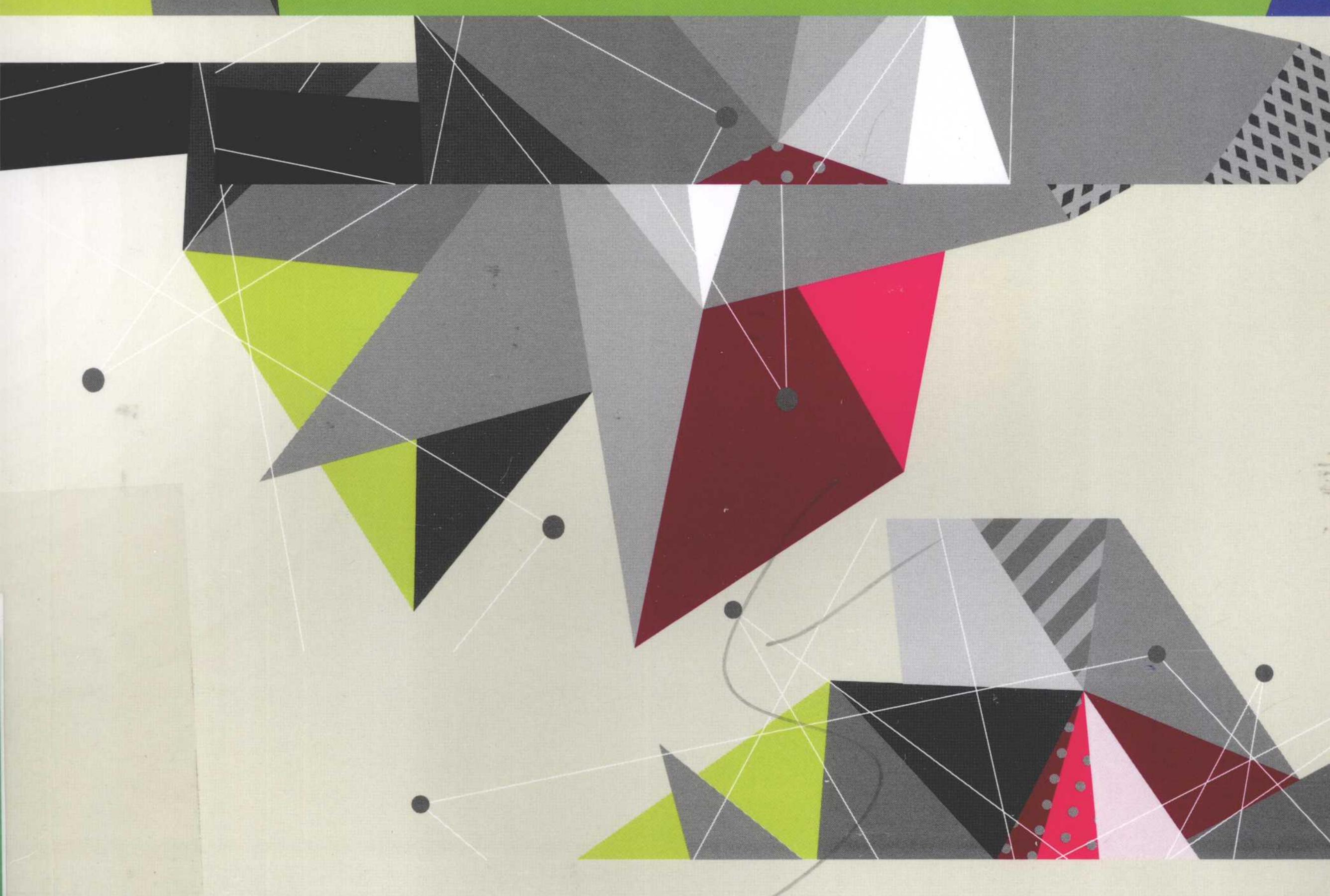
大学数学学习方法指导丛书

大学数学学习指导

石澄贤 主编



苏州大学出版社
Soochow University Press

大学数学学习方法指导

大学数学学习指导

主　编　石澄贤

副主编　王　峰　吴建成

黄清龙　赵志新

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学学习指导 / 石澄贤主编. —苏州：苏州大学出版社，2015.8
(大学数学学习方法指导丛书)
ISBN 978-7-5672-1451-4

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①石… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 183959 号

大学数学学习指导
石澄贤 主编
责任编辑 李 娟

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市十梓街 1 号 邮编：215006)
苏州恒久印务有限公司印装
(地址：苏州市友新路 28 号东侧 邮编：215128)

开本 787 mm×1 092 mm 1/16 印张 15.25 字数 380 千
2015 年 8 月第 1 版 2015 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5672-1451-4 定价：29.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话：0512-65225020
苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

前言

高等数学课程是一门非常重要的基础课.它前承中学的数学课程,后继大学的各门基础课和专业课.编写一本配合教材,能对学生所学概念、方法进行系统深化,解决学习过程中碰到的疑问和困难的指导书是非常必要的.

