲的二、三阶行列式. 当 $n=1$ 时，我们约定一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

注意 不要把一阶行列式与绝对值的符号相混淆.

在行列式定义中，它的展开式中的每一项中 n 个元素的行下标排列成自然排列. 也就是说，乘积的各因子是按第一行、第二行 $\cdots$ 依次取的. 其实，这不是必要的，它的项一般可以写为 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$, 其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$

是两个 n 阶排列. 但这时该项的符号不是 $(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)}$ 了. 关于这一项的符号, 我们有下面的结论.

定理 6.4 设 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 阶排列, 则 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 是行列式 D 的展开式中的一项, 它前面的符号是 $(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}$.

证 显然 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 是位于 D 的不同行不同列的 n 个元素的乘积, 因此, 它是 D 的展开式中的一项.

另一方面, (6.8) 中如果某两个因子交换顺序, 就相当于这一项的行下标排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和列下标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 都同时作一次对换. 由定理 6.1 知道, $t(i_1i_2\cdots i_n)$ 和 $t(j_1j_2\cdots j_n)$ 同时改变奇偶性, 但 $t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性不变 (数值可能改变).

由定理 6.2, 连续交换 (6.8) 式中各因子的顺序使其变为 $a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{nj_n'}$, 再由刚刚证明的结果可知

$$(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{t(12\cdots n)+t(j_1'j_2'\cdots j_n')}=(-1)^{t(j_1'j_2'\cdots j_n')}.$$

这表明: (6.8) 式中的项与交换其因子顺序使行下标排列成自然排列后的相应项有相同的符号. 所以, 我们写行列式展开式的一般项时, 将该项的行下标依自然顺序排列并不失去普遍性. □

例 6.1 计算反对角行列式 $D=\begin{vmatrix}0&0&0&a\\0&0&b&0\\0&c&0&0\\d&0&0&0\end{vmatrix}$ 的值.

解 D 的展开式有 $4!=24$ 项. 由于 D 除副对线上的元素外, 其余全为零, 故除 $abcd$ 一项外, 其余各项都是零. 这一项的列下标排列为 4321. 又 $t(4321)=6$. 故该项符号为正, 即 $D=abcd$.

此例表明: 三阶行列式的对角线规则对于更高阶的行列式不再适用.

例 6.2 计算上三角行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$ 的值.

解 D_n 是含 $n!$ 项的代数和. 它的每一项可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 考察其中的非零项: 由于第一列中除 a_{11} 外都是零, 故只考虑 $j_1=1$; 同样, 当 a_{11} 取定后, 取第二列的元素时, 只有 $j_2=2$, 即 a_{22} 可取, 其余为零. 依此类推, 在 D_n 中除 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 外, 其余项皆为零. 该项对应的列下标排列为自然排列, 显然是偶排列. 所以 $D_n=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

同样，有下三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 特别地，

对角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

例 6.3 证明反对角行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

证 显然，这个行列式 D 除项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 外，其余各项均为零. 这一项的列下标排列为 $n(n-1)\cdots 21$, 而

$$t[n(n-1)\cdots 21] = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \frac{1}{2}n(n-1).$$

因此，由行列式的定义可知 $D = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$.

在 n 比较大时，利用行列式的定义计算它的值是非常困难的. 比如，一个 10 阶行列式的展开式有 $10! = 3628800$ 项. 每项 10 个字母，若以每分钟写 100 个字母 (这已是很高的速度了) 计算，即使把这些项都写出来，每天工作 8 小时，也需要两年多的时间！如果用行列式去解一个十元线性方程组，那么至少也要 23 年！何况在应用中，如大型建筑工程中的应力计算，中长期天气预报等，经常要解几十个甚至几百个未知量的线性方程组，要用行列式去解这些方程组，而计算行列式又没有更好的方法，那根本是行不通的，即使用大型电子计算机去作这些运算也是困难的. 因此有必要进一步讨论行列式的计算问题.

习 题 6.1

1. 计算下列各排列的逆序数.

(1) 217985643; (2) 18342657; (3) $2n, 1, 2n-1, 2, \cdots, n+1, n$.

2. 利用对换把排列 7563124 变为 7654321.

3. 在 3, 8 两个数码中选择 i 与 j 使

(1) $1274i56j9$ 成偶排列; (2) $1i25j4697$ 成奇排列.

4. 下列各项是否是 6 阶行列式 D_6 的项? 若是 D_6 的项, 则它应取什么符号?