本书主要归纳了高等数学课程的具体要求,总结各章具体内容,对典型例题进行分析,引导学生把掌握内容和方法结合起来,展现疑难问题和认识错误,指导学生深入理解数学方法和思想.

本书的特点是注重基础,融入在教学中碰到的学习疑问并进行解惑.由浅入深,难度适中,适合学生作为高等数学的辅导资料使用,也可作为考研的复习资料.

参加本书编写的人员有:石澄贤、王峰、吴建成、黄清龙、赵志新、徐明华、费忠华、郭淑娟、俞亚娟.

本书得到了常州大学教务处的大力支持,在此表示衷心感谢!限于我们的认识和水平,本书定存在不足和缺点,殷切希望广大师生批评指正.

编　者

2015.8

目 录

contents

第一章 函数与极限

第二章 导数与微分

第三章　中值定理与导数的应用

第四章　不定积分

第八章　多元函数微分学

第九章　重积分

第十章　曲线积分与曲面积分

第十一章　无穷级数

第十二章　常微分方程

附 录

第一章

函数与极限

第一节 目的与要求

1. 理解函数的概念.

2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

3. 理解复合函数的概念,了解反函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

5. 会根据实际问题建立简单的函数关系式.

6. 理解极限的概念(对极限的 ε-N,ε-δ 定义,可在学习过程中逐步加深理解,对于给出 ε,求 N 或 δ 不作过高要求).

7. 掌握极限的四则运算法则.

8. 了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则),会用两个重要极限求极限.

9. 了解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念,会用等价无穷小求极限.

10. 理解函数在一点连续的概念.

11. 了解间断点的概念,并会判别间断点的类型.

12. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(介值定理、最大值和最小值定理).

第二节 内容提要

一、主要定义

1. 设 x 和 y 是两个变量,对 $\forall x\in D\subset\mathbf{R}$,按照一定的法则 f 总有确定的数值 $y\in\mathbf{R}$ 与其对应,则称 y 是 x 的函数,记为 $y=f(x)$. 称 D 为 $f(x)$的定义域,x 叫作自变量,y 叫作因变量. 数集 $W=\{y|y=f(x),x\in D\}$称为函数的值域.

2. 函数的几种特性.

设函数 $f(x)$的定义域为 D.

(1) 若 D 关于原点对称,对 $\forall x\in D$,$f(x)=f(-x)$恒成立,则称 $f(x)$为偶函数.

(2) 若 D 关于原点对称，对 $\forall x\in D$，$f(x)=-f(-x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数.

(3) 若存在 $T\neq 0$，对 $\forall x\in D$，有 $(x\pm T)\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为其周期，使等式成立的最小正值 T 称为最小正周期.

(4) 设区间 $I\subset D$. 若对 $\forall x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加（或减小）的.

(5) 设数集 $Z\subset D$. 若存在 $M>0$，使对 $\forall x\in Z$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 Z 上有界；否则，称 $f(x)$ 在 Z 上无界.

3. 设 $\delta>0$，点 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)\xlongequal{\text{def}}\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$. 点 a 的 δ 去心邻域 $U(\hat{a},\delta)\xlongequal{\text{def}}\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$.

4. 设 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，$u=\varphi(x)$ 的定义域或定义域的非空子集为 D_2，值域为 W_2，且 $W_2\subset D_1$，那么对 $\forall x\in D_2$，有确定的值 y，通过 $u=\varphi(x)$ 按照规则 $y=f(u)$ 与其对应，则称此函数为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

5. 基本初等函数是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数.

6. 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的函数统称为初等函数.

7. 若对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$，使得当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限（或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a），记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a\,(n\to\infty)$.

当数列 $\{x_n\}$ 的极限不存在时，称 $\{x_n\}$ 发散.

8. 若对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\,(x\to x_0)$.

在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中，将 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=A$. 类似地，在 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中，把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0<x<x_0+\delta$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0^+)=A$.

9. 若对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists X>0$，使得当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\,(x\to\infty)$.