(1) $\pm a_{13}a_{32}a_{34}a_{41}a_{56}a_{25}$; (2) $\pm a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$;

(3) $\pm a_{21}a_{13}a_{32}a_{55}a_{64}a_{46}$; (4) $\pm a_{41}a_{62}a_{33}a_{52}a_{14}a_{25}$.

5. 写出 D_4 中所有带有负号且含 a_{23} 的项.

6. 用行列式定义计算.

(1) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & e & f \\ m & n & g & h \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$.

§6.2 行列式的计算

根据行列式的定义 (6.8) 式和上面的讨论可知, 一些特殊的行列式可以考虑用定义去计算. 但在一般情况下, 行列式的计算还是要考虑用下面的方法.

§6.2.1 行列式的性质

下面这些性质在行列式的计算中起着非常重要的作用, 在计算行列式时, 这些性质要灵活运用. 设 n 阶行列式: $D = \det(a_{ij})$, 记

$$D^{\mathrm{T}} = \det(a_{ij})^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

这里 D^{T} 叫作 D 的 **转置行列式**. 当然, D 也是 D^{T} 的转置行列式. 它们的关系是, 其中的一个沿主对角线转置 180° 而得到另一个.

性质 6.1 行列式与它的转置行列式相等.

证 要证两个同阶行列式相等, 只要证它们有相同的项且对应项的符号也相同就行了. 显然, 行列式 D 与其转置行列式 D^{T} 有相同的项. 设 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 是 D 的一项, 它在 D 中的符号是 $(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)}$. 它在 D^{T} 中的对应项是 $a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$. 由定理 6.4, 其符号是 $(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)+t(12\cdots n)} = (-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)}$. 这样 D 与 D^{T} 有相同的项, 对应项的符号也相同. 所以 $D = D^{\mathrm{T}}$. □

性质 6.1 表明: 行列式的行和列是对称的. 凡是有关行的性质对列也成立, 反之亦然. 因此, 下面所述的行列式性质, 只要对行或列给出证明即可.

性质 6.2 互换行列式两行 (列), 行列式变号.

证 设将 D 的第 i 行和第 j 行的位置 (D 的其余元素不动) 交换得的新行列式是 D_1, 则根据 n 阶行列式的定义 (6.8) 可知:

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{j_1\cdots j_j\cdots j_i\cdots j_n} (-1)^{t(j_1\cdots j_j\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{jj_j}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= -\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_j\cdots j_n} (-1)^{t(j_1\cdots j_i\cdots j_j\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{jj_j}\cdots a_{nj_n}, \end{aligned}$$

即 $D_1 = -D$. □

用 r_i 表示行列式的第 i 行, 用 c_i 表示行列式的第 i 列. 交换 i,j 两行记为 $r_i \leftrightarrow r_j$; 交换 i,j 两列记为 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 6.2 若行列式中有两行 (列) 完全相同, 则此行列式为零.

证 设 D 中的第 i 行和第 j 行 $(i \neq j)$ 完全相同, 交换第 i 行和第 j 行的位置后的新行列式为 D_1, 由性质 6.2 知 $D_1 = -D$. 而交换的两行完全相同, 故 $D_1 = D$. 从而 $D = -D$, 即 $D = 0$. □

第 i 行的每个元素乘 k 记作 $r_i \times k$; 第 i 列的每个元素乘 k 记作 $c_i \times k$.

性质 6.3 行列式某一行 (列) 中的元素同乘 k 等于用 k 乘该行列式.

证 设用数 k 乘 D 的第 i 行的所有元素 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$ 得 D_1, 则 D_1 的第 i 行的元素是 ka_{i1}, ka_{i2}, $\cdots$, ka_{in}, 其余元素与 D 相同. 所以, 行列式 D 中的项 $(-1)^{t(j_1\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$, 在行列式 D_1 中的对应项是

$$(-1)^{t(j_1\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots (ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n} = k(-1)^{t(j_1\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}.$$

所以 $D_1 = kD$. □

推论 6.3 行列式中某一行 (列) 元素的公因子可以提到行列式之外.

推论 6.4 若行列式中某一行 (列) 的元素全为零, 则此行列式为零.

推论 6.5 若行列式中某两行 (列) 的元素成比例, 则此行列式为零.