在此定义中，将 $|x|>X$ 改成 $x<-X$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

类似地，将 $|x|>X$ 改成 $x>X$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

10. 无穷大与无穷小.

(1) 若对 $\forall M>0$，$\exists \delta>0$（或 $X>0$），使得当 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$）时，恒有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷大，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$）.

(2) 若对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$（或 $X>0$），使得当 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$）时，恒有 $|f(x)|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷小，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$）. 零是可作为无穷小的唯一常数（函数）.

注：在下面的讨论中，当定理对 $x\to x_0$ 及 $x\to\infty$ 等都成立时，则省略"lim"下面自变量的变化过程，简记为lim.

11. 无穷小的比较：以下 $\alpha(x)$ 及 $\beta(x)$ 都是在同一个自变量变化过程中的无穷小，$\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$也是在这个变化过程中的极限.

当$\lim\alpha(x)=\lim\beta(x)=0$ 时，若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小，记为$\alpha(x)=o(\beta(x))$；若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称$\alpha(x)$是比 $\beta(x)$低阶的无穷小；若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C\neq 0)$，则称 $\alpha(x)$与$\beta(x)$是同阶无穷小；若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与$\beta(x)$是等价无穷小，记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

12. 设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某一邻域内有定义，若 $y=f(x)$在 x_0 处有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称 $f(x)$在 x_0 处连续.

13. 设 $f(x)$在 x_0 的某邻域内有定义，若 $f(x)$满足下列条件之一：

(1) $f(x)$在 $x=x_0$ 处无定义，

(2) 虽在 $x=x_0$ 处有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在，

(3) 虽在 $x=x_0$ 处有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，

则称$f(x)$在点 x_0 处不连续，x_0 称为函数 $f(x)$的不连续点或间断点.

具有左、右极限的间断点称为第一类间断点，否则称为第二类间断点，极限存在的间断点称为可去间断点.

二、主要定理与公式

1. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则数列$\{x_n\}$有界.

2. 极限存在则必唯一.

3. 若$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，则有

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,$$
$$\lim[f(x)g(x)]=AB,$$
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

4. 极限存在判别准则.

(1) 单调有界数列必有极限.

(2) 夹逼准则：若 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$(此夹逼准则对函数极限也成立).

5. 在同一变化过程中的有界变量与无穷小的乘积是无穷小；有限个无穷小的和是无穷小.

6. 等价无穷小具有传递性：设 α,β,γ 为同一过程的无穷小，若 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$.

7. 求极限过程中可用等价无穷小替换. 例如，在同一过程中，若 $\alpha\sim\bar{\alpha},\beta\sim\bar{\beta}$，且 $\lim\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ 存在，则 $\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$.

8. $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$. 这里 $\lim\alpha(x)=0$.

9. 两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

10. 若在 $U(\hat{x}_0,\delta)$ 内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

11. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则必存在 $U(\hat{x}_0,\delta)$，使在此邻域内 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

12. 初等函数在其定义区间上连续.

13. 闭区间上的连续函数有下列性质：

(1) 函数有最大值与最小值.

(2) 函数有界.

(3) 函数满足介值定理：任取介于最大值与最小值之间的数，必有与之相等的函数值. 特别地，函数满足零点定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则必有 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

三、补充结论

1. 当 $x\to 0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim \mathrm{e}^x-1\sim\ln(1+x)$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$.

注： 上述公式中 x 可用无穷小代替. 例如，若 $\lim\varphi(x)=0$，则 $\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)(\varphi(x)\to 0)$.

2. 不为零的无穷小的倒数为无穷大，无穷大的倒数为无穷小.

3. $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n>m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$$

4. $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f(x_0),f(x_0^-),f(x_0^+)$ 存在且相等.

5. 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $|f(x)|$ 在 x_0 处也连续；反之，不成立.

6. 关于极限存在的命题.

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0^+)=f(x_0^-)=A$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$；反之，不然.

注：利用此命题在第三章中可将数列极限转化为函数极限，用洛必达法则求解.

7. 若存在数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$（其中 $x_n, y_n \in D, n=1,2,\cdots$），$x_n \to x_0$，$y_n \to x_0$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，亦不可能是无穷大量.

第三节 错解辨析

例 1 因为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调增加，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，所以 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

分析：两个单调增加的函数的积不一定是单调增加的，如 $f(x)=-\dfrac{1}{x}$，$g(x)=x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上都是单调增加的，但它们的积在 $(0,+\infty)$ 上不是单调增加的.

例 2 当 $n\to\infty$ 时，由 $|x_n|\to 0$，可推出 $x_n \to 0$，所以由 $|x_n|\to A$ 可推出 $x_n\to A$.

分析：$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$ 是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 成立的充分必要条件，但 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=A$ 不是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 成立的充分必要条件. 例如，$x_n=(-1)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

例 3 因为极限存在必有界，所以若 $\lim f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必为有界的.

分析：极限存在必有界是对数列而言的，对于函数而言此结论不成立，如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，但 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界.

例 4 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1.$

分析：错误地利用了公式 $\lim\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$. 只有当 $\varphi(x)\to 0$ 时才有 $\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}\to 1$.

正确解法如下：

因为 x 为无穷小，$\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界量，所以 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

例 5 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0.$

分析：第一个等号不成立. 等式 $\lim f(x)g(x)=\lim f(x)\lim g(x)$ 只有当两个函数极限都存在时才能成立，否则，不成立. 第二个等号后的运算无意义，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 无意义，正确的解法见例 4.

例 6 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{ax}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}ax}=1^{\infty}=1.$

分析：这是一个幂指函数的极限，没有这样的极限运算法则，指数部分的极限还不存在，运算中也没有“1^{∞}”这样的写法，无意义.

正确解法如下：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{a}=e^{a}.$$

例 7 $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)=\infty-\infty=0.$

分析：第一个等号不成立，只有当两个极限都存在时上式才成立.第二个运算没有意义(非数的运算).

正确解法如下：

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x}{1-x^2}=\infty.$$

例 8 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0.$

分析：只有两个无穷小之比(成积)的极限才可用等价无穷小代替，其他运算不可随便用等价无穷小代替.

正确解法如下：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^3}\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^3}\cdot\frac{\cos x-1}{\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=-\frac{1}{2}.$$

例 9 $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}}=\infty.$

分析：当 $\varphi(x)\to+\infty$ 时，$e^{\varphi(x)}\to+\infty$；当 $\varphi(x)\to-\infty$ 时，$e^{\varphi(x)}\to0$.

因此 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，所以$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$不存在.

例 10 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}.$$

分析：第二个等式仅当 $x>0$ 时成立，因此 $x\to+\infty$时极限为$\frac{1}{2}$.但当 $x<0$ 时，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{2},$$

因此原极限不存在.

例 11 $f(x)=\frac{x}{\tan x}$，$x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$为其无穷间断点.

分析：$k=0$ 时例外.因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\tan x}=1$，故 $x=0$ 是 $f(x)$的可去间断点，补充定义 $f(0)=1$ 可使$f(x)$在 $x=0$ 处连续.

例 12 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$.

解：因为$\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+1}\leqslant\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\leqslant\frac{n}{n^2+n}+\frac{n}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}$，

即
$$\frac{n}{n^2+1}\leqslant\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\leqslant\frac{n^2}{n^2+n},$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0,\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n}=1,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$不存在.

分析：夹逼的两个式子极限不一样，不能说明极限不存在.这个极限实际上是存在且可用逼近准则求出的.

因为$\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\leqslant\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\leqslant\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+1}$

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}\leqslant\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\leqslant\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1},$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}=\frac{1}{2},\ \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1}=\frac{1}{2},$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}=\frac{1}{2}.$$

第四节　典型例题

一、函数概念

例 1　设 $f(x)$的定义域为$[0,1]$，求 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域.

解：因为$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1,\end{cases}$　所以$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\a\leqslant x\leqslant 1+a.\end{cases}$

① 当$\begin{cases}a\leqslant 1-a,\\1-a\leqslant 1+a,\end{cases}$即 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$时，定义域为$[a,1-a]$；

② 当$\begin{cases}a\leqslant -a,\\-a\leqslant 1+a,\end{cases}$即$-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 0$ 时，定义域为$[-a,1+a]$.

例 2　设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\0, & |x|>1,\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\2, & |x|>2,\end{cases}$求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

解：(1)
$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1,\\0, & |g(x)|>1.\end{cases}$$

要使$|g(x)|\leqslant 1$，必须使$|x|\leqslant 2$，$|2-x^2|\leqslant 1$ 同时成立，解得 $1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}$. 于是有
$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & 1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3},\\0, & |x|<1\text{ 或}|x|>\sqrt{3}.\end{cases}$$

(2)
$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f^2(x), & |f(x)|\leqslant 2,\\2, & |f(x)|>2.\end{cases}$$

由 $f(x)$的定义知，对任何 x 均有$|f(x)|<2$，故有