证 设行列式 D 的第 i 行和第 j 行 $(i \neq j)$ 元素成比例, 比例常数是 k, 则

$$a_{i1} = ka_{j1}, \quad a_{i2} = ka_{j2}, \quad \cdots, \quad a_{in} = ka_{jn}.$$

由推论 6.3, 从行列式 D 中提出第 i 行的公因子 k 后, 新行列式中第 i 行和第 j 行的元素完全相同, 再由推论 6.2 知 $D = 0$. □

性质 6.4 (行列式的分解定理) 若行列式 D 的第 i 行(列)元素都是两个元素的和，则行列式 D 可依第 i 行(列)元素分解为两个行列式之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中这三个行列式，除第 i 行外，其余元素都相同.

证 设 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}, (j=1,2,\cdots,n)$, 则 D 中的每一项连同这一项的符号在内可写成:

$$\begin{aligned} &(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ =\ &(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots (b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ =\ &(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+(-1)^{t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n}. \end{aligned}$$

所以结论成立. □

这个性质可以推广到 D 的某一行 (列) 的元素都是 m 个元素和的情形.

性质 6.5 把行列式的某一行(列)元素同乘数 k 后加到另一行(列)的对应元素上去，行列式的值不变.

证 设行列式 $D=\det(a_{ij})$, 将 D 的第 i 行的所有元素同乘数 k 后加到第 j 行 $(i\neq j)$ 上去，得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

利用性质 6.4 和推论 6.5, 有

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D. \qquad \square$$

以数 k 乘第 j 行的各元素加到第 i 行的对应元素上，记作 $r_i + kr_j$; 以数 k 乘第 j 列的各元素加到第 i 列的对应元素上，记作 $c_i + kc_j$.

有了以上这些性质和推论，就可以简化行列式的计算了. 作为这些性质的应用，我们举几个例子.

例 6.4 计算 3 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 2+a_1 & 3+a_1 \\ 1+a_2 & 2+a_2 & 3+a_2 \\ 1+a_3 & 2+a_3 & 3+a_3 \end{vmatrix}$.

解 将 D 的第一列所有元素乘 -1 后分别加到第二、三列上，得行列式 $D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 2 \\ 1+a_2 & 1 & 2 \\ 1+a_3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. 由于这个行列式最后两列的对应元素成比例，所以 $D = 0$.

例 6.5 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

解 这个行列式的特点是每一行 (列) 的所有元素之和都等于 $n-1$, 因此，将其余各行 (列) 的所有元素都加到第一行 (列) 上，并提出公因子 $n-1$, 得

$$D_n = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

再将以上行列式第一行的所有元素都乘 -1 后加到其余各行上，得

$$D_n = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

最后这个行列式是上三角行列式，由例 6.2 得 $D_n = (-1)^{n-1}(n-1)$.

例 6.6 展开 4 阶行列式以简化函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & x & 3 & -4 \\ 1 & -2 & x & -4 \\ 1 & -2 & 3 & x \end{vmatrix}$.

解 将行列式的第一行的所有元素乘 -1 后加到其余各行上，得

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & x+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x+4 \end{vmatrix} = (x+2)(x-3)(x+4).$$

另解 因为行列式的展开式是 x 的多项式，而行列式 $f(-2)$ 的第一，二列对应元素成比例，故行列式 $f(-2)=0$, 说明 $x+2$ 是 $f(x)$ 的一个因式. 同理 $x-3$ 及 $x+4$ 都是 $f(x)$ 的因式. 另一方面，行列式主对角线上元素的乘积 x^3 显然是 $f(x)$ 的最高次幂，且 x^3 的系数为 1. 所以 $f(x) = (x+2)(x-3)(x+4)$.

以上几个问题，主要是利用行列式的性质 6.5, 将行列式的某一列变成只有一个非零元素，而其余的元素全为 0(若此列全为零元，则行列式为零). 如此反复，即可将给定的行列式变成上三角行列式，从而可以方便得到原行列式的值. 当然，也可以将行列式化为下三角行列式，效果相同. 利用性质计算行列式是一种非常有效的方法，但未必是最好的方法.

然而，由于它只是反复使用交换两行 (列) 的位置，提出某一行 (列) 所有元素的公因子，把某一行 (列) 的所有元素乘同一个数后加到另外一行等几个简单步骤，所以将这些步骤编写成程序，由计算机去进行这些运算就很容易了. 因此，上述方法现在被普遍运用.

下面再举一个例题.

例 6.7 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.